

---

РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО  
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОВАЧЕВСКОГО  
ЦЕНТР ГРАВИТАЦИИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МЕТРОЛОГИИ ВНИИМС  
РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

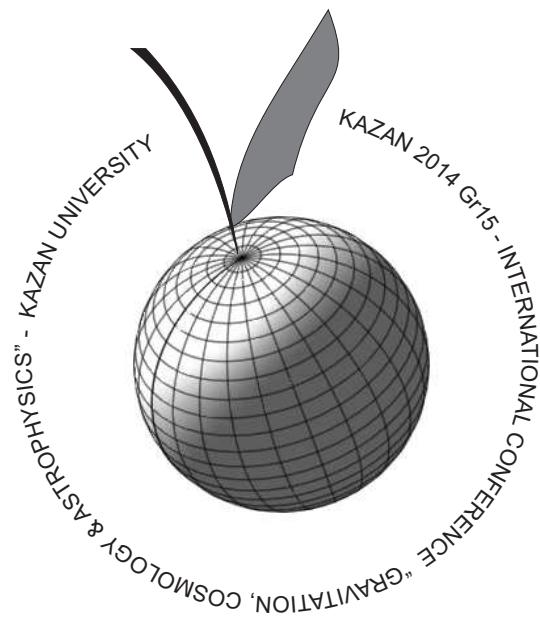
---

## XV-Я РОССИЙСКАЯ ГРАВИТАЦИОННАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

– «Международная конференция по гравитации,  
космологии и астрофизике»,  
Международная школа по гравитации и космологии  
«GRACOS-2014»

Казань 30 июня - 5 июля 2014 года

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ ШКОЛЫ



Казанский университет  
2014

**УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774**

**ББК 22.632**

**T78**

Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики и механики  
им. Н.И. Лобачевского

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,  
*проф. Ю.Г. Игнатьева*

**Труды международной школы по гравитации и космологии**  
**«GRACOS-2014». 30.06 – 5.07 2014, Казань.** / Под общей  
редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,  
проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Казанский университет, 2014. - 106 с.

Russian Gravitational Society, Russian Foundation for Basic Research Kazan Federal University, Centre for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS, Peoples' Friendship University of Russia.

15th Russian Gravitational Conference - «International Conference on Gravitation, Cosmology and Astrophysics (RUSGRAV-15)» and «International School on Gravitation and Cosmology (GRACOS-2014)». Kazan, June 30 - July 5, 2014. Proceeding of International School on Gravitation and Cosmology «GRACOS-2014». /Edited by Prof. Yu.G. Ignat'ev. — Russia, Kazan: Kazan Federal University, 2014.

*Издание осуществлено при поддержке Казанского (Приволжского) федерального университета*

---

**ISBN 978-5-905787-61-4**

**УДК 530.12+531.51+517.944+519.713**

**+514.774**

**ББК 22.632**

©Казанский университет, 2014

©Лаборатория информационных технологий в  
математическом образовании Института матема-  
тики и механики КФУ, 2014

# Оглавление

<b>1. Vitaly Melnikov. Multidimensional Cosmology and Fundamental Metrology.</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Multidimensional Models . . . . .	9
1.3 Fundamental physical constants . . . . .	13
References . . . . .	19
<b>2. А.В. Минкевич. Калибровочный подход в теории тяготения, гравитационное взаимодействие и релятивистская космология.</b>	<b>26</b>
2.1 Введение . . . . .	26
2.2 Калибровочный подход в теории гравитации и ПКТТ . . . . .	27
2.3 Гравитационные уравнения ПКТТ . . . . .	30
2.4 ПКТТ и изотропная космология . . . . .	32
2.5 Заключение . . . . .	43
Литература . . . . .	44
<b>3. Alexei A. Starobinsky. Lectures on modern problems of cosmology.</b>	<b>48</b>
3.1 Modern paradigm of cosmology and history of our Universe . . . . .	48
3.2 Present status of the inflationary scenario . . . . .	48
3.3 From metric perturbations to CMB temperature . . . . .	53
3.4 What metric CMB observations tells us about inflation . . . . .	54
3.5 Consequences of the would be discovery primordial GW . . . . .	56
3.6 Conclusions . . . . .	58
<b>4. Ю.Г. Игнатьев. Кинетика установления термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной при наличии скейлинга взаимодействий в унитарном пределе.</b>	<b>60</b>
4.1 Условия ЛТР для космологической плазмы . . . . .	60
4.2 Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния . . . . .	63
4.3 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц . . . . .	66
4.4 Построение и решение уравнения энергобаланса . . . . .	73
4.5 Кинетическое уравнение для неравновесных частиц . . . . .	76
4.6 Точная модель перехода . . . . .	82
4.7 Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной . . . . .	83
Литература . . . . .	91
<b>АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ</b>	<b>93</b>

<b>ИНФОРМАЦИЯ О МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛАХ «GRACOS»</b>	<b>94</b>
Ю.Г. Игнатьев <i>II Российская школа по гравитации и космологии Gracos-2009 и Международ- ный семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» . . . . .</i>	95

*Vitaly Melnikov. Multidimensional  
Cosmology and Fundamental Metrology*



Professor V.N. Melnikov: Multidimensional Cosmology and  
Fundamental Metrology  
President of Russian Gravitational Society  
Center for Gravitation and Fundamental Metrology, Institute of  
Gravitation and Cosmology, Peoples' Friendship University of  
Russia

**V.N. Melnikov. Multidimensional Cosmology and Fundamental Metrology** Integrable multidimensional models of gravitation and cosmology make up a proper approach to study basic issues and strong field objects, the Early and present Universe, black hole and wormhole physics in particular [1, 2, 3]. Our main results for cosmology within this approach are described.

Some aspects of fundamental metrology: the choice, nature, classification and precision of determination of fundamental physical constants, also their role in expected transfer to new definitions of main units of SI, supposed to be based on fundamental physical constants and stable quantum phenomena, are described. The problem of temporal variations of constants is also discussed, variations of  $G$  in particular. A need for further absolute measurements of  $G$ , its possible range and time variations is pointed out. The multipurpose space project SEE is shortly described, aimed for measuring  $G$  and its stability in space and time 3-4 orders better than at present.

## 1.1 Introduction

Gravitation is a missing cardinal link to unification of all physical interactions. Discovery of present acceleration of the Universe, dark matter and dark energy problems are other challenges to modern physics. Studies in the previous century in the field of gravitation were devoted mainly to theoretical investigations and experimental verification of general relativity and alternative theories of gravitation with a strong stress on relations between macro and microworld phenomena. Motivations were: singularities in cosmology and black hole physics, role of gravity at very small (Planck) scales, attempts to create a quantum theory of gravity as for other physical fields, problem of possible variations of fundamental physical constants etc. A lot of work was done in our group [4] along such topics as: exact solutions with different fields as sources in GR; particle-like solutions with a gravitational field; quantum theory of fields in a classical gravitational background; quantum cosmology with fields like scalar and electromagnetic ones, with the cosmological constant etc.; self-consistent treatment of quantum effects in cosmology; development of alternative theories of gravitation: scalar-tensor, with extra dimensions etc.; possible variations of fundamental physical constants [5, 6, 7, 8, 9].

As our main results of this period we may mention [4] the first quantum cosmological model with a cosmological constant (creation from nothing) (1972); first classical cosmological models for conformal scalar field (1968) and quantum cosmological models with minimal and conformal scalar fields (1971), first nonsingular cosmological model with spontaneous symmetry breaking (1978-79) of the nonlinear conformal scalar field, exact solutions for nonlinear electrodynamics, including Born-Infeld one, first exact solution for dilaton-type interaction with electro-magnetic field in GR, first non-singular field particle-like solution with gravitational field (1979). Also, the conclusion that  $G$  may vary with respect to atomic system of measurements in the Jordan frame (1978) etc.

As all attempts to quantize general relativity in a usual manner failed and it was proved that it is not renormalizable, it became clear that the promising trend is along the lines of unification of all physical interactions which started in the 70's. About this time the experimental investigation of gravity in strong fields and gravitational waves started giving a powerful speed up in theoretical studies of such objects as pulsars, black holes, QSO's, AGN's, early Universe etc., which continues now.

In experimental activities some crucial next generation gravitational experiments verifying predictions of unified schemes will be important. Among them are: MICROSCOPE (2015-2016), STEP - testing the corner stone Equivalence Principle, SEE - testing the inverse square law (or new nonnewtonian interactions), EP, possible variations of the newtonian constant  $G$  with time, measurements of the absolute value of  $G$  with unprecedented accuracy [10, 11]. Of course, gravitational waves problem, verification of torsional, rotational, 2nd order and strong field effects remain important also.

Other very important feature, which was first stressed in [12], is an increasing role of fundamental physics studies, gravitation, cosmology and astrophysics in particular, in space experiments. Unique microgravity environments and modern technology outbreak give nearly ideal place for gravitational experiments which suffer a lot on the Earth from its relatively strong gravitational field and gravitational fields of nearby objects due to the fact that there is no ways of screening gravity.

In the developement of relativistic gravitation and dynamical cosmology we may notice three distinct stages: first, investigation of models with matter sources in the form of a perfect fluid, as was originally done by Einstein and Friedmann. Second, studies of models with sources as different physical fields, starting from electromagnetic and scalar ones, both in classical and quantum cases (see [4]). And third, which is really topical now, application of ideas and results of unified models for treating fundamental problems of cosmology, black hole and wormholes physics, especially in high energy regimes and for explanation of the present acceleration of the Universe, dark matter and dark energy problems. Multidimensional gravitational models play an essential role in the latter approach. The necessity of studying multidimensional models of gravitation and cosmology [1, 2, 3] is motivated by several reasons.

First, the main trend of modern physics is the unification of all known fundamental physical interactions: electromagnetic, weak, strong and gravitational ones. During the recent decades there has been a significant progress in unifying weak and electromagnetic interactions, some more modest achievements in GUT, supersymmetric, string and superstring theories as they are their low energy limit. Now, theories with membranes,  $p$ -branes and M-theory are being created and studied. Having no definite successful theory of unification now, it is desirable to study the common features of these theories and their applications to solving basic problems of modern gravity and cosmology.

Second, multidimensional gravitational models, as well as scalar-tensor theories of gravity, are theoretical frameworks for describing possible temporal and range variations of fundamental physical constants [4, 5, 6, 7, 13]. The possible discovery of the fine structure constant variations and its anisotropy is now at a critical further investigation.

Lastly, applying multidimensional gravitational models to basic problems of modern cosmology and black hole physics, we hope to find answers to such long-standing problems as singular or nonsingular initial states, creation of the Universe, creation of matter and its entropy, cosmological constant, coincidence problem, origin of inflation and specific scalar fields which may be necessary for its realization, isotropization and graceful exit problems, stability and nature of fundamental constants [5, 12, 14], possible number of extra dimensions, their stable compactification, present acceleration of the Universe, dark matter and dark energy problems etc.

Multidimensional gravitational and cosmological models are certain generalizations of GR and of the standard cosmological model, so it is quite natural to inquire about their possible observational or experimental windows. From what we already know, among these

windows are: possible deviations from the Newton and Coulomb laws, or new interactions; possible temporal variations of the fine structure and gravitational constants with a rate smaller than the Hubble one; role of gravitational waves in the Universe evolution, BICEP2 problem and the existence of monopole modes; behaviour of strong field objects, such as multidimensional black holes, wormholes and AGN; standard cosmological tests; possible non-conservation of energy in strong field objects and accelerators, if braneworld or similar ideas about gravity in the bulk turn out to be true, etc.

Since modern cosmology has already become a unique laboratory for testing standard unified models of physical interactions at energies that are far beyond the level of existing and future man-made accelerators, there exists a possibility of using cosmological and astrophysical data for discriminating between future unified schemes. Data on time variations and/or possible deviations from the Newton law should also contribute to the unified theory choice which was suggested in [12].

As no accepted unified model exists, in our approach [1, 2, 3, 15, 16] we adopted models, based on multidimensional Einstein equations with or without sources of different nature as: cosmological constant, perfect and viscous fluids, scalar and electromagnetic fields and their interactions, dilaton and moduli fields, fields of antisymmetric forms (related to  $p$ -branes) etc.

Our program's main objective was and is to obtain exact self-consistent solutions for these models (integrable models) and then to analyze them in cosmological, spherically and axially symmetric cases. It is done mainly within the Riemann geometry. In many cases we tried to single out models, which do not contradict available experimental or observational data on variations of  $G$  and  $\alpha$ .

As our model [1, 2] we use  $n$  Einstein spaces of constant curvature with sources as  $(m+1)$ -component perfect fluid or fields or form-fields, cosmological or spherically symmetric metric, manifold as a direct product of factor-spaces of arbitrary dimensions. Then in the harmonic time gauge we show that Einstein multidimensional equations are equivalent to Lagrange equations with non-diagonal in general minisuperspace metric and some exponential potential. After diagonalization we perform reduction to sigma-model and Toda-like systems, further to Liouville, Abel, generalized Emden-Fowler equations etc. and try to find exact solutions. We suppose that extra spaces are constant, or dynamically compactified, or like torus, or large, but with barriers, walls etc. We realized the program in arbitrary dimensions (from 1988) [1, 2, 3, 15, 16] in cosmology obtaining exact general solutions of multidimensional Einstein equations with sources:

- $\Lambda$ ,  $\Lambda +$  scalar field (singled out nonsingular, dynamically compactified, inflationary, 1994);
- perfect fluid, PF + scalar field (with nonsingular, inflationary solutions);
- viscous fluid (nonsingular, generation of mass and entropy, quintessence and coincidence in 2-component model);
- first with stochastic behavior near the singularity, billiards in Lobachevsky space,  $D=11$  is critical,  $\varphi$  destroys billiards (1994);
- for all above cases Ricci-flat solutions above were obtained for any  $n$ , also with curvature in one factor-space; with curvatures in 2 factor-spaces only for total  $N=10, 11$ ;
- fields: minimal and conformal scalar, dilatons, forms of arbitrary rank (1998) - inflationary,  $\Lambda$  generation by forms (p-branes) [17];
- first with billiards for dilaton-forms (p-branes) interaction (1999);

- quantum variants were obtained (solutions of WDW-equation [18]) for all above classical solutions; for D=11 supergravity in particular (2014) ;
- dilatonic fields with potentials [19, 20], billiard behavior for them also.
- nonlinear in curvature multidimensional models with the electromagnetic field and  $\alpha$  variation (2013) etc.

For many of these models we calculated also the variation with time of the effective gravitational constant. Comparison with present experimental bounds allowed to choose viable models or single out some classes of solutions.

Similar results were obtained for models depending on  $r$  in any dimensions [1, 2, 3].

## 1.2 Multidimensional Models

A revival of many dimensions ideas is heated by expectations connected with the overall M-theory. In such approach 4-dimensional gravitational and cosmological models with extra fields were obtained from some multidimensional model by dimensional reduction based on the decomposition of the manifold

$$M = M^4 \times M_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

where  $M^4$  is our 4-dimensional manifold and  $M_{\text{int}}$  is some internal manifold.

The earlier papers on multidimensional gravity and cosmology dealt with multidimensional Einstein equations and with a block-diagonal cosmological or spherically symmetric metric defined on the manifold  $M = R \times M_0 \times \dots \times M_n$  of the form

$$g = -dt \otimes dt + \sum_{r=0}^n a_r^2(t) g^r \quad (2.2)$$

where  $(M_r, g^r)$  are Einstein spaces,  $r = 0, \dots, n$ . In some of them a cosmological constant and simple scalar fields were also used [18].

Such models are usually reduced to pseudo-Euclidean Toda-like systems with the Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} G_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - \sum_{k=1}^m A_k e^{u_k^k x^i} \quad (2.3)$$

and the zero-energy constraint  $E = 0$ . It should be noted that pseudo-Euclidean Toda-like systems are not well-studied yet. There exists a special class of equations of state that gives rise to Euclidean Toda models [21].

Cosmological solutions are closely related to solutions with spherical symmetry [22]. Moreover, the scheme of obtaining the latter is very similar to the cosmological approach [1, 23].

### Exact solutions with “branes”

In our papers several classes of the exact solutions for the multidimensional gravitational model governed by the Lagrangian

$$\mathcal{L} = R[g] - 2\Lambda - h_{\alpha\beta} g^{MN} \partial_M \varphi^\alpha \partial_N \varphi^\beta - \sum_a \frac{1}{n_a!} \exp(2\lambda_{a\alpha} \varphi^\alpha) (F^a)^2, \quad (2.4)$$

were considered. Here  $g$  is metric,  $F^a = dA^a$  are forms of ranks  $n_a$  and  $\varphi^\alpha$  are scalar fields and  $\Lambda$  is a cosmological constant (the matrix  $h_{\alpha\beta}$  is invertible). In [16] certain classes

of  $p$ -brane solutions to field equations corresponding to the Lagrangian (4), obtained by us earlier, were presented. These solutions have a block-diagonal metrics defined on  $D$ -dimensional product manifold, i.e.

$$g = e^{2\gamma} g^0 + \sum_{i=1}^n e^{2\phi^i} g^i, \quad M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n, \quad (2.5)$$

where  $g^0$  is a metric on  $M_0$  (our space) and  $g^i$  are fixed Ricci-flat (or Einstein) metrics on  $M_i$  (internal space,  $i > 0$ ). The moduli  $\gamma, \phi^i$  and scalar fields  $\varphi^\alpha$  are functions on  $M_0$  and fields of forms are also governed by several scalar functions on  $M_0$ . Any  $F^a$  is supposed to be a sum of monoms, corresponding to electric or magnetic  $p$ -branes ( $p$ -dimensional analogues of membranes), i.e. the so-called composite  $p$ -brane ansatz is considered [24, 25]. (In non-composite case we have no more than one monom for each  $F^a$ .)  $p = 0$  corresponds to a particle,  $p = 1$  to a string,  $p = 2$  to a membrane etc. The  $p$ -brane world-volume (world-line for  $p = 0$ , world-surface for  $p = 1$  etc.) is isomorphic to some product of internal manifolds:  $M_I = M_{i_1} \times \dots \times M_{i_k}$  where  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  and has dimension  $p+1 = d_{i_1} + \dots + d_{i_k} = d(I)$ , where  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  is a multi-index describing the location of  $p$ -brane and  $d_i = \dim M_i$ . Any  $p$ -brane is described by the triplet ( $p$ -brane index)  $s = (a, v, I)$ , where  $a$  is the color index labelling the form  $F^a$ ,  $v = e(\text{lectric}), m(\text{agnetic})$ . For the electric and magnetic branes corresponding to form  $F^a$  the world-volume dimensions are  $d(I) = n_a - 1$  and  $d(I) = D - n_a - 1$ , respectively. The sum of this dimensions is  $D - 2$ . For  $D = 11$  supergravity we get  $d(I) = 3$  and  $d(I) = 6$ , corresponding to electric  $M2$ -brane and magnetic  $M5$ -brane.

### Sigma model representation.

In [26] the model was reduced to gravitating self-interacting sigma-model with certain constraints imposed. This representation for non-composite electric case was obtained earlier in [24, 25], for electric composite case see also [27]).

The  $\sigma$ -model Lagrangian, obtained from (2.4), has the form [26]

$$\mathcal{L}_\sigma = R[g^0] - \hat{G}_{AB} g^{0\mu\nu} \partial_\mu \sigma^A \partial_\nu \sigma^B - \sum_s \varepsilon_s \exp(-2U^s) g^{0\mu\nu} \partial_\mu \Phi^s \partial_\nu \Phi^s - 2V, \quad (2.6)$$

where  $(\sigma^A) = (\phi^i, \varphi^\alpha)$ ,  $V$  is a potential,  $(\hat{G}_{AB})$  are components of (truncated) target space metric,  $\varepsilon_s = \pm 1$ ,

$$U^s = U_A^s \sigma^A = \sum_{i \in I_s} d_i \phi^i - \chi_s \lambda_{a_s \alpha} \varphi^\alpha$$

are linear functions,  $\Phi^s$  are scalar functions on  $M_0$  (corresponding to forms), and  $s = (a_s, v_s, I_s)$ . Here parameter  $\chi_s = +1$  for the electric brane ( $v_s = e$ ) and  $\chi_s = -1$  for the magnetic one ( $v_s = m$ ). A pure gravitational sector of the sigma-model was considered earlier in our paper [22]. For  $p$ -brane applications  $g^0$  is Euclidean,  $(\hat{G}_{AB})$  is positive definite (for  $d_0 > 2$ ) and  $\varepsilon_s = -1$ , if pseudo-Euclidean (electric and magnetic)  $p$ -branes in a pseudo-Euclidean space-time are considered. The sigma-model (6) may be also considered for the pseudo-Euclidean metric  $g^0$  of signature  $(-, +, \dots, +)$  (e.g. in investigations of gravitational waves). In this case for a positive definite matrix  $(\hat{G}_{AB})$  and  $\varepsilon_s = 1$  we get a non-negative kinetic energy terms.

The co-vectors  $U^s$  play a key role in studying the integrability of the field equations [26] and possible existence of stochastic behavior near the singularity, see our paper

[28]. An important mathematical characteristic here is the matrix of scalar products  $(U^s, U^{s'}) = \hat{G}^{AB} U_A^s U_B^{s'}$ , where  $(\hat{G}^{AB}) = (\hat{G}_{AB})^{-1}$ . The scalar products for co-vectors  $U^s$  were calculated in [26] (for electric case see [24, 25, 27] )

$$(U^s, U^{s'}) = d(I_s \cap I_{s'}) + \frac{d(I_s)d(I_{s'})}{2 - D} + \chi_s \chi_{s'} \lambda_{as\alpha} \lambda_{a_s\beta} h^{\alpha\beta},$$

where  $(h^{\alpha\beta}) = (h_{\alpha\beta})^{-1}$ ;  $s = (a_s, v_s, I_s)$ ,  $s' = (a_{s'}, v_{s'}, I_{s'})$ . They depend upon brane intersections (first term), dimensions of brane world-volumes and total dimension  $D$  (second term), scalar products of dilatonic coupling vectors and electro - magnetic types of branes (third term). The so-called "intersections rules"(i.e. relations for  $d(I_s \cap I_{s'})$ ) are defined by scalar products of  $U^s$ -vectors.

### Cosmological solutions in diverse dimensions.

A family of general cosmological type  $p$ -brane solutions with  $n$  Ricci-flat internal spaces was considered, where also a generalization to the case of  $n - 1$  Ricci-flat spaces and one Einstein space of non-zero curvature (say  $M_1$ ) was obtained. These solutions are defined up to solutions to Toda-type equations and may be obtained using the Lagrange dynamics following from our sigma-model approach [29]. The solutions contain also a subclass of spherically symmetric solutions (for  $M_1 = S^{d_1}$ ). Special solutions with orthogonal and block-orthogonal sets of  $U$ -vectors were considered earlier in [29] and [15], respectively. (For non-composite case, see [30, 31]) and references therein.)

### Toda solutions.

In [29] the reduction of  $p$ -brane cosmological type solutions to Toda-like systems was first performed. General classes of  $p$ -brane solutions, cosmological and spherically symmetric ones, related to Euclidean Toda lattices associated with Lie algebras (mainly  $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$  ones) were obtained in [32, 33].

A class of space-like brane ( $S$ -brane) solutions (related to Toda-type systems) with product of Ricci-flat internal spaces and  $S$ -brane solutions with special orthogonal intersection rules were considered in [34, 35] and solutions with accelerated expansion (e.g. with power-law and exponential behavior of scale factors) were singled out.

Scalar fields play an essential role in modern cosmology. They are attributed to inflation models of the early universe and the models describing the present accelerated expansion as well. There is no unique candidate for the potential of the minimally coupled scalar field. Typically a potential is a sum of exponents. Such potentials appear quite generically in a large class of theories: multidimensional, Kaluza-Klein models, supergravity and string/M - theories.

Single exponential potential was extensively studied within Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 4D-model containing both a minimally coupled scalar field and a perfect fluid with the linear barotropic equation of state . The attention was mainly focussed on the qualitative behavior of solutions, stability of the exceptional solutions to curvature and shear perturbations and their possible applications within the known cosmological scenario such as inflation and scaling ("tracking"). In particular, it was found earlier by a phase plane analysis that for "flat" positive potentials there exists a unique late-time attractor in the form of the scalar dominated solution. It is stable within homogeneous and isotropic models with non-zero spatial curvature with respect to spatial curvature perturbations and provides the power-law inflation. For "intermediate" positive potentials a unique late-time attractor is the scaling solution, where the scalar field "mimics" the

perfect fluid, adopting its equation of state. The energy-density of the scalar field scales with that of the perfect fluid. Using our methods for multidimensional cosmology the problem of integrability by quadratures of the model in 4-dimensions was also studied. Four classes of general solutions, when the parameter characterizing the steepness of the potential and the barotropic parameter obey some relations, were found [36]. For the case of multiple exponential potential of the scalar field and dust integrable model in 4D was obtained in [37].

As to scalar fields with the multiple exponential potential in any dimensions, a wide class of exact solutions was obtained in [19, 20]. In [38] a behavior of this system near the singularity was studied using a billiard approach suggested earlier in [28, 39]. Quantum billiards recent solutions with branes may be found in [40]. A number of S-brane solutions were obtained in [34, 35]. Details for 2-component D-dimensional integrable models see in [41, 42, 43]. Quite different model with dilaton, branes and cosmological constant and static internal spaces was investigated in [17], where possible generation of the effective cosmological constant by branes was demonstrated. Model with variable equations of state leading to acceleration of our space and compactification of internal spaces see in [44].

### Cosmological models with time variations of $G$ .

As we mentioned before cosmological models in scalar-tensor and multidimensional theories are the frameworks for describing possible variations of fundamental physical constants with time due to scalar fields present explicitly in STT or generated by extra dimensions in multidimensional approach. In [45] we obtained solutions for the system of conformal scalar and gravitational fields in 4D and calculated the present possible relative variation of  $G$  at the level of less than  $10^{-13} \text{year}^{-1}$ . In the frames of a multidimensional model with a perfect fluid and 2 factor spaces (our 3D space of Friedmann open, closed and flat models) and internal 6D Ricci-flat one, we obtained the same limit for such variation of  $G$  [9]. Recently in a similar model we have shown [46] that either  $G$  or GUT coupling constants should vary. We estimated also the possible variations of the gravitational constant  $G$  in the framework of a generalized (Bergmann-Wagoner-Nordtvedt) scalar-tensor 4D-theory of gravity on the basis of the field equations, without using their special solutions. Specific estimates were essentially related to the values of other cosmological parameters (the Hubble and acceleration parameters, the dark matter density etc.) when the values of  $G\text{-dot}/G$  compatible with modern observations do not exceed  $10^{-13}$  per year [47].

In [48] we continued the studies of models in arbitrary dimensions and obtained the relations for  $G\text{-dot}$  in multidimensional model with Ricci-flat internal space and multicomponent perfect fluid. A two-component example: dust + 5-brane, was considered. It was shown that  $G\text{-dot}/G$  is less than  $10^{-13} \text{year}^{-1}$ . Expressions for  $G\text{-dot}$  were considered also in a multidimensional model with an Einstein internal space and a multicomponent perfect fluid [49]. In the case of two factor-spaces with non-zero curvatures without matter, a mechanism for prediction of small  $G\text{-dot}$  was suggested. The result was compared with exact (1+3+6)-dimensional solutions, obtained by us earlier [49, 50].

Multidimensional cosmological model describing the dynamics of  $n+1$  Ricci-flat factor-spaces  $M_i$  in the presence of a one-component anisotropic fluid was considered in [51]. The pressures in all spaces were supposed to be proportional to the density:  $p_i = w_i \rho$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Solutions with accelerated power-law expansion of our 3-space  $M_0$  and small enough variation of the gravitational constant  $G$  were found. These solutions exist for two branches of the parameter  $w_0$ . The first branch describes the super-stiff matter with

$w_0 > 1$ , the second one may contain a phantom matter with  $w_0 < -1$ , e.g., when  $G$  grows with time, so this branch may describe not present, but earlier stages only.

Similar exact solutions, but nonsingular and with an exponential behaviour of scale factors were considered in [52] for the same multidimensional cosmological model describing the dynamics of  $n + 1$  Ricci-flat factor spaces  $M_i$  in the presence of a one-component perfect fluid. Solutions with accelerated exponential expansion of our 3-space  $M_0$  and small variation of the gravitational constant  $G$  were found also.

Exact S-brane solutions with 2 electric branes and 2 phantom scalar fields in the manifold

$$M = (0, +\infty) \times \mathbb{R} \times M_2 \times M_3 \times M_4 \times M_5. \quad (2.7)$$

were obtained and studied in [53]. We got the asymptotic accelerated expansion of our 3-dimensional factor space and variations obeying the present experimental constraints of  $G\text{-dot}/G$  equal or less than  $10^{-13} \text{year}^{-1}$ .

Below we dwell mainly upon some problems of fundamental physical constants, the gravitational constant in particular, the SEE and laboratory projects to measure  $G$  and its possible variations shortly and on some theoretical models with variations of the effective gravitational constant.

### 1.3 Fundamental physical constants

In any physical theory there are constants which characterize the stability properties of different types of matter: of objects, processes, classes of processes and so on. These constants are important because they arise independently in different situations, cannot be expressed via other constants and have the same value, at any rate within accuracies we have gained nowadays. That is why they are called fundamental physical constants (FPC) [4, 12]. It is impossible to define strictly this notion. It is because the constants, mainly dimensional, are present in definite physical theories. In the process of scientific progress some theories are replaced by more general ones with their own constants, some relations between old and new constants arise. So, we may talk not about an absolute choice of FPC, but only about a choice corresponding to the present state of physical sciences.

Really, before the creation of the electroweak interaction theory and some Grand Unification Models, this *choice* was considered as follows:

$$c, \hbar, \alpha, G_F, g_s, m_p \text{ (or } m_e\text{)}, G, H, \rho, \Lambda, k, I, \quad (3.8)$$

where  $\alpha$ ,  $G_F$ ,  $g_s$  and  $G$  are constants of electromagnetic, weak, strong and gravitational interactions,  $H$ ,  $\rho$  and  $\Lambda$  are cosmological parameters (the Hubble constant, mean density of the Universe and cosmological constant),  $k$  and  $I$  are the Boltzmann constant and the mechanical equivalent of heat which play the role of conversion factors between temperature on one hand, energy and mechanical units on the other. After adoption in 1983 of a new definition of the meter ( $\lambda = ct$  or  $\ell = ct$ ) this role is partially played also by the speed of light  $c$ . It is now also a conversion factor between units of time (frequency) and length, it is defined with the absolute (null) accuracy. With the new suggested definitions of basic units of the International System of Units (SI) such a role may play also  $\hbar$  and/or  $N_A$ , where  $N_A$  is the Avogadro number.

Now, when the theory of electroweak interactions has a firm experimental basis and we have some good models of strong interactions, a more preferable choice is as follows:

$$\hbar, (c), e, m_e, \theta_w, G_F, \theta_c, \Lambda_{QCD}, G, H, \rho, \Lambda, k, I \quad (3.9)$$

and, possibly, three angles of Kobayashi-Maskawa —  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  and  $\delta$ . Here  $\theta_w$  is the Weinberg angle,  $\theta_c$  is the Cabibbo angle and  $\Lambda_{QCD}$  is the cut-off parameter of quantum chromodynamics. Of course, if a theory of four known now interactions will be created (M-theory or other), then we will probably have another choice. As we see, the macro constants remain the same, though in some unified models, i.e. in multidimensional ones, they may be related in some manner. From the point of view of these unified models the above mentioned ones are low energy constants.

All these constants are known with different accuracies. The most precisely defined constant was and remain the speed of light  $c$ : its accuracy was  $10^{-10}$  and now it is defined with the null accuracy. Atomic constants,  $e$ ,  $\hbar$ ,  $m$  and others are determined with errors  $10^{-7} \div 10^{-8}$ ,  $G$  up to  $10^{-4}$  or even worse,  $\theta_w$  — up to  $10^{-3}$ ; the accuracy of  $H$  is about several percents. Other cosmological parameters (FPC): mean density estimations vary also within 2 percent; for  $\Lambda$  we have now data that its corresponding energy density exceeds the matter density (0.7 and 0.3 of the total universe mass correspondingly).

As to the nature of FPC, we may mention several approaches. One of the first hypotheses belongs to J.A. Wheeler: in each cycle of the Universe evolution the FPC arise anew along with physical laws which govern this evolution. Thus, the nature of the FPC and physical laws are connected with the origin and evolution of our Universe.

A less global approach to the nature of dimensional constants suggests that they are measures of asymptotical states. Really, velocities of usual bodies are smaller than  $c$ , so it plays the role of an asymptotical limit. The same sense have  $\hbar$  as the minimal quantum of action and  $e$  as the minimal observable charge.

Finally, FPC or their combinations may be considered as natural scales determining the basic units. While the earlier basic units were chosen more or less arbitrarily, i.e., the second, meter and kilogram, now the first two are based on stable (quantum) phenomena. Their stability is believed to be ensured by the physical laws which include FPC. There appeared similar suggestions for a new reproducible realization of a  $kg$ , fixing values of  $N_A$  or  $\hbar$ , see [54].

An exact knowledge of FPC and precision measurements are necessary for testing main physical theories, extension of our knowledge of nature and for practical applications of fundamental theories. Within this, such theoretical problems arise:

1) development of models for confrontation of theory with experiment in critical situations (i.e. for verification of GR, QED, QCD, GUT or other unified models);

2) setting limits for spacial and temporal variations of FPC. It is becoming especially important now with the idea to introduce new basic units of SI, based completely on FPC.

As to a classification of FPC, we may set them now into four groups according to their generality:

1) Universal constants such as  $\hbar$ , which divides all phenomena into quantum and nonquantum ones (micro- and macro-worlds) and to a certain extent  $c$ , which divides all motions into relativistic and non-relativistic ones;

2) constants of interactions like  $\alpha$ ,  $\theta_w$ ,  $\Lambda_{QCD}$  and  $G$ ;

3) constants of elementary constituencies of matter like  $m_e$ ,  $m_w$ ,  $m_x$ , etc., and

4) transformation multipliers such as  $k$ ,  $I$  and partially  $c$  (conversion from the second to the meter). Soon there may be more after modernization of SI - values of  $\hbar$ ,  $e$ ,  $k$  and  $N_A$  may be fixed with zero uncertainty.

Of course, this division into classes is not absolute. Many constants move from one class to another. Some of the constants ceased to be fundamental (i.e. densities, magnetic moments, etc.) as they are calculated via other FPC.

As to the number of FPC, there are two opposite tendencies: the number of "old" FPC is usually diminishing when a new, more general theory is created, but at the same time new fields of science arise, new processes are discovered in which new constants appear. So, in the long run we may come to some minimal choice which is characterized by one or several FPC, maybe connected with the so-called Planck parameters — combinations of  $c$ ,  $\hbar$  and  $G$  (natural, or Planck system of units [12, 14]):

$$L = \left( \frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} \sim 10^{-33} \text{ cm}, \quad m_L = (c\hbar/2G)^{1/2} \sim 10^{-5} \text{ g}, \quad \tau_L = L/c \sim 10^{-43} \text{ s.} \quad (3.10)$$

The role of these parameters is important since  $m_L$  characterizes the energy of unification of four known fundamental interactions: strong, weak, electromagnetic and gravitational ones, and  $L$  is a scale where the classical notions of space-time loose their meaning. There are other ideas about the final number of FPC (2, 1, or none). All will depend on a future unified theory.

The problem of the gravitational constant  $G$  measurement and its stability is a part of a rapidly developing field, called gravitational-relativistic metrology (GRM). It has appeared due to the growth of measurement technology precision, spread of measurements over large scales and a tendency to the unification of fundamental physical interactions, where main problems arise and are concentrated on the gravitational interaction.

The main subjects of GRM were pointed out in [7]:

- general relativistic models for different astronomical scales: Earth, Solar System, galaxies, cluster of galaxies, cosmology;
- time transfer, VLBI, space dynamics, relativistic astrometry etc.;
- development of generalized gravitational theories and unified models for testing their effects in experiments;
- fundamental physical constants,  $G$  in particular, and their stability in space and time; projects  $\mu$ SCOPE, STEP, SEE etc.;
- fundamental cosmological parameters as FPC: cosmological models studies (quintessence, k-essence, phantom, multidimensional ones), measurements and observations; WMAP, PLANCK, BICEP2 etc.;
- gravitational waves (third generations of detectors, study of sources...); LIGO, VIRGO, LISA, RADIOASTRON,...
- basic standards (clocks) and other modern precision devices (atomic and neutron interferometry, atomic force spectroscopy etc.) in fundamental gravitational experiments, especially in space for testing GR and other theories : rotational, torsional and second order effects (need uncertainty  $10^{-6}$ ), e.g. LAGEOS, Gravity Probe B, ASTROD, LATOR etc.

We are now on the level  $2.3 \cdot 10^{-5}$  in measuring PPN-parameter  $\gamma$  and  $5 \cdot 10^{-4}$  - for  $\beta$ , Brans-Dicke parameter  $\omega > 40000$ . Several future missions are proposed to increase the accuracy of  $\gamma$ .

There are three problems related to  $G$ , which origin lies mainly in unified models predictions: 1) absolute  $G$  measurements, 2) possible time variations of  $G$ , 3) possible range variations of  $G$  – non-Newtonian, or new interactions.

*Absolute measurements of  $G$ .* There are many laboratory determinations of  $G$  with errors of the order  $10^{-3}$  and some are on the level of  $10^{-4}$ .

The most recent and precise  $G$  measurements do not agree with each other and some differ from the CODATA value of 2010:

$$G = 6.67384(80) \cdot 10^{-11} \cdot m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2} \quad (3.11)$$

with relative standard uncertainty  $1.2 \cdot 10^{-4}$ .

So, we see that we are not too far (about two orders) from Cavendish, who obtained value of  $G$  2 centuries ago at the level  $10^{-2}$ . The situation with the measurement of the absolute value of  $G$  is really different from atomic constants values and their uncertainties ( $10^{-8}$ ). This means that either the limit of terrestrial accuracies of defining  $G$  has been reached or we have some new physics entering the measurement procedure [7]. The first means that we should turn to space experiments to measure  $G$  [12, 11], and the second means that a more thorough study of theories, generalizing GR, or unified theories are necessary.

The precise knowledge of  $G$  is necessary, first of all, as it is a FPC; next, for the evaluation of mass of the Earth, planets, their mean density and, finally, for construction of the Earth models; for transition from mechanical to electromagnetic units and back; for evaluation of other constants through relations between them given by unified theories; for finding new possible types of interactions and geophysical effects; for some practical applications like increasing of gradiometers precision, as they demand a calibration by a gravitational field of a standard body depending on  $G$ : high accuracy of their calibration ( $10^{-5}$  -  $10^{-6}$ ) requires the same accuracy of  $G$ .

The knowledge of constants values has not only a fundamental meaning but also a metrological one. The modern system of standards is based mainly on stable physical phenomena. So, the stability of constants plays a crucial role. As all physical laws were established and tested during the last 2-3 centuries in experiments on the Earth and in the near space, i.e. at a rather short space and time intervals in comparison with the radius and age of the Universe, the possibility of slow *variations* of constants (i.e. with the rate less than the evolution of the Universe) cannot be excluded a priori.

So, the assumption of absolute stability of constants is an extrapolation and each time we must test it.

*Time Variations of  $G$ .* The problem of FPC variations arose with the attempts to explain the relations between micro- and macro-world phenomena. Dirac was the first to introduce (1937) the so-called “Large Numbers Hypothesis” which relates some known very big (or very small) numbers with the dimensionless age of the Universe  $T \sim 10^{40}$  (age of the Universe is  $10^{17}$  s, divided by the characteristic elementary particle time  $10^{-23}$  s). He suggested that the ratio of the gravitational to strong interaction strengths,  $Gm_p^2/\hbar c \sim 10^{-40}$ , is inversely proportional to the age of the Universe:  $Gm_p^2/\hbar c \sim T^{-1}$ . Atomic constants seemed to Dirac to be more stable, so he chose the variation of  $G$  as  $T^{-1}$ .

After the original Dirac hypothesis some new ones appeared (Gamov, Teller, Landau, Terazawa, Staniukovich etc., see [4, 12]) and also some generalized theories of gravitation

admitting the variations of an effective gravitational coupling. We may single out three stages in the development of this field:

1. Study of theories and hypotheses with variations of FPC, their predictions and confrontation with experiments (1937-1977).

2. Creation of theories admitting variations of an effective gravitational constant in a particular system of units, analyses of experimental and observational data within these theories [4, 55] (1977-present).

3. Analyses of FPC variations within unified models [1, 5, 7] (present).

Within the development of the first stage from the analysis of the whole set of existed astronomical, astrophysical, geophysical and laboratory data, a conclusion was made [45, 55] that variation of the effective gravitational constant in the atomic system of units does not contradict the available experimental data on the level  $10^{-12} \div 10^{-13} \text{ year}^{-1}$  and in [45, 55] the conception was worked out that variations of constants are not absolute but depend on the system of measurements (choice of standards and units using this or that fundamental interaction). Each fundamental interaction through dynamics, described by the corresponding theory, defines the system of units and the corresponding system of basic standards, e.g. atomic and gravitational (ephemeris) seconds.

There are different astronomical, geophysical and laboratory *data* on possible variations of FPC [12]. But the most strict present data on variations of strong, electromagnetic, gravitational and week interaction constants are the following:

$$\left| \frac{\dot{G}_s}{G_s} \right| < 5 \cdot 10^{-19} \text{ year}^{-1}, \left| \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right| < 10^{-17} \text{ year}^{-1}, \left| \frac{\dot{G}}{G} \right| < 10^{-13} \text{ year}^{-1}, \left| \frac{\dot{G}_F}{G_F} \right| < 2 \cdot 10^{-12} \text{ year}^{-1}. \quad (3.12)$$

Some studies of strong interaction constant and its dependance on the transferred momenta are in [56]. The recent review on variations of  $\alpha$  see in [57].

There appeared some data on a possible variation of  $\alpha$  on the level of  $10^{-16}$  at some  $z$  [58]. Other groups do not support these results. The problem may be that even if they are correct, all these results are mean values of variations at some epoch of the evolution of the Universe (certain  $z$  interval). In essence variations may be different at different epochs and observational data should be analyzed with the account of cosmological model evolution.

Now we still have no unified theory of all four interactions. So it is possible to construct systems of measurements based on any of these four interactions. But practically it is done now on the basis of the mostly worked out theory — on QED. Of course, it may be done also on the basis of the gravitational interaction (as it was partially earlier). Then, different units of basic physical quantities arise based on dynamics of the given interaction, i.e. the atomic (electromagnetic) second, defined via frequency of atomic (or in future nuclear) transitions or the gravitational second defined by the mean Earth motion around the Sun (ephemeris time).

It does not follow from anything that these two seconds are always synchronized in time and space. So, in principal they may evolve relative to each other, for example at the rate of the evolution of the Universe or at some slower rate.

That is why, in general, variations of the gravitational constant are possible in the atomic system of units ( $c, \hbar, m$  are constant, Jordan frame) and masses of all particles — in the gravitational system of units ( $G, \hbar, c$  are constant by definition, Einstein frame). Practically we can test only the first variant since the modern basic standards are

defined in the atomic system of measurements. Possible variations of FPC must be tested experimentally but for this it is necessary to have the corresponding theories admitting such variations.

Mathematically these systems of measurement may be realized as conformally related metric forms. Arbitrary conformal transformations give a transition to an arbitrary system of measurements.

We know that scalar-tensor and multidimensional theories are corresponding frameworks for these variations. So, one of the ways to describe variable gravitational coupling is the introduction of a *scalar field* as an additional variable of the gravitational interaction. It may be done by different means (e.g. Jordan, Brans-Dicke, Canuto, [5] etc). We have suggested a variant of gravitational theory with a conformal scalar field (Higgs-type field [4]) where GR may be considered as a result of spontaneous symmetry breaking of conformal symmetry [4]. In our variant SSB of the global gauge invariance leads to a nonsingular cosmology [59]. Besides, we may get variations of the effective gravitational constant in the atomic system of units and variations of masses in the gravitational system of units. It is done on the basis of approximate [60] and exact cosmological solutions with local inhomogeneity [61].

As to other experimental or observational data, the results are of different quality. The most reliable ones are based on lunar laser ranging and Pitjeva's result (2013) on radar ranging and optical observations. They are less than  $10^{-13}$  per year. Here, once more we see that there is a need for corresponding theoretical and experimental studies. Probably, future space missions like Earth SEE-satellite [10, 11, 12, 14] or missions to other planets and lunar laser ranging will be a decisive step in solving the problem of temporal variations of  $G$  and determining the fate of different theories which predict them. Since the greater is the time interval between successive measurements and, of course, the more precise they are, the more stringent results will be obtained.

As was shown in [1, 5, 62] temporal variations of FPC are connected with each other in *multidimensional models* of unification of interactions. So, experimental tests on  $\dot{\alpha}/\alpha$  may at the same time be used for estimation of  $\dot{G}/G$  and vice versa. Moreover, variations of  $G$  are related also to the cosmological parameters  $\rho$ ,  $\Omega$  and  $q$  which gives opportunities of raising the precision of their determination.

As variations of FPC are closely connected with the behavior of internal scale factors [8], it is a direct probe of properties of extra dimensions and the corresponding unified theories [1, 8, 9]. From this point of view it is an additional test of not only gravity and cosmology, but unified theories of physical interactions as well.

*Non-Newtonian interactions, or range variations of  $G$ .* Nearly all modified theories of gravity and unified theories predict also some deviations from the Newton law (inverse square law, ISL) or composition-dependent violations of the Equivalence Principle (EP) due to appearance of new possible massive particles (partners) [5]. Experimental data exclude the existence of these particles on a very good level at nearly all ranges except less than  $10 \text{ nm}$  and also at *meters and hundreds of meters* ranges. Our analysis of experimental bounds and new limits on possible ISL violation using the new method and modern precession data from satellites, planets, binary pulsar and LLR data were obtained in [63].

In the Einstein theory  $G$  is a true constant. But, if we think that  $G$  may vary with time, then, from a relativistic point of view, it may vary with distance as well. In GR

massless gravitons are mediators of the gravitational interaction, they obey second-order differential equations and interact with matter with a constant strength  $G$ . If any of these requirements is violated, we come in general to deviations from the Newton law with range (or to generalization of GR).

In [6] we analyzed several classes of such theories. In all of them some effective or real masses appear leading to Yukawa - type (or power-law) deviations from the Newton law, characterized by the strength  $\alpha$  and range  $\lambda$ . There exist some model-dependant estimations of these forces.

Some  $p$ -brane models (ADD, braneworlds) also predict non -Newtonian additional interactions of both Yukawa or power - law, in particular in the less than 10nm range, what is intensively discussed nowadays [14, 64]. About PPN parameters for multidimensional models with  $p$ -branes see section 2.

*SEE - Project.* We saw that there are three problems connected with  $G$ . There is a promising multi-purpose space experiment SEE - Satellite Energy Exchange [10, 11], which addresses all these problems and may be more effective in solving them than other laboratory or space experiments.

This experiment is based on a limited 3-body problem of celestial mechanics: small and large masses in a drag-free satellite and the Earth. Unique horse-shoe orbits, which are effectively one-dimensional, are used in it.

The aims of the SEE-project are to measure: Inverse Square law (ISL) and Equivalence Principle (EP) at ranges of meters and the Earth radius,  $G$ -dot and the absolute value of  $G$  with unprecedented accuracies.

We studied many aspects of the SEE-project [11, 12] and the general conclusion is that realization of the SEE-project may improve our knowledge of  $G$ ,  $G$ -dot and  $G(r)$  by 3-4 orders.

Another laboratory variant was suggested in our paper [65] to test possible range variations of  $G$ . It is the experiment on possible detection of new forces, or test of the inverse square law, parameterized by Yukawa-type potential with strength  $\alpha$  and range  $\lambda$ . It was shown that the sensitivity of the method suggested may be on the level of  $\alpha - 10^{-10}$  in the range of  $\lambda - (0.1 - 10^7)m$  in the space of Yukawa parameters  $(\alpha, \lambda)$ .

Our other results on theoretical multidimensional models with variations of  $G$ , FPC, with quantum billiards, solutions with branes and black branes, as well as transition to new SI units, based on FPC, see also in [66, 67], [68], [40, 69], [70, 71] and [54, 57, 72, 73] correspondingly.

## References

- [1] V.N. Melnikov, "Multidimensional Classical and Quantum Cosmology and Gravitation. Exact Solutions and Variations of Constants." CBPF-NF-051/93, Rio de Janeiro, 1993;  
V.N. Melnikov, in: "Cosmology and Gravitation", ed. M. Novello, Editions Frontieres, Singapore, 1994, p. 147.
- [2] V.N. Melnikov, "Multidimensional Cosmology and Gravitation", CBPF-MO-002/95, Rio de Janeiro, 1995, 210 pp.;  
V.N. Melnikov. In: *Cosmology and Gravitation. II*, ed. M. Novello, Editions Frontieres, Singapore, 1996, p. 465.

- [3] V.N.Melnikov. "Exact Solutions in Multidimensional Gravity and Cosmology III."CBPF-MO-03/02, Rio de Janeiro, 2002, 297 pp.
- [4] K.P. Staniukovich and V.N. Melnikov, "Hydrodynamics, Fields and Constants in the Theory of Gravitation", Energoatomizdat, Moscow, 1983, 256 pp. (in Russian). See English translation of first 5 sections in:  
V.N. Melnikov, Fields and Constraints in the Theory of Gravitation, CBPF MO-02/02, Rio de Janeiro, 2002, 145 pp.  
V.N. Melnikov. *Dokl. Acad. Nauk* **246**, N 6, 1351 (1979).
- [5] V.N. Melnikov, *Int. J. Theor. Phys.* **33**, 1569 (1994).
- [6] V. de Sabbata, V.N. Melnikov and P.I. Pronin, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 623 (1992).
- [7] V.N. Melnikov. In: "Gravitational Measurements, Fundamental Metrology and Constants", eds. V. de Sabbata and V.N. Melnikov, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1988, p. 283.
- [8] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, *Nuovo Cimento* **B 102**, 131 (1988).
- [9] K.A. Bronnikov, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, *Nuovo Cimento* **B 102**, 209 (1988).
- [10] A. Sanders and W. Deeds. *Phys. Rev. D* **46**, 480 (1992).
- [11] A.D.Alexeev, K.A.Bronnikov, N.I.Kolosnitsyn, M.Yu.Konstantinov, V.N.Melnikov and A.G.Radynov. *Izmeritel'naya tekhnika*, 1993, N 8, p.6; N 9, p.3; N 10, p.6; 1994, N1, p.3. *Int.J.Mod.Phys.*, 1994, **D 3**, N 4, p.773.  
P.N. Antonyuk, K.A.Bronnikov and V.N.Melnikov. *Astron.Lett.*, 1994, **20**, N 1, p.59.  
*Grav. Cosm.*, 1997, **3**, N 4(12).  
K.A.Bronnikov, M.Yu.Konstantinov and V.N.Melnikov, *Grav. Cosm.*, 1996, **2**, N 4(8), p.361. *Izmerit. Tekhnika*, 1996, N 5, p.3.  
A.D. Alexeev, V.N.Melnikov et al. *Ibid.*, 1997, N 10, p.3. *Grav.Cosm.*, 1999, **5**, N1(17), p.67.  
A.J.Sanders, V.N.Melnikov et al. *Ibid.*, 1997, **3**, p.287. *Meas.Sci.Technol.*, 1999, **10**, p.514. *Class.Quant.Grav.*, 2000, **17**, N 1.  
V.N.Melnikov. *Science in Russia*, 2000, N 6, p.3.
- [12] V.N.Melnikov. Gravity as a Key Problem of the Millennium. Proc.2000 NASA/JPL Conference on Fundamental Physics in Microgravity, NASA Document D-21522, 2001, p.4.1-4.17, Solvang, CA, USA.
- [13] K. A. Bronnikov, V. N. Melnikov, S. G. Rubin and I.V. Svadkovsky. Nonlinear multidimensional gravity and the Australian dipole. *Gen. Relat. Grav.* 2013. V. 45, N 12, C. 2509-2528.
- [14] S.A. Kononogov and V.N. Melnikov, The Fundamental Physical Constants, the Gravitational Constant, and the SEE Space Experiment Project. *Izm. Tekhnika* **6**, 1 (2005) - in Russian; English translation: *Measurement Techniques* **48**, 6, 521 (2005).

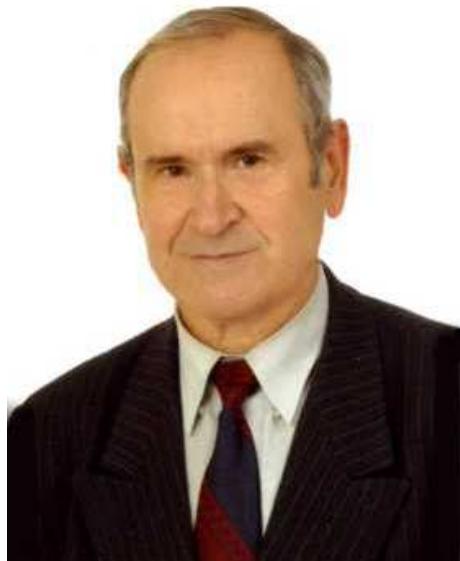
- [15] V.D.Ivashchuk and V.N.Melnikov. Multidimensional cosmological and spherically symmetric solutions with intersecting p-branes. In Lecture Notes in Physics, Vol. 537, "Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology Proceedings of the Second Samos Meeting on Cosmology, Geometry and Relativity held at Pythagoreon, Samos, Greece, 1998, eds: S. Cotsakis, G.W. Gibbons., Berlin, Springer, 2000.
- [16] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Exact solutions in multidimensional gravity with antisymmetric forms, topical review, *Class. Quantum Grav.* **18**, R82-R157 (2001); hep-th/0110274.
- [17] M.A. Grebeniuk, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, "Multidimensional Cosmology for Intersecting  $p$ -branes with Static Internal Spaces", *Grav. & Cosmol.*, **4**, No 2(14), 145 (1998).
- [18] U. Bleyer, V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov and A.I. Zhuk, "Multidimensional Classical and Quantum Wormholes in Models with Cosmological Constant", *Nucl. Phys. B* **429**, 117 (1994).
- [19] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov and A.B. Selivanov, Cosmological solutions in multidimensional model with multiple exponential potential, *JHEP* 0309 (2003) 059.
- [20] J.-M. Alimi, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Non-singular solutions in multidimensional model with scalar fields and exponential potential, *Grav. Cosm.* 2005, v.11, N1-2, p. 111.
- [21] V.R. Gavrilov, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, *J. Math. Phys.* **36**, 5829 (1995).
- [22] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, "Multidimensional Gravity with Einstein Internal Spaces", *Grav. & Cosmol.* **2**, 177 (1996).
- [23] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Multidimensional cosmology with  $m$ -component perfect fluid. *Int. J. Mod. Phys. D* **3** (1994), 795.
- [24] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Intersecting p-Brane Solutions in Multidimensional Gravity and M-Theory, *Grav. and Cosmol.* **2**, No 4, 297-305 (1996).
- [25] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, *Phys. Lett. B* **403**, 23-30 (1997).
- [26] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Sigma-model for the Generalized Composite p-branes, *Class. Quantum Grav.* **14**, 3001-3029 (1997); Corrigenda *ibid.* **15** (12), 3941 (1998).
- [27] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov and M. Rainer, Multidimensional Sigma-Models with Composite Electric p-branes, *Gravit. Cosm.* **4**, No 1(13), 73-82 (1998).
- [28] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Billiard representation for multidimensional cosmology with intersecting p-branes near the singularity. *J. Math. Phys.*, **41**, No 8, 6341-6363 (2000).
- [29] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Multidimensional classical and quantum cosmology with intersecting  $p$ -branes, *J. Math. Phys.*, **39**, 2866-2889 (1998).

- [30] M.A. Grebeniuk, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Integrable Multidimensional Quantum Cosmology for Intersecting p-Branes, *Grav. and Cosmol.* **3**, No 3 (11), 243-249 (1997).
- [31] K.A. Bronnikov, M.A. Grebeniuk, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Integrable Multidimensional Cosmology for Intersecting  $p$ -branes, *Grav. and Cosmol.* **3**, No 2(10), 105-112 (1997).
- [32] V.R. Gavrilov and V.N. Melnikov, Toda Chains with Type  $A_m$  Lie Algebra for Multidimensional Classical Cosmology with Intersecting  $p$ -branes, In : Proceedings of the International seminar "Current topics in mathematical cosmology (Potsdam, Germany , 30 March - 4 April 1998), Eds. M. Rainer and H.-J. Schmidt, World Scientific, 1998, p. 310.
- [33] V.R. Gavrilov and V.N. Melnikov, Toda Chains Associated with Lie Algebras  $A_m$  in Multidimensional Gravitation and Cosmology with Intersecting  $p$ -branes, *Theor. Math. Phys.* **123**, No 3, 374-394 (2000).
- [34] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov and A.B. Selivanov, Composite S-brane solutions on product of Ricci-flat spaces, *GRG*, v.36, issue 7, 1593, 2004.
- [35] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov and S.-W. Kim, S-brane solutions with acceleration, in models with forms and multiple exponential potential, *Grav. & Cosm.* 2004, v. 10, N 1-2, pp. 141-148.
- [36] H. Dehnen, V.R. Gavrilov and V.N. Melnikov, General solutions for a flat Friedmann universe filled with a perfect fluid and a scalar field with an exponential potential, *Grav. Cosmol.*, **8**, 4 (32), (2003), p. 189-195.
- [37] V.R. Gavrilov, V.N. Melnikov and S.T. Abdyrakhmanov, Flat Friedmann Universe filled by dust and scalar field with multiple exponential potential, *Gen. Rel. Gravit.*, (2004), v.36, issue 7, 1579-1592.
- [38] H. Dehnen, V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov, Billiard representation for multidimensional multi-scalar cosmological model with exponential potentials, *GRG*, v.36, issue 7, 1563-1578, 2004.
- [39] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov Billiard Representation for Multidimensional Cosmology with Multicomponent Perfect Fluid near the Singularity. *Clas.Quant.Grav.*, 1995, v.12, N3, p.809.
- [40] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov, Quantum billiards in multidimensional models with branes. *Europ. Phys. J.* 2014, Iss. 3, 2805, P. 1-15.
- [41] V.N. Melnikov and V.R. Gavrilov, 2-component cosmological models with perfect fluid: exact solutions. In: The Gravitational Constant: Generalized Gravitational Theories and Experiments, V. de Sabbata, G.Gillies and V.N. Melnikov eds., 2004, Kluwer Academic Publishers, p. 247-268.
- [42] V.R. Gavrilov and V.N. Melnikov, D-dimensional integrable 2-component viscous cosmology, *Grav. Cosmol.*, **7**, No 4, (2001), 301-307.

- [43] V.R. Gavrilov and V.N. Melnikov, Modern trends in multidimensional gravity and cosmology, In: Advances in the Interplay Between Quantum and Gravity Physics, P.G. Bergmann and V. de Sabbata (eds.), Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 285-315.
- [44] J.-M. Alimi, V. R. Gavrilov and V. N. Melnikov, Multicomponent perfect fluid with variable parameters in n Ricci-flat spaces, Proceedings of ICGA6, 6-9 October 2003, Seoul, Korea *J. Korean Phys. Soc.* 2004, v.44, p. S148.
- [45] N.A. Zaitsev and V.N. Melnikov. In: PGEPT, 1979, v.10, p.131.
- [46] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov. On Time Variations of Gravitational and Yang-Mills Constants in Cosmological Model of Superstring Origin. *Grav. Cosmol.*, **20**, No 1 (2014) 26-29.
- [47] K.A. Bronnikov, V.N. Melnikov and M. Novello. Possible time variations of G in scalar-tensor theories of gravity. *Gravit. Cosm.*, 2002, v.8, Suppl.II, p.18-21.
- [48] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov. Problems of G and Multidimensional Models. In Proc. JGRG11, Eds. J. Koga et al., Waseda Univ., Tokyo, 2002, pp. 405-409.
- [49] H. Dehnen, V.D. Ivashchuk, S.A.Kononogov and V.N. Melnikov. On time variation of G in multidimensional models with two curvatures. *Grav. Cosm.*, v.11, N4.
- [50] V.N. Melnikov. Time Variations of G in Different Models. Proc. 5 Int. Friedmann Seminar, Joao Pessoa, Brazil. *Int.J.Mod.Phys.A*, 2002, 17, 4325-4334.
- [51] J.-M. Alimi, V.D. Ivashchuk, S.A. Kononogov, V.N. Melnikov. Multidimensional cosmology with anisotropic fluid: acceleration and variation of G. *Grav.Cosmol.* **12** (2006) 173-178.
- [52] V.D. Ivashchuk, S.A. Kononogov, V.N. Melnikov, M.Novello. Non-singular solutions in multidimensional cosmology with a perfect fluid: acceleration and variation of G. *Grav.Cosmol.* **12** (2006) 273-278.
- [53] J.-M. Alimi, V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov. S-brane solution with acceleration and small enough variation of G. *Grav.Cosmol.* **13** (2007).
- [54] V.N. Melnikov. Multidimensional Cosmology, Constants and Transition to New SI Units. *Int. J. Mod. Phys. A* **26** (2011) 3788-3800.
- [55] V.N. Melnikov and K.P. Staniukovich. In: “Problems of Gravitation and Elementary Particle Theory (PGEPT)”, Atomizdat, Moscow, 1978, v.9, p.3 (in Russian).
- [56] V.V. Khruschev, S.A. Kononogov, V.N. Melnikov. *Izmeritel'naya Technika*, 2007, N3.
- [57] K.A. Bronnikov and V.N. Melnikov. Fundamental Constants and Transition to New Definitions of SI. Units. *Izmerit. Tekhn.* **N11** (2010) 3.
- [58] J. Webb et al., *Phys. Rev. Lett.* 87, 091301 (2001).
- [59] V.N. Melnikov and S.V. Orlov, *Phys.Lett.* **70 A**, N4, 263 (1979).
- [60] V.N. Melnikov and A.G. Radynov. In: PGEPT, 1984, v.14, p.73.

- [61] V.N. Melnikov and A.G. Radynov. In: “On Relativity Theory”, Singapore, WS, 1985, v.2, p.196.
- [62] V.N. Melnikov. In: “Results of Science and Technology. Gravitation and Cosmology”. Ed.: V.N. Melnikov, 1991, v.1, p.49 (in Russian).
- [63] N.I. Kolosnitsyn and V.N. Melnikov. Test of Inverse Square Law Through Precession of Orbits. *GRG*, v.36, issue 7, 1619-1624, 2004.
- [64] K.A. Bronnikov, S.A. Kononogov, V.N. Melnikov. Brane world corrections to Newton’s law. *GRG*, 38 (2006) 1215-1232.
- [65] N.I. Kolosnitsyn, S.A. Kononogov, V.N. Melnikov. *Izmeritel’naya Technika*, 2007, N4.
- [66] V.N. Melnikov. FPC and Theoretical Models for Time Variation of G; *Progr. Theor. Phys.*, Suppl., Japan, N 172, (2008) 182-191.
- [67] V.N. Melnikov. Models of G Time Variations in Diverse Dimensions. *Frontiers of Physics* **4** (2009) 75-93.
- [68] V.N. Melnikov. Multidimensional Cosmology and Fundamental Constants. *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 1473-1480.
- [69] V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov. On the billiard approach in multidimensional cosmological models. *Grav. Cosmol.* **15** (2009) 49-58.
- [70] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov. On Brane Solutions Related to Non-Singular Kac-Moody Algebras. *SIGMA* **5** (2009) 070.
- [71] V.D. Ivashchuk and V.N. Melnikov. Multidimensional gravity, flux and black brane solutions governed by polynomials. *Grav. Cosmol.* **20**, N 3 (2014).
- [72] V.N. Melnikov. Fundamental Physics and Fundamental Metrology. *Mir Izmereniy* **N1** (2011) 7-19.
- [73] V.D. Ivashchuk, S.A. Kononogov, V.N. Mel’nikov. Results of Measuring the Avogadro and Planck Constants for a Redefinition of the Kilogram and Mole. *Measurement Techniques* **57**, 2014, Iss. 2, P. 125-131.

**А.В. Минкевич. Калибровочный подход в  
теории тяготения, гравитационное  
взаимодействие и релятивистская  
космология**



**Professor A. V. Minkevich:** Gravitational Interaction and  
physical spacetime geometry  
Belarussian State University; Warmia and Mazury University in  
Olsztyn

**Аннотация.** Рассматривается трактовка гравитационного взаимодействия на основе принципа локальной калибровочной инвариантности. Обсуждается место и физическая значимость Пуанкаре калибровочной теории тяготения в рамках калибровочного подхода в теории гравитационного взаимодействия. Рассматривается изотропная космология, построенная на основе Пуанкаре калибровочной теории тяготения. Обсуждаются важнейшие физические следствия, связанные с изменением характера гравитационного взаимодействия, с возможным существованием предельной плотности энергии и гравитационным отталкиванием в экстремальных условиях, а также с вакуумным эффектом гравитационного отталкивания.

**ключевые слова:** пространство Римана-Картана, кручение, космологическая сингулярность, темная энергия

## 2.1 Введение

В основе современной теории гравитационного взаимодействия лежит общая теория относительности (ОТО) Эйнштейна. Согласно ОТО учет гравитационного взаимодействия приводит к более сложным метрическим свойствам физического пространства - времени, образующего 4-мерный псевдо-риманов континуум. ОТО дает адекватное описание различного рода систем и физических явлений в астрофизике и астрономии, включая наблюдаемую Вселенную как целое. В то же время ОТО сталкивается с некоторыми принципиальными трудностями, появляющимися в определенных условиях при описании гравитирующих систем.

Гравитационное поле, описываемое в ОТО с помощью метрического тензора физического пространства-времени на основе уравнений тяготения Эйнштейна, имеет в качестве своего источника тензор энергии-импульса гравитирующей материи. В случае обычной материи с положительными значениями плотности энергии и давления, гравитационное взаимодействие в рамках ОТО имеет характер притяжения, увеличивающегося с ростом плотности энергии. В конечном итоге это и является причиной появления сингулярных состояний в космологических моделях Большого Взрыва и черных дыр. Наличие в начале стадии расширения в различного рода космологических моделях сингулярного состояния с расходящейся плотностью энергии и сингулярной метрикой ведет к проблеме начала Вселенной во времени - проблеме космологической сингулярности. Следует заметить, что хотя в рамках ОТО гравитационное взаимодействие может иметь характер отталкивания в случае гравитирующей материи с отрицательным давлением (например, скалярные поля в инфляционных моделях), проблема космологической сингулярности не может быть решена в ОТО на основе рассмотрения таких систем: несмотря на появление некоторых регулярных решений, большинство космологических моделей остаются сингулярными.

Другая принципиальная проблема ОТО связана с введением темных составляющих материи с целью объяснения наблюдательных космологических и астрофизических данных. Их объяснение в рамках ОТО приводит к выводу, что около 96% энергии во Вселенной связано с некоторыми гипотетическими видами материи - темной энергией и темной материи, а вклад в энергию обычной барионовой материи составляет лишь около 4%. В результате нынешняя ситуация в космологии и в целом в теории гравитации подобна ситуации, сложившейся в физике в начале XX века, когда было введено понятие эфира с целью объяснения различного рода электромагнитных явлений. Как известно, создание специальной теории относительности позволило решить соответствующие проблемы без использования понятия эфира.

Предпринималось множество попыток с целью решения указанных выше проблем как в рамках ОТО и существующих теорий, претендующих на роль квантовой теории гравитации - теории струн/М-теории и петлевой квантовой теории гравитации, так и различных обобщений Эйнштейновской теории тяготения (см. напр. [1, 2]). Радикальные идеи, связанные с такими понятиями, как струны, дополнительные пространственные измерения, квантование пространства-времени и т.д., использовались в этих работах. Различные гипотетические поля и частицы с необычными свойствами как возможные кандидаты, претендующие на роль темной энергии и темной материи, обсуждались в литературе. Следует при этом заметить, что многие обобщения Эйнштейновской теории тяготения базируются на вводимых *ad hoc* гипотезах и не имеют под собой солидной теоретической базы.

В то же время существует теория тяготения, построенная на основе общепринятых теоретико-полевых принципов, включая принцип локальной калибровочной инвариантности, являющаяся естественным обобщением ОТО и открывающая возможности для решения ее принципиальных проблем. Это Пуанкаре калибровочная теория тяготения (ПКТТ) - теория тяготения в 4-мерном физическом пространстве-времени, имеющем структуру континуума Римана-Картана  $U_4$ . В рамках калибровочного подхода в теории гравитационного взаимодействия ПКТТ является непосредственным и в определенном смысле необходимым обобщением теории тяготения Эйнштейна.

## 2.2 Калибровочный подход в теории гравитации и ПКТТ

Принцип локальной калибровочной инвариантности лежит в основе современной теории фундаментальных физических взаимодействий. Данный принцип устанавливает глубокую связь между важнейшими сохраняющимися величинами, существование которых связано согласно теореме Нетер с инвариантностью теории относительно соответствующих групп преобразований, и фундаментальными (калибровочными) физическими полями, имеющими в качестве источников соответствующие сохраняющиеся величины и выступающими в качестве носителей определенных физических взаимодействий. В соответствии с теорией Янга-Миллса схема введения калибровочных полей прозрачна и не вызывает вопросов в случае групп внутренней симметрии в пространстве Минковского, рассматриваемых в теории электрослабого и сильно-го взаимодействий. Ситуация меняется при переходе к гравитационному взаимодействию, в случае которого калибровочная группа оказывается связанный с координатными преобразованиями и в процессе локализации группы меняется геометрическая структура пространства-времени <sup>1</sup>. На самом деле, если тензор энергии-импульса рассматривать как источник поля тяготения (именно такова ситуация в метрической теории тяготения), гравитационное взаимодействие следует вводить на основе локализации 4-параметрической группы трансляций в пространстве Минковского, инвариантность относительно которой и приводит к введению тензора энергии-импульса и к законам сохранения энергии и импульса. Именно таким путем поле тяготения как симметричное тензорное поле 2-го ранга впервые было введено в статье [4]. Введенное калибровочное поле связывалось с метрическим тензором пространства-времени, имеющего структуру псевдо-риманова континуума. Таким образом, локализация 4-параметрической группы трансляций приводит к теории, ковариантной относительно

<sup>1</sup>Обсуждение соответствующих вопросов содержится в [3].

общих координатных преобразований и представляющей собой метрическую теорию тяготения, которая при соответствующем выборе гравитационного лагранжиана сводится к теории тяготения Эйнштейна. В статье [5] поле тяготения также было введено на основе локализации 4-параметрической группы трансляций, при этом калибровочное поле представлялось как совокупность четырех векторных полей, связанных с ортонормированной тетрадой; соответствующая теория представляет собой теорию тяготения в пространстве абсолютного параллелизма (телепараллелизма). Позднее поле тяготения как калибровочное поле, связанное с 4-параметрической группой трансляций, рассматривалось в работе [6].

Рассмотрим вопрос о роли группы Лоренца в теории тяготения, вводимой на основе локализации 4-параметрической группы трансляций. Речь идет о группе тетрадных лоренцевых преобразований, не связанной с преобразованием координат и присутствующей в теории при наличии в каждой точке пространства-времени ортонормированной тетрады. Поскольку метрический тензор  $g_{\mu\nu}$ , связанный с ортонормированной тетрадой  $h^i_{\mu}$  по формуле  $g_{\mu\nu} = \eta_{ik} h^i_{\mu} h^i_{\nu}$  ( $\eta_{ik} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  - метрический тензор пространства-времени Минковского, греческие и латинские индексы используются для обозначения голономных и неголономных координат соответственно) инвариантен относительно тетрадных лоренцевых преобразований с произвольными параметрами, тетрадная формулировка метрической теории тяготения, получаемая в результате введения ортонормированной тетрады в каждой точке пространства-времени, инвариантна относительно локализованной группы Лоренца. Это означает, что группа тетрадных лоренцевых преобразований в рамках метрической теории тяготения не играет динамической роли с точки зрения калибровочного подхода. С этим связано также обращение в нуль инварианта Нетер, соответствующего группе Лоренца, в метрической теории тяготения [7]. Что же касается теории тяготения в пространстве абсолютного параллелизма, то данная теория ковариантна лишь относительно тетрадных лоренцевых преобразований с постоянными во всем пространстве параметрами и, с точки зрения калибровочного подхода, представляет собой промежуточный этап на пути построения теории, ковариантной относительно локализованной группы Лоренца. Переход к такой теории достигается благодаря введению калибровочного лоренцева поля, имеющего трансформационные свойства неголономной лоренцевой связности [8]. Трактовка данного поля как независимого динамического поля приводит к теории тяготения в пространстве Римана-Картана, известной в литературе как Пуанкаре калибровочная теория тяготения (Poincaré gauge theory of gravity).

Примечательно, что впервые попытка трактовки гравитационного взаимодействия на основе принципа локальной калибровочной инвариантности была предпринята Р. Утиямой в 1956 году вскоре после построения теории полей Янга-Миллса [8]. В качестве калибровочной группы при этом рассматривалась группа Лоренца. Утияма ввел калибровочное лоренцево поле, и поскольку трансформационные свойства неголономной лоренцевой связности одинаковы в пространстве Римана и в пространстве Римана-Картана, Утияма смог получить гравитационные уравнения Эйнштейна, отождествляя калибровочное лоренцево поле с коэффициентами вращения Риччи риманова пространства. Однако, как было отмечено в статьях [9, 10], подобное отождествление не допустимо, если калибровочное лоренцево поле трактовать как независимое динамическое поле. Кроме того, трактовка поля тяготения как калибровочного поля, соответствующего группе Лоренца, не последовательна, если принять

во внимание соответствие между калибровочными полями и их источниками.

Принципиальная значимость ПКТТ в рамках калибровочного подхода в теории гравитационного взаимодействия определяется той ролью, которую играет группа Лоренца в современной физике. Инвариантность теории относительно группы тетрадных лоренцевых преобразований фактически означает, что локально метрические свойства физического пространства-времени такие же, как и пространства-времени Минковского. Помимо метрических свойств физическое пространство-время обладает свойствами, связанными с наличием кручения у лоренцевой связности, выступающей как фундаментальное физическое поле. Совместно с тетрадой  $h^i_\mu$  неголомная лоренцева связность  $A^{ik}_\mu = -A^{ki}_\mu$  играют роль независимых переменных поля тяготения. Соответствующие им напряженности - это тензоры кручения  $S^i_{\mu\nu}$  и кривизны  $F^{ik}_{\mu\nu}$ . Тензор кривизны, являясь напряженностью, соответствующей группе тетрадных лоренцевых преобразований, определяется подобно напряженности калибровочного янг-миллсовского поля. В отличие от кривизны, тензор кручения, будучи напряженностью, соответствующей подгруппе пространственно-временных трансляций, является функцией не только тетрад и их производных, но также калибровочного лоренцева поля (см. ниже), что является отличительной особенностью калибровочной теории, связанной с координатными преобразованиями. Лагранжиан гравитационного поля представляет собой инвариант, построенный из тензоров кривизны и кручения (а также тетрады или метрики). В случае минимальной связи материи с гравитационным полем, определяемой с помощью замены в лагранжиане материи, записанном в пространстве Минковского (в прямоугольной декартовой системе координат инерциальной системы отсчета), частных производных материальных переменных на ковариантные производные, определяемые с помощью полной связности пространства Римана-Картана, в роли источников поля тяготения в гравитационных уравнениях ПКТТ выступают тензор энергии-импульса и тензор спинового момента гравитирующей материи. Простейшая ПКТТ - теория Эйнштейна-Картана - соответствует выбору гравитационного лагранжиана в виде скалярной кривизны пространства-времени  $U_4$ . Большой вклад в исследование теории Эйштейна-Картана в связи с попытками решения проблемы космологической сингулярности был внесенпольскими физиками (см. [11]. В случае бесспиновой материи гравитационные уравнения теории Эйнштейна-Картана сводятся к уравнениям тяготения Эйнштейна, в случае материи со спином теория Эйнштейна-Картана приводит к линейной связи между кручением пространства-времени и спиновым моментом. Данное обстоятельство послужило причиной широко распространенного в литературе мнения, что кручение порождается спином, а в случае бесспиновой материи должно исчезать. В действительности же данное обстоятельство скорее свидетельствует о вырожденном характере теории Эйштейна-Картана, если учесть, что тензор кручения представляет собой напряженность поля тяготения, соответствующую подгруппе пространственно-временных трансляций и непосредственно связанную с тензором энергии-импульса гравитирующей материи. При включении в гравитационный лагранжиан ПКТТ, подобно теории Янга-Миллса, квадратичных относительно напряженностей инвариантов ситуация нормализуется, и ПКТТ представляет собой теорию тяготения, в рамках которой гравитационное поле описывается посредством взаимодействующих между собой метрики и кручения, источниками которого являются тензор энергии-импульса и тензор спинового момента гравитирующей материи.

Существуют различного рода возможности обобщения ПКТТ, связанные с рас-

смотрением вместо группы Лоренца других более общих групп, - конформная калибровочная теория, (анти-) де-Ситтеровская калибровочная теория. Весьма общая теория - это аффинно-метрическая калибровочная теория тяготения, в рамках которой связность обладает наряду с кручением также и неметричностью. При соответствующих ограничениях неметричности имеет место теория в пространстве Вейля-Картана. По сравнению с указанными выше теоретически возможными построениями калибровочной теории тяготения принципиальная значимость ПКТТ определяется фундаментальной ролью группы Лоренца в физике, и прежде всего в теории фундаментальных физических взаимодействий.

Большой вклад в развитие ПКТТ внесли работы российских исследователей – проф. Д.Д. Иваненко с его учениками, проф. В.Н. Пономарева и его группы, Б.Н. Фролова и др., а также зарубежных ученых – T.W.B Kibble, D.W. Sciama, F.W. Hehl, J. Nester, M. Blagojević, K. Hayashi, T. Shirafuji и др. (см. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]).

## 2.3 Гравитационные уравнения ПКТТ, принцип соответствия ПКТТ теории тяготения Эйнштейна

Как отмечалось выше, в рамках ПКТТ роль гравитационных переменных играют ортонормированная тетрада  $h^i_\mu$  и неголомная лоренцева связность  $A^{ik}_\mu = -A^{ki}_\mu$ , а соответствующие им напряженности - это тензор кручения  $S^i_{\mu\nu}$  и тензор кривизны  $F^{ik}_{\mu\nu}$ , определяемые как

$$S^i_{\mu\nu} = \partial_{[\nu} h^i_{\mu]} - h_{k[\mu} A^{ik}_{\nu]},$$

$$F^{ik}_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A^{ik}_{\nu]} + 2A^{il}_{[\mu} A^k_{|l|\nu]}$$

Структура гравитационных уравнений ПКТТ зависит от выбора гравитационного лагранжиана  $\mathcal{L}_g$ . Поскольку в пространстве  $U_4$  можно построить ряд инвариантов, квадратичных по кривизне и кручению, мы будем использовать достаточно общее выражение  $\mathcal{L}_g$ , содержащее помимо скалярной кривизны всевозможные квадратичные инварианты с неопределенными параметрами, предполагающие сохранение пространственной четности

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & f_0 F + F^{\alpha\beta\mu\nu} (f_1 F_{\alpha\beta\mu\nu} + f_2 F_{\alpha\mu\beta\nu} + f_3 F_{\mu\nu\alpha\beta}) \\ & + F^{\mu\nu} (f_4 F_{\mu\nu} + f_5 F_{\nu\mu}) + f_6 F^2 \\ & + S^{\alpha\mu\nu} (a_1 S_{\alpha\mu\nu} + a_2 S_{\nu\mu\alpha}) + a_3 S^\alpha_{\mu\alpha} S_\beta^{\mu\beta}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F_{\mu\nu} = F^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ ,  $F = F^\mu_\mu$ ,  $f_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ),  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) - неопределенные параметры,  $f_0 = (16\pi G)^{-1}$ ,  $G$  - ньютоновская гравитационная постоянная (скорость света в вакууме  $c = 1$ ). Гравитационные уравнения, вводимые на основе интеграла действия  $I = \int (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) h d^4x$ , где  $h = \det(h^i_\mu)$  и  $\mathcal{L}_m$  - лагранжиан гравитирующей материи, содержат систему 16+24 уравнений, соответствующих гравитационным пе-

ременным  $h^i_\mu$  и  $A^{ik}{}_\mu$ :

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu U_i^{\mu\nu} + 2S^k{}_{i\nu} U_k{}^{\mu\nu} + 2(f_0 + 2f_6 F)F^\mu{}_i \\ & + 4f_1 F_{klm} F^{kl\mu m} + 4f_2 F^{k[m\mu]l} F_{klm} \\ & + 4f_3 F^{\mu klm} F_{lmik} + 2f_4 (F_{ki} F^{k\mu} + F^\mu{}_{kim} F^{km}) \\ & + 2f_5 (F_{ki} F^{\mu k} + F^\mu{}_{kim} F^{mk}) - h_i{}^\mu \mathcal{L}_g = -T_i{}^\mu, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & 4\nabla_\nu [(f_0 + 2f_6 F)h_{[i}{}^\nu h_{k]}{}^\mu + f_1 F_{ik}{}^{\nu\mu} \\ & + f_2 F_{[i}{}^{[\nu}{}_{k]}{}^\mu] + f_3 F^{\nu\mu}{}_{ik} + f_4 F_{[k}{}^{[\mu} h_{i]}{}^{\nu]} + \\ & + f_5 F^{[\mu}{}_{[k} h_{i]}{}^{\nu]}] + U_{[ik]}{}^\mu = J_{[ik]}{}^\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $U_i^{\mu\nu} = 2(a_1 S_i^{\mu\nu} - a_2 S^{[\mu\nu]}{}_i - a_3 S_\alpha{}^{\alpha[\mu} h_i{}^{\nu]})$ ,  $T_i{}^\mu = -\frac{1}{h} \frac{\delta(h\mathcal{L}_m)}{\delta h^i{}_\mu}$ ,  $J_{[ik]}{}^\mu = -\frac{1}{h} \frac{\delta(h\mathcal{L}_m)}{\delta A^{ik}{}_\mu}$ ,  $\nabla_\nu$  означает ковариантный оператор, имеющий структуру ковариантной производной, определяемой в случае голономных тензорных индексов с помощью коэффициентов Кристоффеля, а в случае тетрадных тензорных индексов - с помощью неголономной лоренцевой связности  $A^{ik}{}_\nu$ . Гравитационные уравнения ПКТТ (2)-(3) представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с неопределенными параметрами  $f_i$  и  $a_k$ . Физические следствия, получаемые на основе решения уравнений (2)-(3), существенно зависят от ограничений, накладываемых на параметры  $f_i$  и  $a_k$ . Некоторые ограничения на эти параметры были получены на основе исследования изотропной космологии, построенной в рамках изучаемой ПКТТ.

С целью установления выполнения принципа соответствия ПКТТ теории тяготения Эйнштейна рассмотрим гравитационные уравнения (2)-(3) в линейном приближении по полю. В соответствии с [18] уравнения (2) с учетом (3) в линейном приближении по метрике и кручению не содержат высших производных метрических функций при выполнении следующих ограничений

$$\begin{aligned} a &= 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 0, \\ 4(f_1 + \frac{f_2}{2} + f_3) + f_4 + f_5 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При наложении условий (4) уравнения для функций  $h_{\mu\nu}$  ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ) принимают вид

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2f_0} T_{\mu\nu}^{sym} + \alpha(\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) T, \quad (5)$$

где  $G_{\mu\nu}^{(1)}$  - тензор Эйнштейна в линейном приближении относительно  $h_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  - канонический тензор энергии-импульса в пространстве Минковского,  $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}^{sym}$  - симметризованный тензор энергии-импульса, определяемый обычным образом через  $T_{\mu\nu}$  и тензор спинового момента,  $\square$  - оператор Даламбера, а параметр  $\alpha = \frac{f}{3f_0^2}$ , где  $f = f_1 + \frac{f_2}{2} + f_3 + f_4 + f_5 + 3f_6 > 0$ , имеет размерность, обратную размерности плотности энергии. В силу (5) уравнения ПКТТ в линейном приближении практически совпадают с уравнениями тяготения Эйнштейна при выполнении условия  $\alpha T \ll 1$ . Данное условие ограничивает допустимые значения плотности энергии, если величина  $\alpha^{-1}$  соответствует экстремально большим плотностям энергии. Именно такая ситуация

имеет место в рамках изотропной космологии, базирующейся на однородных изотропных моделях (ОИМ) с одной функцией кручения, где параметр  $\alpha$  определяет шкалу предельной плотности энергии [19, 27]. Заметим, что первое из условий (4) было введено в рамках изотропной космологии с целью исключения высших производных метрики в космологических уравнениях.

Соответствие ПКТТ теории тяготения Эйнштейна в линейном приближении означает, что локально эти теории приводят к идентичным результатам, за исключением систем с экстремально большими плотностями энергии (например, массивных звезд, коллапсирующих в рамках ОТО). Однако, в нелинейном режиме в космологических и астрофизических масштабах выводы ПКТТ и ОТО могут существенно различаться между собой. Данное различие продемонстрировано ниже на примере изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ.

## 2.4 ПКТТ и изотропная космология

### 2.4.1 Структура тензоров кручения и кривизны в однородном изотропном пространстве

Симметрия пространств (однородные изотропные модели – ОИМ), лежащих в основе изотропной космологии, задается набором шести линейно независимых векторов Киллинга (см. напр. [20]). Тогда в соответствии с уравнениями Киллинга метрика пространства-времени в сопутствующей системе отсчета представляет собой метрику Робертсона-Уолкера, имеющую в сферической системе координат следующий вид

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(1, -\frac{R^2}{1-kr^2}, -R^2r^2, -R^2r^2\sin^2\theta\right), \quad (6)$$

где  $R(t)$  - масштабный фактор метрики Робертсона-Уолкера, а  $k = 0, +1, -1$  для плоских, закрытых и открытых моделей соответственно.

Структура тензора кручения для ОИМ, определяемая из требования обращения в нуль производной Ли относительно векторов Киллинга, задается двумя функциями времени  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$ , определяющими следующие неисчезающие компоненты тензора кручения [21, 22] (с голономными индексами):

$$S^1{}_{10} = S^2{}_{20} = S^3{}_{30} = S_1(t), \quad S_{123} = S_{231} = S_{312} = S_2(t) \frac{R^3r^2}{\sqrt{1-kr^2}} \sin\theta \quad (7)$$

Задавая тетраду, отвечающую метрике Робертсона-Уолкера (6) в диагональном виде, и используя (7), находим компоненты лоренцевой связности и следующие неисчезающие тетрадные компоненты тензора кривизны, обозначаемые значком  $\hat{\phantom{A}}$ :

$$\begin{aligned} F^{\hat{0}\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{1}} &= F^{\hat{0}\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = F^{\hat{0}\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{3}} \equiv A_1, & F^{\hat{1}\hat{2}}{}_{\hat{1}\hat{2}} &= F^{\hat{1}\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{3}} = F^{\hat{2}\hat{3}}{}_{\hat{2}\hat{3}} \equiv A_2, \\ F^{\hat{0}\hat{1}}{}_{\hat{2}\hat{3}} &= F^{\hat{0}\hat{2}}{}_{\hat{3}\hat{1}} = F^{\hat{0}\hat{3}}{}_{\hat{1}\hat{2}} \equiv A_3, & F^{\hat{3}\hat{2}}{}_{\hat{0}\hat{1}} &= F^{\hat{1}\hat{3}}{}_{\hat{0}\hat{2}} = F^{\hat{2}\hat{1}}{}_{\hat{0}\hat{3}} \equiv A_4, \end{aligned}$$

$$A_1 = \dot{H} + H^2 - 2HS_1 - 2\dot{S}_1, \quad A_2 = \frac{k}{R^2} + (H - 2S_1)^2 - S_2^2, \quad A_3 = 2(H - 2S_1)S_2, \quad A_4 = \dot{S}_2 + HS_2, \quad (8)$$

где  $H = \dot{R}/R$  - параметр Хаббла, а точка означает дифференцирование по времени.

### 2.4.2 Обобщение космологических уравнений Фридмана, уравнения для функций кручения ОИМ

Система гравитационных уравнений (2)-(3) для ОИМ сводится к системе 4 дифференциальных уравнений [23]:

$$a(H - S_1)S_1 - 2bS_2^2 - 2f_0A_2 + 4f(A_1^2 - A_2^2) + 2q_2(A_3^2 - A_4^2) = -\frac{\rho}{3}, \quad (9)$$

$$a(\dot{S}_1 + 2HS_1 - S_1^2) - 2bS_2^2 - 2f_0(2A_1 + A_2) - 4f(A_1^2 - A_2^2) - 2q_2(A_3^2 - A_4^2) = p, \quad (10)$$

$$f[\dot{A}_1 + 2H(A_1 - A_2) + 4S_1A_2] + q_2S_2A_3 - q_1S_2A_4 + \left(f_0 + \frac{a}{8}\right)S_1 = 0, \quad (11)$$

$$q_2[\dot{A}_4 + 2H(A_4 - A_3) + 4S_1A_3] - 4fS_2A_2 - 2q_1S_2A_1 - (f_0 - b)S_2 = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 2a_1 + a_2 + 3a_3, & b &= a_2 - a_1, \\ f &= f_1 + \frac{f_2}{2} + f_3 + f_4 + f_5 + 3f_6, \\ q_1 &= f_2 - 2f_3 + f_4 + f_5 + 6f_6, & q_2 &= 2f_1 - f_2, \end{aligned}$$

$\rho$  – плотность энергии,  $p$  – давление, а среднее значение спинового момента материи предполагается равным нулю.

Система гравитационных уравнений для ОИМ (9)-(12) позволяет вывести обобщение космологических уравнений Фридмана, а также уравнения для функций кручения  $S_1$  и  $S_2$ . При этом будем использовать тождества Бианки для 4-мерного пространства-времени Римана-Картана

$$B^{\sigma ik} = \varepsilon^{\sigma\lambda\mu\nu} \nabla_\lambda F^{ik}_{\mu\nu} = 0, \quad (13)$$

принимающие в случае ОИМ следующий вид:

$$\dot{A}_2 + 2H(A_2 - A_1) + 4S_1A_1 + 2S_2A_4 = 0, \quad \dot{A}_3 + 2H(A_3 - A_4) + 4S_1A_4 - 2S_2A_1 = 0. \quad (14)$$

Без наложения ограничений на неопределенные параметры  $a, b, f, q_1, q_2$  система уравнений (9)-(12) с использованием тождеств Бианки приводит к следующим выражениям функций кривизны  $A_1$  и  $A_2$  [24]

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{12(f_0 + a/8)Z} \left\{ \rho + 3p - \frac{2f}{3}F^2 + 8q_2FS_2^2 \right. \\ &\quad \left. - 12q_2 \left[ \left( HS_2 + \dot{S}_2 \right)^2 + 4 \left( \frac{k}{R^2} - S_2^2 \right) S_2^2 \right] - \frac{3a}{2}(\dot{H} + H^2) \right\}, \\ A_2 &= \frac{1}{6(f_0 + a/8)Z} \left\{ \rho - 6(b + a/8)S_2^2 + \frac{f}{3}F^2 + \frac{3a}{4} \left( \frac{k}{R^2} + H^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 6q_2 \left[ \left( HS_2 + \dot{S}_2 \right)^2 + 4 \left( \frac{k}{R^2} - S_2^2 \right) S_2^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где скалярная кривизна

$$F = \frac{1}{2(f_0 + a/8)} \left[ \rho - 3p - 12(b + a/8)S_2^2 + \frac{3a}{2} \left( \frac{k}{R^2} + \dot{H} + 2H^2 \right) \right], \quad (16)$$

а  $Z = 1 + \frac{1}{(f_0+a/8)} \left( \frac{2f}{3} F - 4q_2 S_2^2 \right)$ . Тогда обобщение космологических уравнений Фридмана мы получим, подставляя в определение (8) функций  $A_1$  и  $A_2$  их выражения (15), полученные из гравитационных уравнений для ОИМ. Данные уравнения содержат функции кручения  $S_1$  и  $S_2$ , которые могут быть получены из гравитационных уравнений при использовании тождеств Бианки (14) и определения функций  $A_3$  и  $A_4$ . В результате функция кручения  $S_1$  принимает следующий вид:

$$S_1 = -\frac{1}{6(f_0+a/8)Z} \left[ f\dot{F} + 6(2f - q_1 + 2q_2)HS_2^2 + 6(2f - q_1)S_2\dot{S}_2 \right], \quad (17)$$

а функция кручения  $S_2$  удовлетворяет дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\begin{aligned} q_2 \left[ \ddot{S}_2 + 3H\dot{S}_2 + \left( 3\dot{H} - 4\dot{S}_1 + 4S_1(3H - 4S_1) \right) S_2 \right] \\ - \left[ \frac{q_1 + q_2}{3} F + (f_0 - b) - 2(q_1 + q_2 - 2f)A_2 \right] S_2 = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Обобщение космологических уравнений Фридмана для ОИМ в пространстве-времени Римана-Картана не содержит высших производных масштабного фактора  $R$  при наложении условия  $a = 0$ . Используя данное ограничение на неопределенные параметры гравитационного лагранжиана, запишет основные соотношения изотропной космологии ПКТТ, базирующуюся на общем выражении  $\mathcal{L}_g$  (1).

Космологические уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{k}{R^2} + (H - 2S_1)^2 = \frac{1}{6f_0Z} \left[ \rho + 6(f_0Z - b)S_2^2 + \frac{\alpha}{4} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right] \\ - \frac{3\alpha\varepsilon f_0}{Z} \left[ (HS_2 + \dot{S}_2)^2 + 4 \left( \frac{k}{R^2} - S_2^2 \right) S_2^2 \right], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} - 2\dot{S}_1 + H(H - 2S_1) = -\frac{1}{12f_0Z} \left[ \rho + 3p - \frac{\alpha}{2} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right] \\ - \frac{\alpha\varepsilon}{Z} (\rho - 3p - 12bS_2^2) S_2^2 + \frac{3\alpha\varepsilon f_0}{Z} \left[ (HS_2 + \dot{S}_2)^2 + 4 \left( \frac{k}{R^2} - S_2^2 \right) S_2^2 \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где скалярная кривизна  $F = \frac{1}{2f_0}(\rho - 3p - 12bS_2^2)$ ,  $Z = 1 + \alpha(\rho - 3p - 12(b + \varepsilon f_0)S_2^2)$ , а помимо параметров  $\alpha = \frac{f}{3f_0^2}$  и  $b$  фигурирует также безразмерный параметр  $\varepsilon = q_2/f$ . В соответствии с (17)-(18) функции кручения определены следующим образом

$$S_1 = -\frac{\alpha}{4Z} [\dot{\rho} - 3\dot{p} + 12f_0(3\varepsilon + \omega)HS_2^2 - 12(2b - (\varepsilon + \omega)f_0)S_2\dot{S}_2], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon [\ddot{S}_2 + 3H\dot{S}_2 + \left( 3\dot{H} - 4\dot{S}_1 + 12HS_1 - 16S_1^2 \right) S_2] \\ - \frac{1}{3f_0} [(1 - \frac{1}{2}\omega)(\rho - 3p - 12bS_2^2) + \frac{(1 - b/f_0)}{\alpha} + 6f_0\omega A_2] S_2 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где введен безразмерный параметр  $\omega = \frac{2f - q_1 - q_2}{f}$ .

Космологические уравнения (19)-(20) совместно с уравнениями (21)-(22) определяют динамику ОИМ в пространстве-времени Римана-Картана, если известно уравнение состояния системы. При этом необходимо иметь в виду, что материальное содержание и его уравнение состояния меняются в процессе эволюции Вселенной и

в случае бесспиновой материи, минимальным образом взаимодействующей с гравитацией, уравнение сохранения для плотности энергии имеет такой же вид, как и в ОТО

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (23)$$

Выведенные уравнения изотропной космологии (19)-(22) в общем случае содержат 4 неопределенные параметра:  $\alpha$  (или  $f$ ),  $b$ ,  $\varepsilon$  and  $\omega$ . Данные параметры должны иметь определенные значения в предположении, что ПКТТ – корректная гравитационная теория. Мы можем найти ограничения на неопределенные параметры, анализируя физические следствия изотропной космологии в зависимости от значений неопределенных параметров, при которых эти следствия являются наиболее удовлетворительными и соответствуют наблюдаемым космологическим данным.

#### 2.4.3 Вакуумный эффект гравитационного отталкивания и ускорение космологического расширения в современную эпоху

Прежде всего рассмотрим поведение космологических решений в асимптотике, где плотность энергии достаточно мала. Легко показать, что при определенных ограничениях на неопределенные параметры космологические уравнения в асимптотике, где плотность энергии достаточно мала, принимают вид уравнений Фридмана с эффективной космологической постоянной, индуцируемой функцией кручения  $S_2$ . Для этого требуется, чтобы параметр  $\varepsilon$  был достаточно мал ( $|\varepsilon| \ll 1$ ) и имело место, по крайней мере, одно из двух ограничений  $|\omega| \ll 1$  либо  $0 < 1 - \frac{b}{f_0} \ll 1$  и  $0 < \omega < 4$  [25]. Тогда функция кручения  $S_2$  в соответствии с (22) принимает вид

$$S_2^2 = \frac{1}{12b} \left[ \rho - 3p + \frac{1 - b/f_0}{\alpha} \right], \quad (24)$$

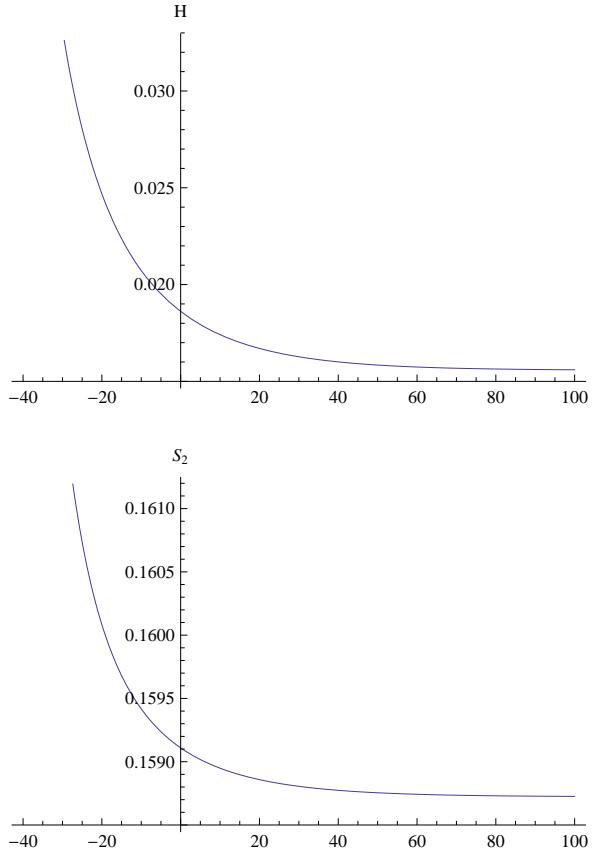
а космологические уравнения преобразуются следующим образом <sup>2</sup>

$$\frac{k}{R^2} + H^2 = \frac{1}{6f_0} \left[ \rho \frac{f_0}{b} + \frac{1}{4\alpha} \left( 1 - \frac{b}{f_0} \right)^2 \frac{f_0}{b} \right], \quad (25)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{12f_0} \left[ (\rho + 3p) \frac{f_0}{b} - \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \frac{b}{f_0} \right)^2 \frac{f_0}{b} \right]. \quad (26)$$

При определенном соотношении между параметрами  $\alpha$  и  $b$  эффективная космологическая постоянная в уравнениях (25)-(26) совпадает со значением космологической постоянной, принимаемой в ОТО, и эти уравнения для пространственно плоской модели ( $k = 0$ ) совпадают с уравнениями стандартной  $\Lambda CDM$ -модели, если значение слагаемого  $\rho(f_0/b)$  в правой части уравнения (15) равняется полной плотности энергии материи, заполняющей Вселенную. Тогда соответствующие решения описывают поведение ускоренно расширяющейся Вселенной в полном соответствии с  $\Lambda CDM$ -моделью. Если параметр  $\alpha$  соответствует шкале экстремально больших плотностей энергии, параметр  $b$  должен удовлетворять ограничению  $0 < 1 - \frac{b}{f_0} \ll 1$ . Космологические решения в асимптотике при этом стабильны при выполнении условия  $\varepsilon > 0$  [26].

<sup>2</sup>Впервые уравнения в асимптотике (24)-(26) были получены в [23].

Рис. 1: Поведение безразмерных параметра Хаббла и функции кручения  $S_2$  в асимптотике.

В качестве иллюстрации приведем численное космологическое решение в асимптотике для плоской модели ( $k = 0$ ), заполненной пылевидной материи ( $p = 0$ ) [26]. Предварительно уравнения (19)-(23) приведены к безразмерному виду с помощью перехода к безразмерным величинам, обозначаемых посредством значка тильды:

$$\begin{aligned} t \rightarrow \tilde{t} &= t/\sqrt{6f_0\alpha}, & R \rightarrow \tilde{R} &= R/\sqrt{6f_0\alpha}, \\ \rho \rightarrow \tilde{\rho} &= \alpha \rho, & p \rightarrow \tilde{p} &= \alpha p, \\ S_{1,2} \rightarrow \tilde{S}_{1,2} &= S_{1,2}\sqrt{6f_0\alpha}, & b \rightarrow \tilde{b} &= b/f_0, \\ H \rightarrow \tilde{H} &= H\sqrt{6f_0\alpha}, \end{aligned} \quad (27)$$

Численное решение получено при следующем выборе неопределенных параметров и начальных условий, задаваемых в момент времени  $\tilde{t}_0$ , принадлежащий стадии ускоренного космологического расширения:  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\omega = 2.5$ ,  $\tilde{b} = 0.98$ ,  $\tilde{H}_0 = 0.0186$ ,  $\tilde{S}_{20} = 0.159$ ,  $\tilde{S}'_{20} = -0.00002399$ ,  $\tilde{\rho}_0 = 0.000107$ . Такой выбор начальных условий приводит к соотношению  $H^2(t_0)/H^2(\infty) = 1/\Omega_\Lambda = 1/0.7$ . На Рис.1 - Рис.2 представлено характерное поведение в асимптотике параметра Хаббла, функции кручения  $S_2$ , параметра ускорения  $q = R''R/R'^2$  (штрих означает дифференцирование по безразмерному времени) и плотности энергии пылевидной материи (знак тильды на рисунках опущен). Из Рис. 2 для параметра ускорения видно, что в прошлом был момент времени, когда  $q = 0$  и переход от стадии замедленного расширения к ускоренному расширению имел место.

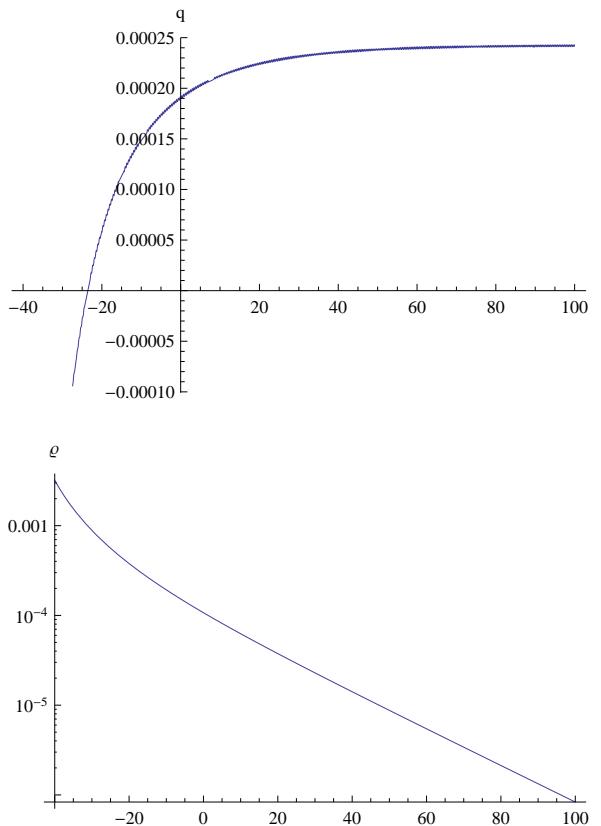


Рис. 2: Поведение безразмерных параметра ускорения и плотности энергии в асимптотике.

Как было показано в [24], физическое пространство-время в вакууме в случае обсуждаемых космологических ОИМ в ПКТТ имеет структуру континуума Римана-Картана с метрикой де Ситтера и неисчезающим кручением (без введения в теорию космологической постоянной), в результате чего вакуум в ПКТТ приобретает динамические свойства, а наблюдаемое ускоренное космологическое расширение в современную эпоху - вакуумное происхождение. Эффект вакуумного гравитационного отталкивания имеет нелинейный характер и проявляется в космологических масштабах.

#### 2.4.4 Предельная плотность энергии и решение проблемы космологической сингулярности

В рамках ПКТТ важное значение имеет изменение характера гравитационного взаимодействия в случае систем в экстремальных условиях – систем с экстремально большими плотностями энергии (порядка  $\alpha^{-1}$ ). Эффект гравитационного отталкивания в случае систем в экстремальных условиях имеет важное значение для космологии и астрофизики, предотвращая появление сингулярного состояния с расходящейся плотностью энергии в начале космологического расширения, а также в случае массивных астрофизических объектов, предотвращая их коллапс.

В рамках изотропной космологии вывод о возможности предотвращения сингулярного состояния с расходящейся плотностью энергии в начале космологическо-

го расширения был получен ранее при изучении ОИМ с одной функцией кручения [19, 27]. Космологические уравнения для таких ОИМ имеют простой вид и зависят лишь от одного неопределенного параметра  $\alpha$ , а регуляризация метрики достигается благодаря появлению предельной плотности энергии, вблизи которой гравитационное взаимодействие имеет характер отталкивания. Однако ОИМ с одной функцией кручения обладают принципиальным недостатком в связи с расходимостью кручения и кривизны в состоянии с предельной плотности энергии. Последовательное же рассмотрение в рамках классической (неквантовой) теории предполагает регулярное поведение всех важнейших характеристик, включая тензоры кручения и кривизны. При этом в рамках ОИМ с одной функцией кручения невозможно объяснить наблюдаемое ускоренное космологическое расширение в современную эпоху без использования понятия темной энергии. Последовательное решение проблемы космологической сингулярности в рамках изотропной космологии может быть получено на основе исследования ОИМ с двумя функциями кручения.

Наиболее простое последовательное решение данной проблемы может быть получено, если положить, что в уравнениях для ОИМ с двумя функциями кручения малый параметр  $\varepsilon$  вовсе исчезает ( $\varepsilon = 0$ ) [28]. Тогда космологические уравнения (19)-(20) упрощаются и принимают вид

$$\frac{k}{R^2} + (H - 2S_1)^2 - S_2^2 = \frac{1}{6f_0Z} \left[ \rho - 6bS_2^2 + \frac{\alpha}{4} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right], \quad (28)$$

$$\dot{H} + H^2 - 2HS_1 - 2\dot{S}_1 = -\frac{1}{12f_0Z} \left[ \rho + 3p - \frac{\alpha}{2} (\rho - 3p - 12bS_2^2)^2 \right], \quad (29)$$

где  $Z = 1 + \alpha(\rho - 3p - 12bS_2^2)$ . Функция кручения  $S_1$  в соответствии с (21) равна

$$S_1 = -\frac{\alpha}{4Z} [\dot{\rho} - 3\dot{p} + 12f_0\omega HS_2^2 - 12(2b - \omega f_0)S_2\dot{S}_2]. \quad (30)$$

Функция кручения  $S_2^2$  в силу (22) удовлетворяет квадратичному алгебраическому уравнению, имеющему следующее решение

$$S_2^2 = \frac{\rho - 3p}{12b} + \frac{1 - (b/2f_0)(1 + \sqrt{X})}{12b\alpha(1 - \omega/4)}, \quad (31)$$

где  $X = 1 + \omega(f_0^2/b^2)[1 - (b/f_0) - 2(1 - \omega/4)\alpha(\rho + 3p)]$ .

Материальное содержание космологических ОИМ, а также уравнение состояния гравитирующей материи меняются по мере их эволюции, вид уравнения состояния при этом зависит от связи гравитирующей материи с полем тяготения. Для построения инфляционных космологических моделей будем полагать, что на начальных этапах космологического расширения, помимо обычной материи с плотностью энергии  $\rho_m > 0$  и давлением  $p_m \geq 0$ , ОИМ содержат также в качестве материальной компоненты скалярное поле  $\phi$  с потенциалом  $V = V(\phi)$ . В случае минимальной связи с полем тяготения характеристики материальных компонент удовлетворяют таким же уравнениям, как и в ОТО:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0, \quad (32)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (33)$$

Выражения для полной плотности энергии  $\rho$  и давления  $p$  в уравнениях (28)-(31) имеют вид:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V + \rho_m \quad (\rho > 0), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V + p_m. \quad (34)$$

Прежде чем переходить к рассмотрению поведения космологических решений в начале космологического расширения представим выражение (30) для функции кручения  $S_1$ , получаемое с помощью соотношений (31)-(34) в виде

$$S_1 = -\frac{3f_0\omega\alpha}{4bZ}(HD + E), \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \left( 3 \frac{dp_m}{d\rho_m} - 1 \right) (\rho_m + p_m) \\ &+ \frac{1}{3} (\rho_m - 3p_m) + \frac{2}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{4}{3}V - \frac{b}{6f_0\alpha(1 - \omega/4)}\sqrt{X} \\ &+ \frac{1 - \omega(f_0/2b)}{2\sqrt{X}} \left[ \left( 3 \frac{dp_m}{d\rho_m} + 1 \right) (\rho_m + p_m) + 4\dot{\phi}^2 \right] \\ &+ \frac{1 - (b/2f_0)}{3\alpha(1 - \omega/4)}, \\ E &= \left( 1 + \frac{1 - \omega(f_0/2b)}{\sqrt{X}} \right) \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi}, \\ Z &= \frac{-\omega/4 + (b/2f_0)(1 + \sqrt{X})}{1 - \omega/4}. \end{aligned} \quad (36)$$

Космологические уравнения (28)-(29) ведут к принципиальным следствиям в поведении ОИМ в начале космологического расширения в экстремальных условиях (экстремально большие плотности энергии и давления). В случае положительных параметров  $\omega$  ( $0 < \omega < 4$ ) и  $\alpha$  из условия неотрицательности  $X$  следует ограничение для допустимых значений плотности энергии и давления

$$X = 1 + \omega(f_0^2/b^2)[1 - (b/f_0) - 2(1 - \omega/4)\alpha(\rho + 3p)] \geq 0. \quad (37)$$

В случае ОИМ, заполненных обычной гравитирующей материи с плотностью энергии  $\rho_m$  ( $p_m = p_m(\rho_m)$ ) без скалярных полей равенство, задаваемое посредством (37), определяет предельную, т.е. максимально допустимую плотность энергии  $\rho_{max}$ , имеющую порядок величины  $(\omega\alpha)^{-1}$ . В рамках рассматриваемой классической теории величина  $\rho_{max}$  должна быть меньше планковской плотности энергии. Вблизи предельной плотности энергии гравитационное взаимодействие имеет характер отталкивания, обеспечивая регулярное поведение ОИМ относительно плотности энергии, пространственно-временной метрики и параметра Хаббла. В случае моделей, включающих на начальной стадии расширения скалярные поля условия (37) определяет область допустимых значений материальных параметров  $(\rho_m, \phi, \dot{\phi})$ , ограниченную в

пространстве этих параметров поверхностью  $L$ , определяемой равенством (37). Наличие данной поверхности обеспечивает регулярное поведение соответствующих ОИМ, включая инфляционные космологические модели. Исследуем поведение ОИМ вблизи предельной плотности энергии или поверхности  $L$  ( $X \ll 1$ ), используя космологическое уравнение (28), приводящее к следующему выражению для параметра Хаббла (при использовании безразмерных величин) [29]:

$$\begin{aligned}
 H_{\pm} = H_L & \left[ 1 + \frac{\sqrt{X}}{(1 - (\omega/2b)) \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi'} \left[ \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi' \mp \right. \right. \\
 & \frac{2bZ}{3} \left[ \frac{1}{Z} \left( \rho_m + \frac{1}{2} \phi'^2 + V + \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{b} - 1 \right) (\rho_m - 3p_m - \phi'^2 + 4V \right. \right. \\
 & \left. \left. + \omega \frac{1 - (b/2)(1 + \sqrt{X})}{1 - \omega/4} \right) + \omega \frac{(1 - (b/2)(1 + \sqrt{X}))^2}{4(1 - \omega/4)^2} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{k}{R^2} \right]^{1/2} \right] \left[ 1 + \frac{2}{(1 - \frac{\omega}{2b}) \left[ \left( 3 \frac{dp_m}{d\rho_m} + 1 \right) (\rho_m + p_m) + 4\phi'^2 \right]} \left[ \sqrt{X} \left( \frac{2bZ}{3} \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{dp_m}{d\rho_m} - 1 \right) (\rho_m + p_m) + \frac{1}{3} (\rho_m - 3p_m) + \frac{2}{3} \phi'^2 + \frac{4}{3} V + \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{\omega(1 - b/2)}{3(1 - \omega/4)} \right) - X \frac{\omega b}{6(1 - \omega/4)} \right]^{-1} \right], \quad (38)
 \end{aligned}$$

где

$$H_L = \frac{-2 \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi'}{\left( 3 \frac{dp_m}{d\rho_m} + 1 \right) (\rho_m + p_m) + 4\phi'^2}. \quad (39)$$

В случае ОИМ без скалярных полей параметр Хаббла обращается в нуль при достижении предельной плотности энергии  $\rho_{max}$ ,  $H_-$ - и  $H_+$ -решения описывают стадии сжатия и расширения соответственно, а переход от сжатия к расширению (так называемый баунс) происходит при достижении  $\rho_{max}$ . В случае присутствия скалярных полей баунс происходит при достижении состояния с  $H = 0$ , лежащего на соответствующей поверхности, определяемой из космологического уравнения (28). Величина предельной (т.е. максимально достижимой) плотности энергии в данном случае является различной для разных решений, хотя по величине  $\rho_{max}$  всегда имеет порядок  $(\omega\alpha)^{-1}$ .

Анализ поведения космологических решений вблизи  $L$ -поверхности (вблизи баунса, когда  $X \ll 1$ ), выполненный на основе использования космологических уравнений (28)-(29), функций кручения (35) и (31), а также уравнений для материальных составляющих, показывает, что все важнейшие характеристики системы  $F$  (параметр Хаббла, функции кручения  $S_1$  и  $S_2$ , их производные по времени) могут быть представлены в виде

$$F_{\pm} = F^{(0)} + F^{(1/2)} \sqrt{X} + F^{(1)} X + \dots, \quad (40)$$

где коэффициенты разложений  $F^{(0)}$ ,  $F^{(1/2)}$ ,  $F^{(1)}$ ... являются некоторыми регулярными функциями материальных параметров [29]. Примечательной особенностью изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ на основе ОИМ с двумя функциями кручения, является ее полная регулярность. Все космологические решения

регулярны не только по метрике с ее производными (параметр Хаббла с его производной по времени), но также относительно кручения и кривизны.

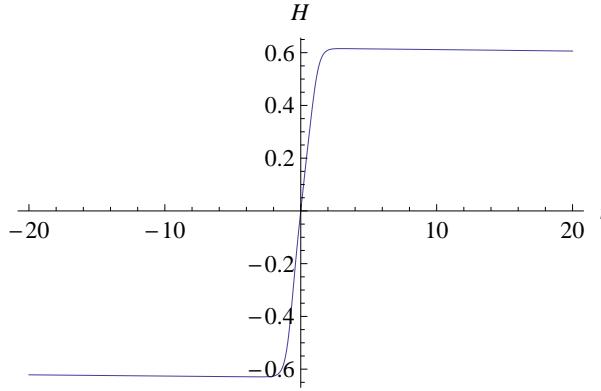


Рис. 3: Поведение  $H$  на стадии перехода.

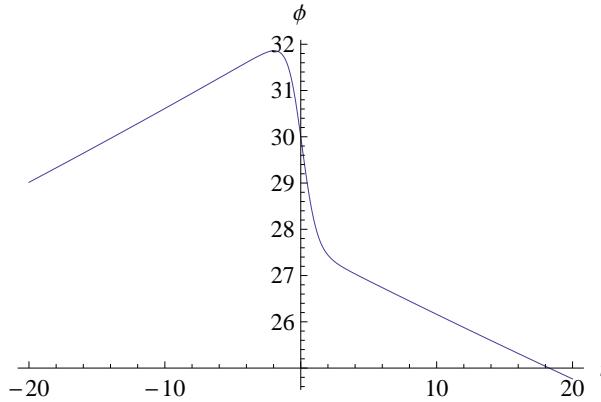
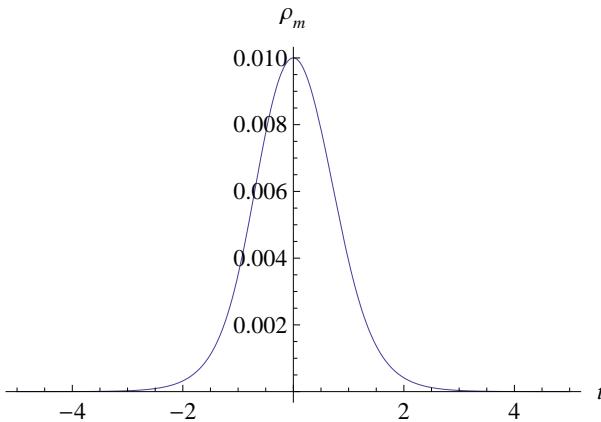
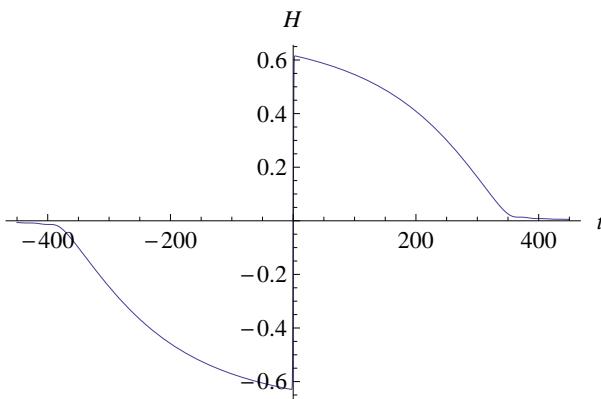


Рис. 4: Поведение поля  $\phi$  на стадии перехода.

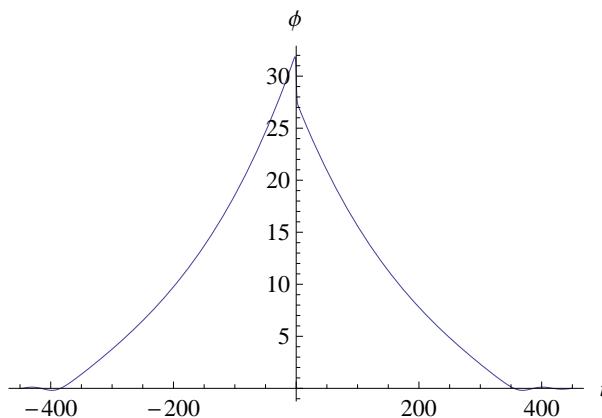
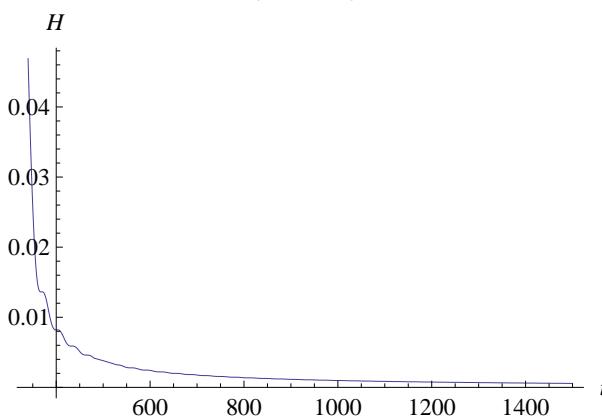
В случае инфляционных моделей со скалярным полем переход от  $H_-$ -решения к  $H_+$ -решению происходит при достижении  $L$ -поверхности, на которой параметр Хаббла определяется согласно (39). Баунс в данном случае происходит при достижении экстремальной поверхности, получаемой из космологического уравнения (28), в котором следует положить  $H = 0$ . Подобно инфляционным космологическим моделям, исследованным в рамках ПКТТ в случае ОИМ с одной функцией кручения  $S_1$  [27, 30, 31], в случае ОИМ с двумя функциями кручения космологические решения могут быть получены с помощью численного интегрирования системы уравнений (29), (32), (33) при задании начальных условий для  $(\rho_m, \phi, \dot{\phi})$  на экстремальной поверхности (предполагается, что уравнение состояния  $p_m = p_m(\rho_m)$  и вид потенциала  $V$  известны). Если начальное значение скалярного поля достаточно велико, космологическое решение включает стадию перехода от сжатия к расширению, инфляционную стадию с медленно убывающим скалярным полем и параметром Хаббла и пост-инфляционную стадию с осциллирующим скалярным полем.

В качестве иллюстрации на Рис.3–Рис.9 приведено численное инфляционное решение, полученное в [32] в случае плоской модели ( $k = 0$ ) при выборе квадратичного

Рис. 5: Поведение  $\rho_m$  на стадии перехода .Рис. 6: Поведение  $H$  на инфляционной стадии.

потенциала скалярного поля  $V = m^2\phi^2/2$  и  $p_m = \rho_m/3$ . Численное решение было получено при следующем выборе безразмерных значений неопределенных параметров и начальных условий на экстремальной поверхности  $H = 0$ :  $\tilde{b} = 0.999$ ,  $\omega = 10^{-8}$ ,  $\tilde{m} = 0.1$ ,  $\tilde{\phi}_0 = 30$ ,  $\tilde{\phi}'_0 = -2.14$ ,  $\tilde{\rho}_{m0} = 0.01$  (знак тильды на рисунках опущен).

Физические процессы в начале космологического расширения существенно зависят от величины предельной плотности энергии (предельной температуры), зависящей от значения параметра  $\alpha$ . С физической точки зрения, роль инфляционных ОИМ в рамках регулярной изотропной космологии отличается от их роли в рамках стандартного космологического сценария ОТО в связи с отсутствием начала Вселенной во времени. Однако, подобно инфляционной космологии, построенной в рамках метрической теории гравитации, инфляционный сценарий в ПКТТ должен дать объяснение происхождению начальных космологических флуктуаций, которые явились зародышами образования крупномасштабной структуры Вселенной, и информация о которых следует из наблюдений реликтового излучения. В связи с этим заметим, что построение теории флуктуаций в регулярной инфляционной космологии ПКТТ представляет собой чрезвычайно сложную проблему. Помимо сложности уравнений ПКТТ, описание гравитационных флуктуаций является существенно сложнее по сравнению с метрической теорией тяготения. Так, скалярные гравита-

Рис. 7: Поведение  $\phi$  на инфляционной стадии.Рис. 8: Поведение  $H$  на пост-инфляционной стадии.

ционные флуктуации в таких моделях, помимо двух калибровочно-инвариантных функций метрических флуктуаций (см. напр. [33]) описываются с помощью шести калибровочно-инвариантных функций флуктуаций тензора кручения.

## 2.5 Заключение

Исследования изотропной космологии, построенной в рамках ПКТТ, показывают, что гравитационное взаимодействие в данной теории изменяется по сравнению с ОТО в определенных ситуациях и может иметь характер отталкивания в случае обычных гравитирующих систем с положительными значениями плотности энергии и давления. Эффект гравитационного отталкивания проявляется в экстремальных условиях, а также в ситуации, когда плотность энергии материи чрезвычайно мала и становится существенным вакуумный эффект гравитационного отталкивания. Это позволяет решить проблему космологической сингулярности в изотропной космологии, а также объяснить наблюдаемое ускоренное космологическое расширение в современную эпоху, не используя понятия темной энергии. Подобное изменение гравитационного взаимодействия связано с более сложной структурой физическо-

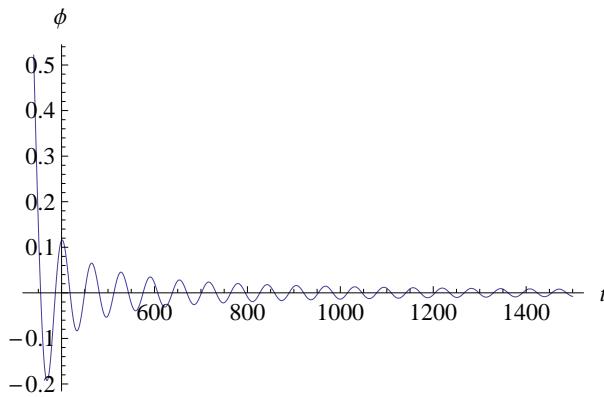


Рис. 9: Поведение  $\phi$  на пост-инфляционной стадии.

го пространства-времени, а именно, с его кручением. Большой интерес представляет изучение характера гравитационного взаимодействия в астрофизических масштабах. Эффект гравитационного отталкивания в экстремальных условиях должен предотвращать коллапс массивных объектов в галактиках и образование черных дыр [34]. Исследование гравитационного взаимодействия в астрофизических масштабах в рамках ПКТТ представляет также большой интерес в связи с проблемой темной материи.

## Литература

- [1] Novello M. and Perez Bergliaffa S.A., *Bouncing cosmologies*, Phys. Rept., **463**, 127-213 (2008). (Preprint ArXiv:0802.1634 [astro-ph]).
- [2] Minkevich A.V., *Gravitational interaction and Poincare gauge theory of gravity*, Acta Physica Polonica B, **40**, 229-239, (2009).
- [3] Минкевич А.В., *Калибровочный подход в теории тяготения, физическое пространство-время и гравитационное взаимодействие*, Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, вып.1, 62-72 (2012).
- [4] Минкевич А.В. *Гравитационное поле и принцип локальной инвариантности*, Известия АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 117-119 (1966).
- [5] Hayashi K., Nakano T. *Extended translation invariance and associated gauge fields*, Progr. Theor. Phys., **38**, 491-507 (1967).
- [6] Utiyama R., Fukuyama T., *Gravitational field as a generalized gauge field*, Progr. Theor. Phys., **45**, 612-627 (1971).
- [7] Минкевич А.В., Кудин В.И., *Калибровочные поля и группа Лоренца*, Acta Physica Polonica B, **5**, 335-343 (1974).
- [8] Utiyama R., *Invariant theoretical interpretation of interactions*, Phys. Rev., **101**, 1597-1607 (1956).

- [9] Kibble T.W.B. *Lorentz invariance and the gravitational field*, Journal of Mathematical Physics, **2**, 212-221 (1961).
- [10] Бродский А.М., Иваненко Д., Соколик Г.А., *Новая трактовка гравитационного поля*, ЖЭТФ, **41**, 1307-1309 (1961).
- [11] Trautman A. *The Einstein-Cartan theory*, In: Encyclopedia of Mathematical Physics, Vol. 2, J.-P. Francoise et al. (eds.) (Elsevier, Oxford, 2006), pp. 189-195.
- [12] Д.Д. Иваненко, П.И. Пронин, Г.А. Сарданашвили, *Калибровочная теория гравитации*, М.: из-во МГУ, 1985.
- [13] Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н., *Геометродинамические методы и калибровочный подход в теории гравитации*, М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [14] Frolov B.N., *On foundations of Poincaré-gauged theory of gravity*, **10**, 116-120 (2004).
- [15] Sciama D.W., *On the analogy between charge and spin in general relativity*, In: Recent Developments in General Relativity, Festschrift for Infeld (Pergamon Press, Oxford; PWN, Warsaw, 1962) P. 415-439.
- [16] F.W. Hehl, P. von der Heyde, G.D. Kerlik, and J.M. Nester, *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects*, Rev. Mod. Phys., **48**, 393 (1976).
- [17] M. Blagojević, *Gravitation and Gauge Symmetries*, IOP Publishing, Bristol, 2002.
- [18] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Gravity from Poincaré Gauge Theory of the Fundamental Particles. I — General Formulation*, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 866; *Gravity from Poincaré Gauge Theory of the Fundamental Particles. II — Equations of Motion for Test Bodies and Various Limits*, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 883; *Gravity from Poincaré Gauge Theory of the Fundamental Particles. III — Weak Field Approximation*, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 1435; *Gravity from Poincaré Gauge Theory of the Fundamental Particles. IV — Mass and Energy of Particle Spectrum*, Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 2222.
- [19] Minkevich A.V., *Generalised cosmological Friedmann equations without gravitational singularity*, Physics Letters A., **80**, No. 4, 232-234 (1980 ).
- [20] С. Вайнберг, *Гравитация и космология*, Мир, Москва, 1975.
- [21] В.И. Кудин, А.В. Минкевич, Ф.И. Федоров, *О пространственно-временных симметриях в калибровочной теории гравитации*, ВИНИТИ, № 3794-79, Минск (1979) 12 с.
- [22] M. Tsamparlis, Physics Letters A, **75**, 27 (1979).
- [23] A.V. Minkevich, A.S. Garkun and V.I. Kudin, *Regular accelerating Universe without dark energy in Poincaré gauge theory of gravity*, Class. Quantum Grav. **24** (2007) 5835 [arXiv:0706.1157].
- [24] Minkevich A.V., *De Sitter spacetime with torsion as physical spacetime in the vacuum and isotropic cosmology*, Modern Physics Letters A, **26**, No. 4, 259-266 (2011) (Preprint Arxiv:1002.0538 [gr-qc]).

- [25] Минкевич А.В., *Пуанкаре калибровочная теория тяготения, гравитационное взаимодействие и регулярная ускоренно-расширяющаяся Вселенная*, Труды Международного семинара "Нелинейные поля в теории гравитации и космологии" и Российской школы "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений Казань, 2013, с. 69-73.
- [26] A.S. Garkun, V.I. Kudin and A.V. Minkevich, *To theory of asymptotically stable accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, prepared for JCAP, 2014.
- [27] Minkevich A.V. *Gauge approach to gravitation and regular Big Bang theory*, Gravitation&Cosmology, **12**, 11–21 (2006).
- [28] Minkevich A.V., *Limiting energy density and a regular accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, Письма в ЖЭТФ, **94**, No 12, 913-917 (2011); JETP Letters, **94**, No. 12, 831-836 (2011).
- [29] A.V. Minkevich, *On theory of regular accelerating Universe in Riemann-Cartan spacetime*, Mod. Phys. Lett. A **28**, No. 21 (2013) 1350090 [arXiv:1309.6075].
- [30] Minkevich A.V., *On gravitational repulsion effect at extreme conditions in gauge theories of gravity*, Acta Physica Polonica B, **38**, 61–72 (2007) (Preprint gr-qc/0512123).
- [31] Minkevich A.V. and Garkun A.S., *Analysis of inflationary cosmological models in gauge theories of gravitation*, Classical and Quantum Gravity, **23**, 4237–4247 (2006) (Preprint gr-qc/0512130).
- [32] Minkevich A.V., Garkun A.S., Kudin V.I., *On some physical aspects of isotropic cosmology in Riemann-Cartan spacetime*, JCAP, 03, 40 (2013) (Preprint Arxiv: 1302.2578 [gr-qc]).
- [33] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, New York, 2005.
- [34] Minkevich A.V., Garkun A.S., Kudin V.I., Vasilevski Yu.G., *Limiting energy density and a regular gravitating spherically symmetric objects in Riemann-Cartan spacetime*, Rusgrav-15, Abstracts Reports, p.51-52.

*Alexei A. Starobinsky. Lectures on modern  
problems of cosmology*



Academician RAS Alexei Starobinsky. Lectures on modern  
problems of cosmology  
Vice-President of Russian Gravitational Society  
Landau Institute for Theoretical Physics RAS, Moscow -  
Chernogolovka, Russia

---

Kazan—Kazan Federal University, 5–7 July 2014

## 3.1 Modern paradigm of cosmology and history of our Universe

### 3.1.1 Four epochs of the history of the Universe

$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  where  $a(t)$  is a scale factor of an isotropic homogeneous spatially flat universe (a Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker background):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \text{small perturbations}$$

The history of the Universe in one line according to the present paradigm:

$$? \longrightarrow DS \Longrightarrow FLRW RD \Longrightarrow FLRW MD \Longrightarrow \overline{DS} \longrightarrow ?$$

$$|\dot{H}| \ll H^2 \Longrightarrow H = \frac{1}{2t} \Longrightarrow H = \frac{2}{3t} \Longrightarrow |\dot{H}| \ll H^2$$

$$p \approx -\rho \Longrightarrow p = \rho/3 \Longrightarrow p \ll \rho \text{ magenta} \Longrightarrow p \approx -\rho$$

## 3.2 Present status of the inflationary scenario of the early Universe and its predictions for inhomogeneous perturbations

### 3.2.1 Main advantages of inflation

Aesthetic elegance

Inflation – hypothesis about an almost maximally symmetric (quasi-de Sitter) stage of the evolution of our Universe in the past, before the hot Big Bang. If so, preferred initial conditions for (quantum) inhomogeneities with sufficiently short wavelengths exist – the adiabatic in-vacuum ones. In addition, these initial conditions represent an attractor for a much larger compact open set of initial conditions having a non-zero measure in the space of all initial conditions.

Predictability, proof and/or falsification

Given equations, this gives a possibility to calculate all subsequent evolution of the Universe up to the present time and even further to the future. Thus, any concrete inflationary model can be proved or disproved by observational data.

Naturalness of the hypothesis

Remarkable qualitative similarity between primordial and present dark energy.

### 3.2.2 Present status of inflation

From "proving" inflation to using it as a tool

Present status of inflation: transition from "proving" it in general and testing some of its simplest models to applying the inflationary paradigm to investigate particle physics at super-high energies and the actual history of the Universe in the remote past using real observational data on  $n_s(k) - 1$  and  $r(k)$ .

### 3.2.3 Generation of scalar and tensor perturbations during inflation

A genuine quantum-gravitational effect: a particular case of the effect of particle-antiparticle creation by an external gravitational field. Requires quantization of a space-time metric.

Similar to electron-positron creation by an electric field. From the diagrammatic point of view: an imaginary part of a one-loop correction to the propagator of a gravitational field from all quantum matter fields including the gravitational field itself, too.

The effect can be understood from the behaviour of a light scalar field in the de Sitter space-time.

### 3.2.4 De Sitter space-time

Constant curvature space-time.

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = H_0^2(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$

4 most popular forms of its space-time metric (only the first metric covers the whole space-time):

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt_c^2 - H_0^{-2} \cosh^2(H_0 t_c) (d\chi_c^2 + \sin^2 \chi_c d\Omega^2) \\ ds^2 &= dt^2 - a_1^2 e^{2H_0 t} (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad a_1 = \text{const} \\ ds^2 &= dt_o^2 - H_0^{-2} \sinh^2(H_0 t_o) (d\chi_o^2 + \sinh^2 \chi_o d\Omega^2) \\ ds^2 &= (1 - H_0^2 R^2) d\tau^2 - (1 - H_0^2 R^2)^{-1} dR^2 - R^2 d\Omega^2 \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned}$$

### 3.2.5 Perturbative anomalous growth of light scalar fields in the de Sitter space-time

Background - fixed - de Sitter or, more interestingly, quasi-de Sitter space-time (slow roll inflation).

Occurs for  $0 \leq m^2 \ll H^2$  where  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ ,  $a(t)$  is a FRW scale factor. The simplest and textbook example:  $m = 0$ ,  $H = H_0 = \text{const}$  for  $t \geq t_0$  and the initial quantum state of the scalar field at  $t = t_0$  is the adiabatic vacuum for modes with  $k/a(t_0) \gg H_0$  and some infrared finite state otherwise.

The wave equation:

$$\phi_{;\mu}^{\mu} = 0$$

Equation for the time dependent part of tensor perturbations on a FLRW background supported by ideal fluids or minimally coupled scalar fields has the same form.

Quantization with the adiabatic vacuum initial condition:

$$\begin{aligned} \phi &= (2\pi)^{-3/2} \int \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} \phi_k(\eta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \phi_k^* e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] d^3 k \\ \phi_k(\eta) &= \frac{H_0 e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left( \eta - \frac{i}{k} \right), \quad a(\eta) = \frac{1}{H_0 \eta}, \quad \eta_0 < \eta < 0, \quad k = |\mathbf{k}| \end{aligned}$$

Then

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{H_0^2 N}{4\pi^2} + \text{const}$$

Here  $N = \ln \frac{a}{a(t_0)} \gg 1$  is the number of e-folds from the beginning of inflation and the constant depends on the initial quantum state (Linde, 1982; AS, 1982; Vilenkin and Ford,

1982).

Straightforward generalization to the slow-roll case  $|\dot{H}| \ll H^2$ .

For  $0 < m^2 \ll H^2$ , the Bunch-Davies equilibrium value

$$\langle \phi^2 \rangle = \frac{3H_0^4}{8\pi m^2} \gg H_0^2$$

is reached after a large number of e-folds  $N \gg \frac{H_0^2}{m^2}$ .

Purely infrared effect - creation of real field fluctuations; renormalization is not important and does not affect it.

For the de Sitter inflation (gravitons only) (AS, 1979):

$$P_g(k) = \frac{16GH_0^2}{\pi}; \quad \langle h_{ik}h^{ik} \rangle = \frac{16GH_0^2 N}{\pi}.$$

The assumption of small perturbations breaks down for  $N \gtrsim 1/GH_0^2$ . Still ongoing discussion on the final outcome of this effect. My opinion - no screening of the background cosmological constant, instead - stochastic drift through an infinite number of locally de Sitter, but globally non-equivalent vacua.

Reason: the de Sitter space-time is not the generic late-time asymptote of classical solutions of GR with a cosmological constant  $\Lambda$  both without and with hydrodynamic matter. The generic late-time (expanding) asymptote is (AS, 1983):

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik}dx^i dx^k$$

$$\gamma_{ik} = e^{2H_0 t} a_{ik} + b_{ik} + e^{-H_0 t} c_{ik} + \dots$$

where  $H_0^2 = \Lambda/3$  and the matrices  $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$  are functions of spatial coordinates.  $a_{ik}$  contains two independent physical functions (after 3 spatial rotations and 1 shift in time + spatial dilatation) and can be made unimodular, in particular.

### 3.2.6 Generation of metric perturbations

One spatial Fourier mode  $\propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  is considered.

For scales of astronomical and cosmological interest, the effect of creation of metric perturbations occurs at the primordial de Sitter (inflationary) stage when  $k \sim a(t)H(t)$  where  $k \equiv |\mathbf{k}|$  (the first Hubble radius crossing).

After that, for a very long period when  $k \ll aH$  until the second Hubble radius crossing (which occurs rather recently at the radiation or matter dominated stages), there exist one mode of scalar (adiabatic, density) perturbations and two modes of tensor perturbations (primordial gravitational waves) for which metric perturbations are constant (in some gauge) and independent of (unknown) local microphysics due to the causality principle.

### 3.2.7 Classical-to-quantum transition for the leading modes of perturbations

In the superhorizon regime in the coordinate representation:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(\delta_{lm} + h_{lm})dx^l dx^m, \quad l, m = 1, 2, 3$$

$$h_{lm} = 2\zeta(\mathbf{r})\delta_{lm} + \sum_{a=1}^2 g^{(a)}(\mathbf{r}) e_{lm}^{(a)}$$

$$e_l^{l(a)} = 0, \quad g^{(a)}_{,l} e_m^{l(a)} = 0, \quad e_{lm}^{(a)} e^{lm(a)} = 1$$

$\zeta$  describes primordial scalar perturbations,  $g$  – primordial tensor perturbations (primordial gravitational waves (GW)).

Quantum-to-classical transition: in fact, metric perturbations  $h_{lm}$  are quantum (operators in the Heisenberg representation) and remain quantum up to the present time. But, after omitting of a very small part, decaying with time, they become commuting and, thus, equivalent to classical (c-number) stochastic quantities with the Gaussian statistics (up to small terms quadratic in  $\zeta$ ,  $g$ ).

Remaining quantum coherence: deterministic correlation between  $\mathbf{k}$  and  $-\mathbf{k}$  modes - shows itself in the appearance of acoustic oscillations (primordial oscillations in case of GW).

### 3.2.8 $\delta N$ formalism for scalar perturbations

Local duration of inflation in terms of  $N_{tot} = \ln \left( \frac{a(t_{fin})}{a(t_{in})} \right)$  is different in different point of space:  $N_{tot} = N_{tot}(\mathbf{r})$ . Then

$$\zeta(\mathbf{r}) = \delta N_{tot}(\mathbf{r})$$

Correct generalization to the non-linear case: the space-time metric after the end of inflation at super-Hubble scales

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)e^{2N_{tot}(\mathbf{r})}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

First derived in A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117**, 175 (1982) in the case of one-field inflation.

### 3.2.9 FLRW dynamics with a scalar field

In the absence of spatial curvature and other matter:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left( \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right)$$

$$\dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \dot{\phi}^2$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

where  $\kappa^2 = 8\pi G$  ( $\hbar = c = 1$ ).

### 3.2.10 Inflationary slow-roll dynamics

Slow-roll occurs if:  $|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|$ ,  $\dot{\phi}^2 \ll V$ , and then  $|\dot{H}| \ll H^2$ .

Necessary conditions:  $|V'| \ll \kappa V$ ,  $|V''| \ll \kappa^2 V$ . Then

$$H^2 \approx \frac{\kappa^2 V}{3}, \quad \dot{\phi} \approx -\frac{V'}{3H}, \quad N \equiv \ln \frac{a_f}{a} \approx \kappa^2 \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi$$

First obtained in A. A. Starobinsky, Sov. Astron. Lett. 4, 82 (1978) in the  $V = \frac{m^2 \phi^2}{2}$  case and for a bouncing model.

### 3.2.11 Spectral predictions of the one-field inflationary scenario in GR

Scalar (adiabatic) perturbations:

$$P_\zeta(k) = \frac{H_k^4}{4\pi^2 \dot{\phi}^2} = \frac{GH_k^4}{\pi |\dot{H}|_k} = \frac{128\pi G^3 V_k^3}{3V_k'^2}$$

where the index  $k$  means that the quantity is taken at the moment  $t = t_k$  of the Hubble radius crossing during inflation for each spatial Fourier mode  $k = a(t_k)H(t_k)$ . Through this relation, the number of e-folds from the end of inflation back in time  $N(t)$  transforms to  $N(k) = \ln \frac{k_f}{k}$  where  $k_f = a(t_f)H(t_f)$ ,  $t_f$  denotes the end of inflation.

The spectral slope

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln P_\zeta(k)}{d \ln k} = \frac{1}{\kappa^2} \left( 2 \frac{V_k''}{V_k} - 3 \left( \frac{V_k'}{V_k} \right)^2 \right)$$

Generically  $n_s \neq 1$ , though  $|n_s - 1| \ll 1$  – deviation from the Harrison-Zeldovich spectrum is expected!

The special case when  $n_s \equiv 1$ :  $V(\phi) \propto \phi^{-2}$  in the slow-roll approximation.

Omitting the slow-roll assumption:

$$\text{let } x = \sqrt{4\pi G}\phi, \quad y = B\sqrt{4\pi G}H, \quad v(x) = \frac{32\pi^2 G^2 B^2}{3} V(\phi).$$

Then (A. A. Starobinsky, JETP Lett. 82, 169 (2005)):

$$\begin{aligned} y &= e^{x^2/2} \left( \int_x^\infty e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x} + C \right) \\ v &= y^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

Tensor perturbations (A. A. Starobinsky, JETP Lett. 50, 844 (1979)):

$$P_g(k) = \frac{16GH_k^2}{\pi}; \quad n_g(k) \equiv \frac{d \ln P_g(k)}{d \ln k} = -\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{V_k'}{V_k} \right)^2$$

The consistency relation:

$$r(k) \equiv \frac{P_g}{P_\zeta} = \frac{16|\dot{H}_k|}{H_k^2} = 8|n_g(k)|$$

Tensor perturbations are always suppressed by at least the factor  $\sim 8/N(k)$  compared to scalar ones. For the present Hubble scale,  $N(k_H) = (50 - 60)$ .

### 3.2.12 Potential reconstruction from scalar power spectrum

In the slow-roll approximation:

$$\frac{V^3}{V'^2} = CP_\zeta(k(t(\phi))), \quad C = \text{const}$$

Changing variables for  $\phi$  to  $N(\phi)$  and integrating, we get:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V(N)} &= -\frac{\kappa^2}{C} \int \frac{dN}{P_\zeta(N)} \\ \kappa\phi &= \int dN \sqrt{\frac{d \ln V}{dN}} \end{aligned}$$

An ambiguity in the form of  $V(\phi)$  because of an integration constant in the first equation. Information about  $P_g(k)$  helps to remove this ambiguity.

In particular, if primordial GW are not discovered in the order  $n_s - 1$ :

$$r \ll 8|n_s - 1| \approx 0.3 ,$$

$$\text{then } \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \ll \left|\frac{V''}{V}\right|, \quad |n_g| = \frac{r}{8} \ll |n_s - 1|, \quad |n_g|N \ll 1 .$$

This is possible only if  $V = V_0 + \delta V$ ,  $|\delta V| \ll V_0$  – a plateau-like potential. Then

$$\begin{aligned} \delta V(N) &= \frac{\kappa^2 V_0^2}{C} \int \frac{dN}{P_\zeta(N)} \\ \kappa\phi &= \int \frac{dN}{\sqrt{V_0}} \sqrt{\frac{d(\delta V(N))}{dN}} \end{aligned}$$

Here, integration constants renormalize  $V_0$  and shift  $\phi$ . Thus, the unambiguous determination of the form of  $V(\phi)$  without knowledge of  $P_g(k)$  becomes possible.

## 3.3 From metric perturbations to CMB temperature anisotropies and polarization

### 3.3.1 CMB temperature anisotropy

$$T_\gamma = (2.72548 \pm 0.00057)\text{K}$$

$$\begin{aligned} \Delta T(\theta, \phi) &= \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \\ &< a_{\ell m} a_{\ell' m'} > = C_\ell \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

Theory: averaging over realizations.

Observations: averaging over the sky for a fixed  $\ell$ .

For scalar perturbations, generated mainly at the last scattering surface (the surface or recombination) at  $z_{LSS} \approx 1090$  (the Sachs-Wolfe, Silk and Doppler effects), but also after it (the integrated Sachs-Wolfe effect).

For GW – only the ISW works.

For  $\ell \lesssim 50$ , neglecting the Silk and Doppler effects, as well as the ISW effect due the presence of dark energy,

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T_\gamma} = -\frac{1}{5}\zeta(r_{LSS}, \theta, \phi) = -\frac{1}{5}\delta N_{tot}(r_{LSS}, \theta, \phi)$$

For  $n_s = 1$ ,

$$\ell(\ell + 1)C_{\ell,s} = \frac{2\pi}{25}P_\zeta$$

For  $1 \ll \ell \lesssim 50$ , the Sachs-Wolfe plateau occurs for the contribution from GW, too:

$$\ell(\ell + 1)C_{\ell,g} = \frac{\pi}{36} \left(1 + \frac{48\pi^2}{385}\right) P_g$$

assuming  $n_t = 1$  (A. A. Starobinsky, Sov. Astron. Lett. 11, 133 (1985)). So,

$$C_\ell = C_{\ell,s} + C_{\ell,g} = (1 + 0.775r)C_{\ell,s}$$

For larger  $\ell > 50$ ,  $\ell(\ell + 1)C_{\ell,s}$  grows and the first acoustic peak forms at  $\ell \approx 200$ , while  $\ell(\ell + 1)C_{\ell,g}$  decreases quickly. Thus, the presence of GW should lead to a step-like enhancement of  $\ell(\ell + 1)C_\ell$  for  $\ell \lesssim 50$ .

### 3.3.2 CMB polarization

Produced at the last scattering surface only due to the Thomson scattering of photons on electrons, suppressed by the factor  $\Delta z_{LSS}/z_{LSS} \sim 0.1$  compared to a temperature anisotropy.

No circular polarization, only linear one.

Linear polarization on the sky (2-sphere) can be decomposed into the E-mode (scalar) and the B-mode (pseudoscalar).

1. Expand the  $Q \pm iU$  combinations of the Stokes parameters into spin-weighted spherical harmonics  $\pm_2 Y_{\ell m}$ .

2. Then

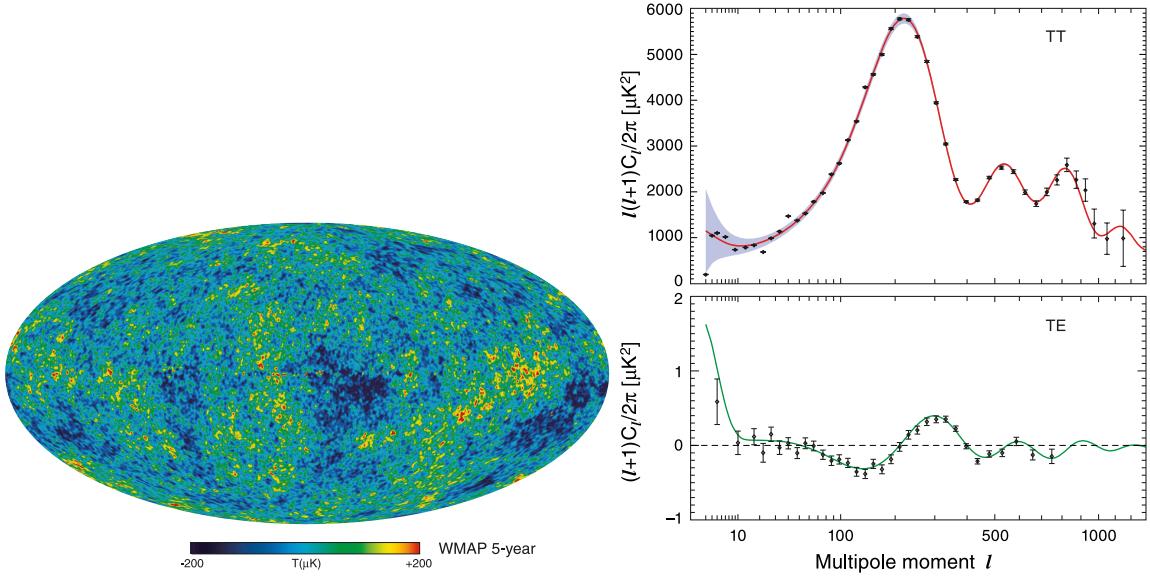
$$a_{E,\ell m} = -(a_{2,\ell m} + a_{-2,\ell m})/2, \quad a_{B,\ell m} = (a_{2,\ell m} - a_{-2,\ell m})/2$$

In the first order, the E-mode is produced both by scalar perturbations and GW, the B-mode is produced by GW only. The most important second order effect through which scalar perturbations produce B-mode: gravitational lensing of CMB fluctuations, screens the first order effect for multipoles  $\ell > 150$ .

## 3.4 What metric CMB observations tells us about inflation and super-high energy particle physics?

### 3.4.1 Outcome of recent CMB observations

I. More than a year ago



The most important for the history of the early Universe are:

1. The primordial spectrum of scalar perturbations has been measured and its deviation from the flat spectrum  $n_s = 1$  in the first order in  $|n_s - 1| \sim N^{-1}$  has been discovered (using the multipole range  $\ell > 40$ ):

$$P_\zeta(k) = \int \frac{\Delta_\zeta^2(k)}{k} dk, \quad \Delta_\zeta^2 = (2.20^{+0.05}) 10^{-9} \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1}$$

$$k_0 = 0.05 \text{Mpc}^{-1}, \quad n_s - 1 = -0.040 \pm 0.007$$

N.B.: The value is obtained under some natural assumptions, the most critical of them is  $N_\nu = 3$ , for  $N_\nu = 4$  many things have to be reconsidered and  $n_s \approx 1$  is not excluded.

2. Neither the B-mode of CMB polarization, nor primordial GW were discovered:  $r < 0.11$  at the 95% CL.

NB: The assumption:  $n_s - 1 = -\frac{2}{N} \approx -0.04$  for all  $N = 1 - 60$  implies a lower bound on  $r$ . In particular, if  $r \ll 8|n_s - 1|$ , then

$$V(\phi) = V_0 (1 - \exp(-\alpha\kappa\phi))$$

with  $\alpha\kappa\phi \gg 1$  but  $\alpha$  not very small, and

$$r = \frac{8}{\alpha^2 N^2}$$

### 3.4.2 Combined results from WMAP and Planck

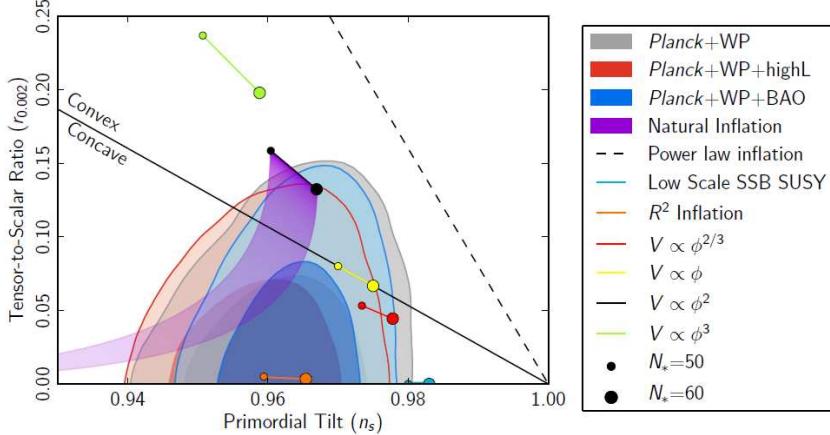
P. A. R. Ade et al., arXiv:1303.5082

II. Three months ago

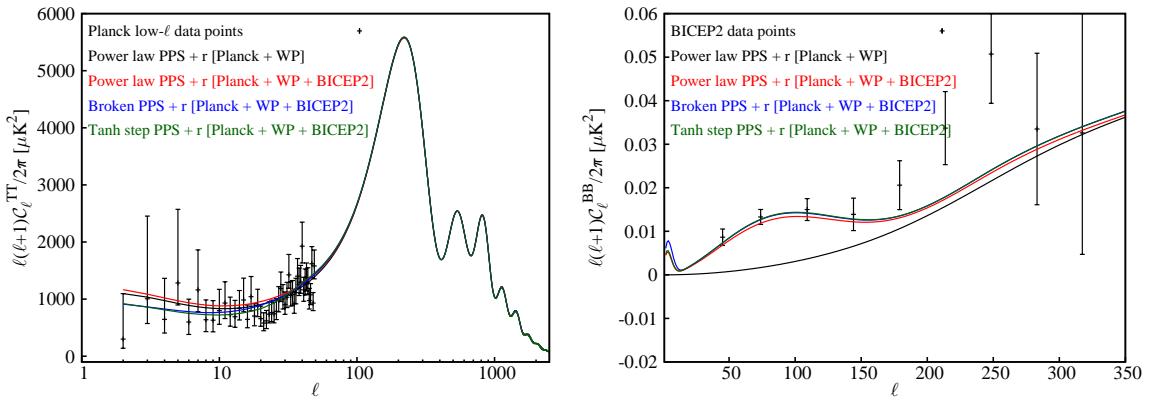
BISEP2 collaboration: P. A. R. Ade et al., arXiv:1403.3985: discovery of the B-mode in the multipole range  $30 < l < 150$  (for larger  $l$  it was discovered earlier this year with the amount in agreement from gravitational lensing of scalar perturbations) with

Model	Parameter	<i>Planck</i> +WP	<i>Planck</i> +WP+lensing	<i>Planck</i> +WP+high- $\ell$	<i>Planck</i> +WP+BAO
$\Lambda$ CDM + tensor	$n_s$	$0.9624 \pm 0.0075$	$0.9653 \pm 0.0069$	$0.9600 \pm 0.0071$	$0.9643 \pm 0.0059$
	$r_{0.002}$	$< 0.12$	$< 0.13$	$< 0.11$	$< 0.12$
	$-2\Delta \ln \mathcal{L}_{\max}$	0	0	0	-0.31

**Table 4.** Constraints on the primordial perturbation parameters in the  $\Lambda$ CDM+r model from *Planck* combined with other data sets. The constraints are given at the pivot scale  $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$ .



**Fig. 1.** Marginalized joint 68% and 95% CL regions for  $n_s$  and  $r_{0.002}$  from *Planck* in combination with other data sets compared to the theoretical predictions of selected inflationary models.



$$r = 0.20^{+0.07}_{-0.05}$$

The unsubtracted result – contains an unknown foreground non-thermal part.

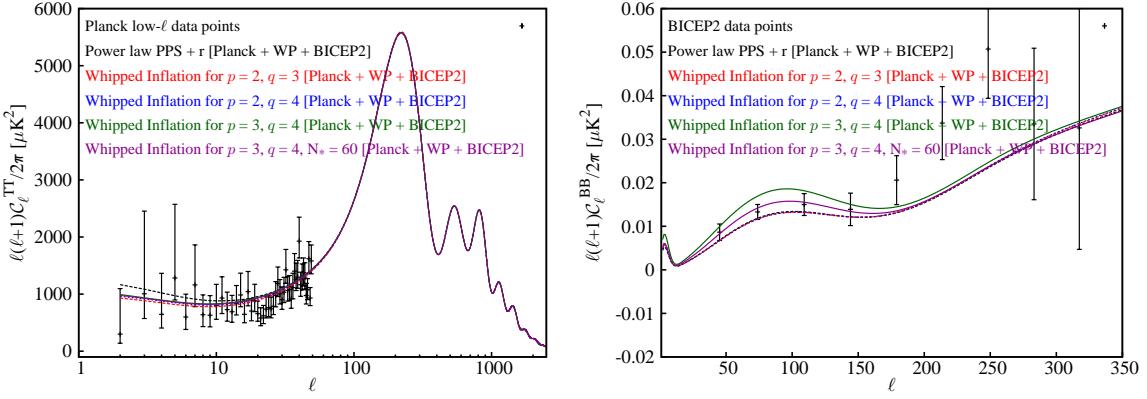
Consequence – assuming the Einstein gravity:

$$\sqrt{G} H_{dS} = 0.99 \times 10^{-5} \left( \frac{r_{0.002}}{0.2} \right)^{1/2} 5^{0.96-n_s}$$

### 3.5 Consequences of the would be discovery primordial GW

If confirmed by an independent measurement:

1. Discovery of a real physical singularity – a state of the Universe in the past with a very high curvature (with  $H$  only 5 orders of magnitude less than the Planck mass).



2. Discovery of a new class of gravitational waves – primordial ones.
3. Decisive argument for the necessity of quantization of gravitational waves.
4. Decisive test of the inflationary paradigm as a whole.
5. Discovery of  $\sim 20\%$  deviation of the power spectrum of scalar perturbations from a scale-free one – new physics during inflation!

The most intriguing discordance between WMAP and Planck results from one side and the BISEP2 ones from the other:

no sign of GW in the CMB temperature anisotropy power spectrum.

Instead of the  $\sim 10\%$  increase of  $\ell(\ell+1)C_\ell$  over the multipole range  $2 \ll l < 50$ , a  $\sim 10\%$  depression is seen for  $20 \lesssim l \lesssim 40$  (see e.g. Fig. 39 of arXiv:1303.5076).

The feature exists even if  $r \ll N^{-1}$  but the presence of  $r \sim 0.1$  makes it larger.

More detailed analysis in D. K. Hazra, A. Shafieloo, G. F. Smoot and A. A. Starobinsky, JCAP 1406, 061 (2014), arXiv:1403.7786 :  
the power-law form of  $P_\zeta(k)$  is excluded at more than  $3\sigma$  CL.

### 3.5.1 Broken scale models describing both WMAP-Planck and BISEP2 data

Next step: "whipped inflation" D. K. Hazra, A. Shafieloo, G. F. Smoot and A. A. Starobinsky, arXiv:1404.0360.

The model contains a new scale at which the effective inflaton potential has a feature which the inflaton crosses about 50 e-folds before the end of inflation. The existence of such a feature, in turn, requires some new physics (e.g. fast phase transition in a second field coupled to the inflaton).

$$V(\phi) = V_S(\phi) + V_R(\phi)$$

$$V_S(\phi) = \gamma\phi^p, \quad V_R(\phi) = \lambda(\phi - \phi_0)^q\Theta(\phi - \phi_0)$$

Best results for  $(p, q) = (2, 3)$ .

### 3.5.2 Wiggles in the power spectrum

The effect of the same order: an upward wiggle at  $\ell \approx 40$  and a downward one at  $\ell \approx 22$ .

Lesson: irrespective of a future analysis of foreground contamination in the BISEP2 result, features in the anisotropy spectrum for  $20 \lesssim \ell \lesssim 40$  confirmed by WMAP and Planck should be taken into account and studied seriously.

A more elaborated class of model suggested by previous studies of sharp features in the inflaton potential caused, e.g. by a fast phase transition occurred in another field coupled to the inflaton during inflation:

WWI (Wiggly Whipped inflation)

D. K. Hazra, A. Shafieloo, G. F. Smoot and A. A. Starobinsky, arXiv:1405.2012

In particular, the potential with a sudden change of its first derivative:

$$V(\phi) = \gamma\phi^2 + \lambda\phi^p(\phi - \phi_0)\theta(\phi - \phi_0)$$

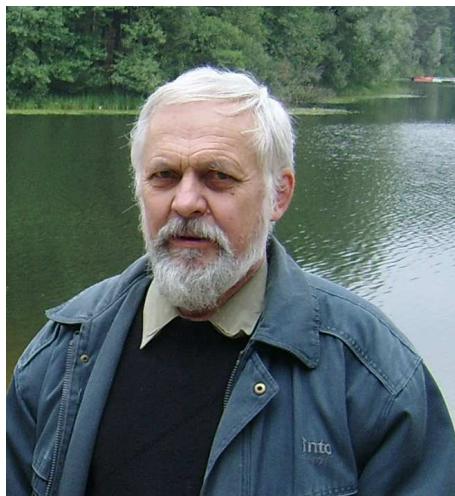
which generalizes the exactly soluble model considered in A. A. Starobinsky, JETP Lett. **55**, 489 (1992) produces  $-2\Delta \ln \mathcal{L} = -11.8$  compared to the best-fitted power law scalar spectrum, partly due to the better description of wiggles at both  $\ell \approx 40$  and  $\ell \approx 22$ .

A sharp feature in the potential leads to a rapid increase of the effective inflaton mass,  $m^2 = V''(\phi)$ , in the vicinity of  $\phi = \phi_0$ . While  $m \approx 2 \times 10^{13}$  GeV for  $\phi < \phi_0$ , it becomes of the order of  $10^{14}$  GeV and larger at earlier times when  $\phi \geq \phi_0$  (but still much less than the energy density scale of the inflaton potential  $\sim 3 \times 10^{16}$  GeV).

### 3.6 Conclusions

- Inflation is being transformed into a normal physical theory, based on some natural assumptions confirmed by observations and used to obtain new theoretical knowledge from them.
- First quantitative observational evidence for small quantities of the first order in the slow-roll parameters:  $n_s(k) - 1$  and  $r(k)$ .
- The quantitative theoretical prediction of these quantities is based on gravity (space-time metric) quantization and requires very large space-time curvature in the past of our Universe with a characteristic length only five orders of magnitude larger than the Planck one.
- The BISEP2 result by itself is the confirmation of the general prediction (made in 1979) of the early Universe scenario with the de Sitter (inflationary) stage preceding the radiation dominated stage (the hot Big Bang).
- However, would the BISEP2 result be confirmed, inflation is not so simple: the scalar primordial power spectrum deviates from a scale-free one that implies the existence of some scale (i.e. new physics) during inflation.
- Though the Einstein gravity plus a minimally coupled inflaton remains sufficient for description of inflation with existing observational data, modified (in particular, scalar-tensor or  $f(R)$ ) gravity can do it as well.
- The conceptual change in utilizing CMB and other observational data from "proving inflation" to using them to determine the spectrum of particle masses in the energy range  $(10^{13} - 10^{14})$  GeV by making a "tomographic" study of inflation.

**Ю.Г. Игнатьев. Кинетика установления  
термодинамического равновесия в  
ускоренной Вселенной при наличии  
скейлинга взаимодействий в унитарном  
пределе**



**Professor Yu.G. Ignat'ev:** Kinetics of establishments of the  
thermodynamic equilibrium in the accelerated Universe at  
presence scaling interactions in a unitary limit  
Kazan Federal University, Lobachevsky Institute of Mathematics  
and Mechanics

**Аннотация.** В статье рассмотрены неравновесные космологические сценарии в предположении восстановления скейлинга во взаимодействиях элементарных частиц при сверхвысоких энергиях выше унитарного предела. На основе точного решения уравнения энергобаланса получено строгое доказательство о принципиальной недостижимости термодинамического равновесия в ускоренной Вселенной. Представлены и проанализированы результаты численного моделирования построенной ранее строгой математической модели процесса восстановления термодинамического равновесия в изначально неравновесной ультрарелятивистской космологической плазме во Вселенной с произвольным ускорением в предположении восстановления скейлинга во взаимодействиях элементарных частиц при энергиях выше унитарного предела. Найдены предельные параметры неравновесного распределения выживших реликтовых частиц. Выдвинуто предположение о принципиальной возможности детектирования «истинно реликтовых частиц», несущих информацию о самых первоначальных стадиях эволюции Вселенной.

## 4.1 Условия локального термодинамического равновесия космологической плазмы

Одним из главных положений стандартного космологического сценария (SCS)<sup>1</sup> является предположение о локальном термодинамическом равновесии (LTE) космологической плазмы на раннем этапе расширения Вселенной. Как известно, для установления LTE в статистической системе необходима малость эффективного времени между столкновениями частиц,  $\tau_{eff}$ , по сравнению с характерным времененным масштабом эволюции системы. В космологической ситуации таким масштабом является возраст Вселенной, а более точно, – обратная величина логарифмической производной масштабного фактора,  $a(t)$ . Это приводит к следующему известному условию LTE в расширяющейся ультрарелятивистской космологической плазме<sup>2</sup>:

$$\frac{\dot{a}}{a} \tau_{eff} \ll 1, \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{n(t) \sigma_{tot}} \ll 1, \quad (1)$$

где  $a(t)$  – масштабный фактор,  $\dot{a} \equiv da/dt$ ,  $n(t)$  – плотность числа частиц,  $\sigma_{tot}$  – полное сечение рассеяния частиц в парных столкновениях.

### 4.1.1. Кинематика четырехчастичных столкновений

Четырехчастичные реакции типа



полностью описываются двумя кинематическими инвариантами,  $s$  и  $t$  (см, например, [2] (1979)):

$$s = (p_a + p_b)^2 \equiv (p_a + p_b, p_a + p_b), \quad (3)$$

квадратом энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс, и

$$t = (p_c - p_d)^2 = (p_b - p_d)^2. \quad (4)$$

релятивистским квадратом переданного импульса:<sup>3</sup>. Далее  $(p, q) \equiv g_{ik} p^i q^k$  – скалярное произведение векторов  $p, q$  относительно метрики  $g$ ,  $a, b$  – индексы частиц,  $i, k = \overline{1, 4}$ ;  $\sqrt{s}$  – энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ).

<sup>1</sup>см., например, [1] (2008)

<sup>2</sup>Мы выбираем планковскую систему единиц  $G = \hbar = c = 1$ .

<sup>3</sup>Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений:  $t$  – время в метрике Фридмана,  $s$  – ее интервал, одновременно  $t$ ,  $s$  – кинематические инварианты. Эти обозначения являются стандартными и мы не сочли необходимым их менять.

При этом инвариантные амплитуды рассеяния  $F(s, t)$ , определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц,  $s$  и  $d$ , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов:

$$\overline{|M_{FJ}|^2} = |F(s, t)|^2, \quad (5)$$

где  $S_i$  - спины частиц. С помощью инвариантной амплитуды  $F(s, t)$  определяется полное сечение реакции (2):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt |F(s, t)|^2, \quad (6)$$

где  $m_i$  - массы покоя частиц,  $\lambda$  - функция треугольника:

$$\lambda^2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc,$$

и

$$t_{min}^{\max} = \frac{4}{s} [(m_c^2 - m_a^2 + m_b^2 - m_d^2)^2 - (\sqrt{\lambda} \mp \sqrt{\lambda'})^2],$$

где для сокращения приняты обозначения:

$$\lambda = \lambda(s, m_a^2, m_b^2); \quad \lambda' = \lambda(s, m_c^2, m_d^2).$$

В ультрарелятивистском пределе

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (7)$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b); \quad \lambda \rightarrow s^2;$$

$$t_{min} \rightarrow -s; \quad t_{max} \rightarrow 0; \quad \frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty,$$

и формула (6) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s}; \quad (8)$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (9)$$

Таким образом, полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта  $s$  - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s). \quad (10)$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

#### 4.1.2. Влияние зависимости $\sigma(s)$ на процесс восстановления LTE

В пространственно-плоской метрике Фридмана<sup>4</sup>, которая будет рассматриваться в статье,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11)$$

интегралом движения является *конформный импульс* (см., например, [3] (1982))

$$\tilde{p} = a(t)p = \text{const}, \quad (12)$$

где  $p = \sqrt{-g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta}$  – физический трехмерный импульс ( $\alpha, \beta = \overline{1, 3}$ ),  $a$  – масштабный фактор. Таким образом, для ультрарелятивистских частиц

$$s \sim p^2 \sim a^{-2}. \quad (13)$$

Предполагая степенную зависимость полного сечения рассеяния частиц от  $s$

$$\sigma_{tot} \sim s^\nu \quad (14)$$

и *баротропическое* суммарное уравнение состояния материи  $p = \varkappa \varepsilon$ , где  $p$  – суммарное давление<sup>5</sup>,  $\varepsilon$  – суммарная плотность энергии,  $\varkappa$  – коэффициент баротропы, при условии сохранения полного числа частиц  $n(t)a^3(t) = \text{const}$  приедем к следующему выводу [4] (1986).

**Утверждение 1** *При выполнении условия*

$$4\nu + 3(1 - \varkappa) > 0; \quad (\varkappa \neq -1), \quad (15)$$

*LTE поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:*

$$\nu > -\frac{3}{4}(1 - \varkappa) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (16)$$

*а при выполнении обратного к (16) условия LTE нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних  $t > t_0$ .*

В частности,

1<sup>0</sup>. в случае ультрарелятивистского уравнения состояния  $\varkappa = 1/3$  получим из (16) условие существования LTE на ранних стадиях расширения [4] –

$$\nu > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad p = \frac{1}{3}\varepsilon; \quad (17)$$

2<sup>0</sup>. в случае предельно жесткого уравнения состояния  $\varkappa = 1$  условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию –

$$\nu > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon) \quad (18)$$

(отсюда следует, что при постоянном сечении рассеяния  $\nu = 0$  в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия LTE [4], - на этой стадии расширения во Вселенной LTE существует либо во все времена, либо всегда отсутствует);

3<sup>0</sup>. в случае инфляции  $\varkappa = -1$  при выполнении условия

$$\nu > -\frac{3}{2} \quad (19)$$

<sup>4</sup> как, впрочем, и для любой другой метрики Фридмана

<sup>5</sup> в отличие от импульса,  $p$ , давление выделено прямым римским шрифтом,  $p$ .

LTE поддерживается на ранних стадиях ( $t < t_0$ ) и нарушается на поздних ( $t > t_0$ ). Последнее, разумеется, верно при сохранении полного числа частиц на инфляционной стадии расширения.

## 4.2 Унифицированное асимптотическое сечение рассеяния

### 4.2.1. Унитарность и унитарный предел

Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд  $F(s, t)$  в пределе (7). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями  $\sqrt{s}$  порядка нескольких TeV. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий порядка  $10^{11} \div 10^{16}$  TeV. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории  $S$ -матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность  $S$ -матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [5]):

$$\frac{d\sigma}{dt} \Big|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

при значениях  $s$  выше унитарного предела, т.е., при условии (7), если под  $m_i$  понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (9) следует:

$$F(s, 1) \Big|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (21)$$

Понятие *унитарного предела* впервые было введено Л.Д. Ландау в 1940 г. применительно к векторным мезонам [6]. Следуя этой работе, под энергией унитарного предела в дальнейшем будем понимать такую критическую энергию, выше которой прекращается рост эффективного сечения взаимодействия и поведение сечения взаимодействия подчиняется условию унитарности. Например, для стандартного  $\nu e$ -рассеяния энергия унитарного предела  $E_u = \sqrt{s_u}$  составляет (см., например, [5])  $\sqrt{\sqrt{2}\pi/G} \approx 600$  GeV, где  $G$  - константа электрослабого взаимодействия.

### 4.2.2. Асимптотическое поведение сечений рассеяния частиц в области сверхвысоких энергий

На основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (22)$$

где  $C_1, C_2$  - неизвестные константы. Верхний предел (22) был установлен в работах [7] (1961), [8] (1963), [9] (1966), нижний - в [10] (1964), [11] (1965) см. также обзор в книге

[12] (1967). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния [12]:

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (23)$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (24)$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (7) должны быть функциями лишь переменной  $x = -t/s$ , т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (25)$$

Но тогда вследствие (9)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s} \quad (26)$$

— полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (26) лежит строго посредине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (22). Кроме того при выполнении (26) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы (20) и (21).

#### 4.2.3. Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела  $s \rightarrow \infty$ . Возникает вопрос о значении константы в формуле (26) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть  $m$  - масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку  $\sqrt{s}$  - энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение  $\sqrt{s}$  для четырехчастичных реакций с частицами массы  $m$  равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (27)$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии  $E_{pl} = m_{pl} = 1$ , то при  $s \sim 1$  все четырехчастичные взаимодействия должны описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (28)$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (29)$$

- планковское значение кинематического инварианта  $s$ , соответствующее двум сталкивающимся планкенонам массой  $m_{pl}$  и комптоновского масштаба  $l_{pl}$ :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (= 1). \quad (30)$$

Однако, для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$  ( $m_e$  - масса электрона,  $\sigma_T$  - томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при  $s \sim 4m_e^2$ , оно должно падать обратно пропорционально  $s$ , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (ACS), впервые предложенное в работах [13], [4], (см. также [14])<sup>6</sup>:

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi\beta}{sL(s)}, \quad (31)$$

где  $\beta \sim 1$ ,  $L(s)$  - логарифмический фактор:

$$L(s) = 1 + \ln^2 \left( 1 + \frac{s_0}{s} \right) > 1, \quad (32)$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта  $s$  –

$$\frac{dL}{ds} < 0,$$

а  $s_0 = 4$  - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$L(s_0) \simeq 1, \quad (33)$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при  $s = m_e^2$ :

$$\frac{1}{\sqrt{L(m_e^2)}} \approx \frac{1}{102} \simeq \alpha \approx \frac{1}{137}, \quad (34)$$

где  $\alpha = 1/137$  – постоянная тонкой структуры.

Соотношение (34) позволяет рассматривать величину  $1/\sqrt{L(s)}$  как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия, что, в свою очередь, реализует идеологию бегущих констант взаимодействия стандартных теорий фундаментальных взаимодействий типа  $SU(5)$ .

Введенное формулой (31), сечение рассеяния  $\sigma_0$ , ACS, обладает рядом замечательных свойств (см. также Figure 10):

- 1<sup>o</sup>. ACS образовано лишь из фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ ;
- 2<sup>o</sup>. ACS ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (22), установленных с помощью асимптотической теории  $S$ -матрицы;
- 3<sup>o</sup>. ACS с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
- 4<sup>o</sup>. ACS с удивительной точностью совпадает на соответствующих масштабах энергии с сечениями всех известных фундаментальных процессов, начиная от электромагнитных и кончая гравитационными, на огромном диапазоне значений энергии (от

<sup>6</sup>По сравнению с предыдущими работами мы вернулись к первоначальному определению логарифмического фактора  $L$  [4], к необходимости этой ревизии привели именно результаты численного моделирования.

$m_e$  до  $10^{22}m_e$ ) — при этом значения первого кинематического инварианта изменяется на 44 порядка! (см. Figure 10).

В предыдущих работах Автора были приведены достаточно убедительные аргументы в пользу скейлингового поведения сечений рассеяния четырехчастичных реакций в области *энергий выше унитарного предела*. В частности, было проведено сравнение сечений рассеяния некоторых конкретных четырех-частичных реакций с величиной асимптотического сечения рассеяния в соответствующих областях энергий. Тем не менее, при обсуждении этого вопроса со специалистами в квантовой теории поля часто приходится сталкиваться с неприятием гипотезы о скейлинговом характере фундаментальных взаимодействий в области сверхвысоких энергий. Согласно пониманию Автора это неприятие вызвано, во-первых, ограниченным диапазоном энергий при вычислении сечений рассеяния конкретных процессов, а, во-вторых, «взглядом снизу» в смысле энергий ниже унитарного предела на процедуры квантовых вычислений сечений рассеяния. В конце-концов, если мы являемся гравитационистами и верим в идею объединения всех взаимодействий, мы должны, во-первых, признать хотя-бы простой факт, что на планковских масштабах энергий сечение взаимодействия должны иметь планковскую величину, а, во-вторых, поставить вопрос, каким образом сечение этого единого фундаментального взаимодействия может упасть на 44 порядка, начиная с масштабов электромагнитных взаимодействий. Единственный закон, который может дать такое соответствие — это  $\sigma \sim 1/s$ .

Тем не менее, для устранения этого «мелкомасштабного недоразумения» мы приведем в этой статье сравнение величин асимптотического сечения рассеяния (31) с сечениями рассеяния хорошо изученных квантовых четырехчастичных процессов в графическом формате (Рис. 10).

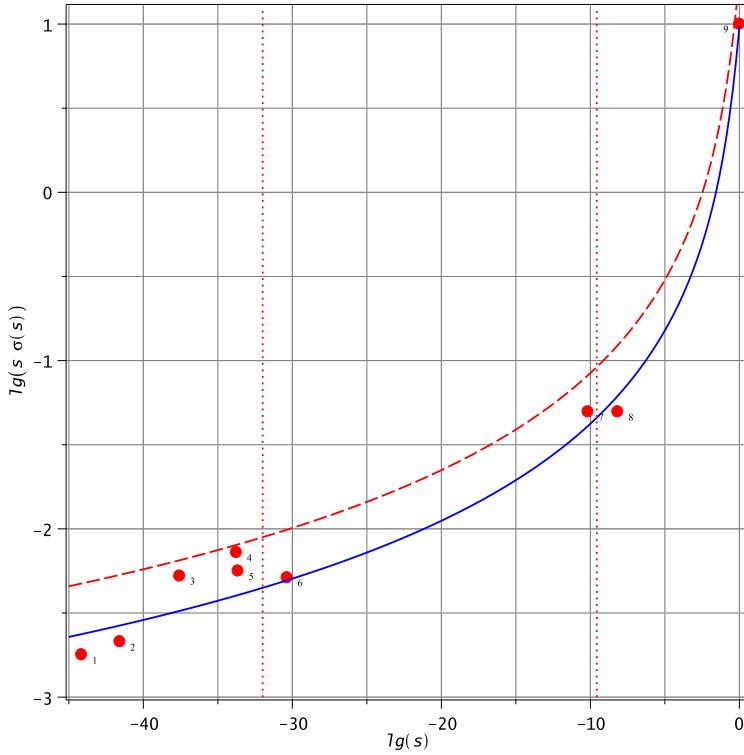
Эти замечательные качества ACS, вряд-ли, могут быть случайными и позволяют нам в дальнейшем применять ACS в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

### 4.3 Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

#### 4.3.1. Упрощение релятивистского интеграла столкновений

Процесс установления термодинамического равновесия описывается релятивистскими кинетическими уравнениями. В работе [3] (1982) показано, что релятивистские кинетические уравнения конформно инвариантны в ультрарелятивистском пределе при наличии скейлинга взаимодействий.

Этот факт является основой для утверждения о том, что, по крайней мере, в ультрарелятивистской Вселенной, LTE могло нарушаться.



**Рис. 10.** Сравнение универсального сечения рассеяния (31) при факторе  $\beta = 1$  с известными сечениями фундаментальных процессов — жирная линия. Пунктирная линия соответствует графику универсального сечения рассеяния при факторе  $\beta = 2$ . На оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма первого кинематического инварианта,  $\lg s$ , в планковских единицах; по оси ординат отложены значения десятичного логарифма безразмерного инварианта,  $\lg s\sigma(s)$ . 1 — томпсоновское рассеяние, 2 — комптоновское рассеяние на электронах при  $E_{SCM} = 10$  Mev, 3 — комптоновское рассеяние электронов при  $E_{SCM} = 1$  Gev, 4 — электрослабое взаимодействие с участием:  $W$  - бозонов, 5 — с участием  $Z$  - бозонов, 6 —  $H$ -бозонов при энергии порядка 7 Tev ( $\sigma \sim 10\text{fb}$ ); 7 —  $SU(5)$  - взаимодействие при массе сверхтяжелых  $X$ -бозонов  $10^{15}$  Gev, 8 —  $10^{14}$  Gev; 9 — гравитационное взаимодействие на планковских масштабах. Вертикальные пунктирные линии соответствуют значениям энергии унитарного предела для  $SU(2) \times SU(1)$  - взаимодействий,  $E_u = 617$  Gev, и  $SU(5)$  - взаимодействий,  $E_u \sim 10^{14}$  Gev.

Итак, будем рассматривать однородные изотропные распределения частиц в метрике Фридмана (11). Такие распределения описываются функциями:

$$f_a(x^i, p^k) = f_a(t, p). \quad (35)$$

Релятивистские кинетические уравнения относительно однородных изотропных распределений (35) принимают вид (подробности см. в [15], [16], [17], [18], [19]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(t, p), \quad (36)$$

где  $J_{ab}(t, p)$  — интеграл четырехчастичных реакций [19], [17]:

$$J_{ab}(t, p) = (2\pi)^4 \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(p_a + p_b - p_c - p_d) \times [(1 \pm f_a)(1 \pm f_b)|f_c f_d \overline{|M_{cd \rightarrow ab}|^2} - (1 \pm f_c)(1 \pm f_d)f_a f_b \overline{|M_{ab \rightarrow cd}|^2}], \quad (37)$$

знаки  $\pm$  соответствуют бозонам (+) и фермионам (-),  $M_{i \rightarrow f}$  - инвариантные амплитуды рассеяния (черта означает усреднение по состояниям поляризации частиц),  $d\pi_a$  - нормированный элемент объема импульсного пространства  $a$ -той частицы:

$$d\pi_a = \sqrt{-g} \frac{\rho_a dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^3 p_4}, \quad (38)$$

$\rho_a$  - фактор вырождения.

Упростим интеграл четырехчастичных взаимодействий (38), используя свойства изотропии распределений  $f_a(t, p)$ . Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным переменным перейдем в локальную систему центра масс, в которой интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве в ультрарелятивистском пределе (7) найдем ([4], [20]):

$$J_{ab}(p) = -\frac{2S_b + 1}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty dq \int_0^{4pq} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi \{ f_a(p) f_b(q) [1 \pm f_c(p - \Delta)] [1 \pm f_d(q + \Delta)] - f_c(p - \Delta) f_d(q + \Delta) [1 \pm f_a(p)] [1 \pm f_b(q)] \}, \quad (39)$$

где  $x = -t/s$  безразмерная переменная (8), и

$$\Delta = x(p - q) - \cos \varphi \sqrt{x(1 - x)(4pq - s)}. \quad (40)$$

#### 4.3.2. Релятивистские кинетические уравнения в терминах конформно соответствующего пространства

Учитывая тот факт, что переменная  $\tilde{p}$  (12) является интегралом движения в метрике Фридмана и при этом для любой функции  $\Psi(t, p)$  имеет место соотношение [15]:

$$\frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial \Psi(t, p)}{\partial p} = \frac{\partial \Psi(t, \tilde{p})}{\partial t}, \quad (41)$$

преобразуем кинетические уравнения для однородных изотропных распределений к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta} = \frac{a}{\sqrt{m_a^2 + p^2}} \sum_{b,c,d} J_{ab}(\eta, p), \quad (42)$$

куда необходимо подставить  $p = \tilde{p}/a$ .

Заметим, что с другой стороны переход к переменной (12),  $\tilde{p}$ , фактически является конформным преобразованием к однородному статическому пространству

$$ds^2 = a^2 ds_0^2 = a^2 (d\eta^2 - dl^2),$$

при котором физическая компонента импульса,  $p$ , преобразуется по закону:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}. \quad (43)$$

Таким образом, импульсная переменная (12),  $\tilde{p}$ , есть абсолютная величина физического импульса в конформно соответствующем статическом пространстве постоянной кривизны<sup>7</sup>, а  $\eta$  - временная переменная в этом пространстве.

Плотности числа частиц,  $n(\eta)$ , и плотности их энергии,  $\varepsilon(\eta)$ , относительно изотропного распределения частиц,  $f(\eta, p)$  определяются формулами:

$$n(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty p^2 f(\eta, p) dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (44)$$

$$\varepsilon(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + p^2} p^2 f(\eta, p) dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3} \int_0^\infty \tilde{p}^2 \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2/a^2} f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \quad (45)$$

В связи с этим удобно ввести конформные плотности числа частиц,  $\tilde{n}(\eta)$ , а для ультрарелятивистских частиц - и плотности их энергии,  $\tilde{\varepsilon}(\eta)$ :

$$\tilde{n}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}; \quad (46)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{m^2 + \tilde{p}^2} \tilde{p}^2 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p} \approx \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \tilde{p}^3 f(\eta, \tilde{p}) d\tilde{p}. \quad (47)$$

Тогда имеют место два соотношения:

$$\tilde{n}(\eta) = n(\eta) a^3(\eta); \quad (48)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\eta) \approx \varepsilon(\eta) a^4(\eta); \quad (p/m \rightarrow \infty), \quad (49)$$

из которых первое выполняется строго, а второе, - асимптотически, в ультрарелятивистском пределе.

#### 4.3.3. Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц,  $n_e(t)$ , находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц,  $n_{ne}(t)$ , -

$$n_{ne}(t) \ll n_e(t) \quad (50)$$

тепловое равновесие нарушено (см.Рис. 11). Причем в дальнейшем в этой статье мы будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии, меньших некоторого унитарного предела,  $p = p_0$

<sup>7</sup>В рассматриваемом случае – в пространстве Минковского

(или  $T = T_0$ ), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = [\exp(\frac{-\mu_a + E_a(p)}{T}) \pm 1]^{-1}, & p < p_0; \\ \Delta f_a(p); f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p > p_0, \end{cases} \quad (51)$$

где  $\mu_a(t)$  - химические потенциалы,  $T(t)$  - температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области  $p > p_0$  может наблюдаться аномально большое по сравнению с равновесным числом частиц, но при этом малое (см. (50)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения  $f_a(p)$  к равновесному  $f_a^0(p)$ . Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения  $f(t=0, p)$  решалась ранее в [13], [4], [20]. Здесь мы дадим общее решение этой задачи. При этом, как будет видно из дальнейшего, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему - равновесную с распределением  $f_a^0(t, p)$ , и неравновесную, сверхтепловую, с распределением  $\delta f_a(t, p) = \Psi(t, p)$ , причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна. Исследуем интеграл столкновений (39) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \quad (52)$$

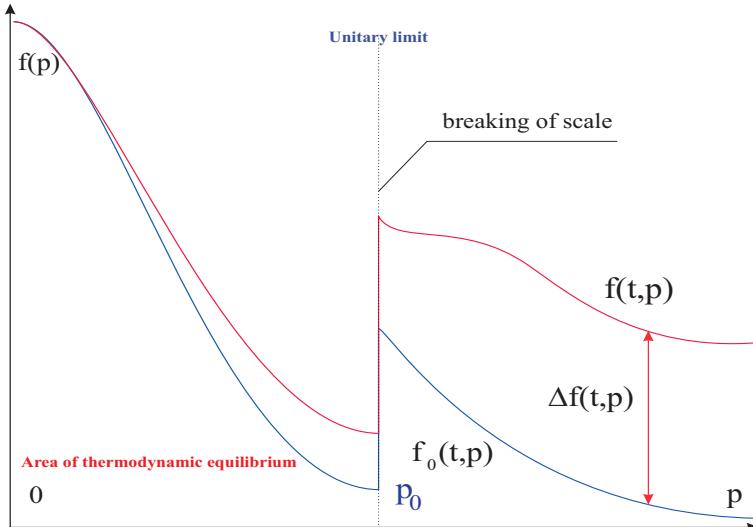


Рис. 11. Схематическое изображение отклонения функции распределения от равновесия.

Вследствие неравенства (51) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов,  $p' = p - \Delta$ , либо  $q' = q + \Delta$  должно лежать в тепловой области, второго - в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (39) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым лишь в асимптотически малых областях изменения переменных

$x$  и  $\varphi$ :  $x(1-x) \lesssim T/p \rightarrow 0$ . Статистические факторы вида  $[1 \pm f_a(p')]$  в первом члене интеграла (39) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (39) можно записать в виде [20]:

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p) \Big|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^{\infty} \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \frac{ds}{16\pi} \int_0^1 dx |F(x, s)|^2. \quad (53)$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния (39), получим из (53):

$$J_{ab \leftrightarrow cd}(p) \Big|_{p \geq p_0} = \frac{(2S_b + 1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int_0^{\infty} \frac{q f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \int_{2p(q^4 - q)}^{2p(q^4 + q)} \sigma_{tot} s(s) ds. \quad (54)$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для  $\sigma_{tot}$  в форме ACS, (31), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$J_a(p) \Big|_{p \geq p_0} = -\Delta f_a(p) \sum_b \frac{4(2S_b + 1)\nu_{ab}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 f_b^0(q) dq}{\sqrt{m_b^2 + q^2}} \frac{1}{L(\bar{s})}, \quad (55)$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{2}pq^4,$$

$\nu_{ab}$  - число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта  $a$ .

Вычислим значения интеграла (55) в предельных случаях.

#### 4.3.4. Выражения для равновесных плотностей

Выпишем выражения для макроскопических плотностей относительно равновесных распределений  $f_a^0(p)$  (44), (45),  $\overset{0}{n}$ , и энергии,  $\overset{0}{\varepsilon}$ . В случае газа безмассовых частиц ( $\mu = 0$ ) получим (см., например, [21]):

$$\overset{0}{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (56)$$

$$\overset{0}{\varepsilon} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (57)$$

где  $\rho$  - число независимых поляризаций (спина) частицы ( $\rho = 2$  - для фотонов и безмассовых нейтрино),  $g_a$  - статистический фактор:

$$\begin{aligned} g_n &= g_e = 1 \quad \text{for Bose particles;} \\ g_n &= 3/4, \quad g_e = 7/8 \quad \text{for Fermi particles.} \end{aligned} \quad (58)$$

знак “+” соответствует фермионам, “-” - бозонам,  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  есть функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \overset{0}{\varepsilon}_a = N \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (59)$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S+1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S+1) \right] \quad (60)$$

- эффективное число типов частиц ( $S$  - спин частицы)<sup>8</sup>; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Введем числа типов бозонов и фермионов,  $N_B$  и  $N_F$ :

$$N_B = \frac{1}{2} \sum_B (2S+1); \quad N_F = \frac{1}{2} \sum_F (2S+1). \quad (61)$$

Тогда:

$$N = N_B + \frac{7}{8} N_F. \quad (62)$$

Для газа нерелятивистских частиц:

$$\overset{0}{n}_a \approx \delta \overset{0}{n}_\gamma = \delta \frac{2T^3}{\pi^2} \zeta(3), \quad \varepsilon_a \approx m_a n_a, \quad (63)$$

где  $\overset{0}{n}_\gamma$  - плотность числа реликтовых фотонов,

$$\delta \sim 10^{-10}. \quad (64)$$

Следует отметить, что возможная относительная средняя концентрация частиц небарионной природы темной материи,  $\delta_{nb}$ , при ее плотности порядка 25% от критической плотности,  $\rho_c \approx 0.9 \cdot 10^{-29} \text{ g/cm}^3$ , и ожидаемой минимальной массе частиц порядка 50 GeV еще меньше  $1/\delta$  и составляет порядка  $0.5 \cdot 10^{-11}$ .

#### 4.3.5. Рассеяние на нерелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  нерелятивистские, т.е.,  $q \ll m_b$ , то интеграл (55) сводится к выражению:

$$J_a(p) \Big|_{p \geq p_0} = -32\pi^2 \Delta f_a(p) \sum_b \frac{\overset{0}{n}_b(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1 + \ln^2 pm_b/2}, \quad (m_b > T). \quad (65)$$

#### 4.3.6. Рассеяние на ультрарелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта  $b$  являются ультрарелятивистскими, т.е.,  $m_b \ll T$ , причем их химический потенциал мал, -  $\mu_b \ll T$ , то вычисляя интеграл (55) относительно равновесного распределения (51), найдем:

$$J_a(p) \Big|_{p \geq p_0} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{N} T^2(t)}{1 + \ln^2 T p/2} \Delta f_a(p), \quad (m_b \ll T, \mu_b \ll T), \quad (66)$$

<sup>8</sup>В полевых моделях взаимодействий типа SU(5)  $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$ .

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S+1) + \frac{1}{2} \sum_F (2S+1) \right] = N_B + \frac{1}{2} N_F;$$

$N_B$  - число сортов равновесных бозонов,  $F$  - фермионов.

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$\frac{J_{non}}{J_{ultra}} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3) \delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9} \frac{T}{m_b}, \quad (67)$$

- отношение вкладов мало при  $T \ll 10^9 m_b$  и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебречь.

## 4.4 Построение и решение уравнения энергобаланса

Построим строгую самосогласованную математическую модель восстановления теплового равновесия в расширяющейся Вселенной в условиях слабого нарушения равновесия в смысле малости числа неравновесных частиц по сравнению с числом равновесных частиц (50). Заметим, что при этом энергия, заключенная в неравновесном высокогенеретическом «хвосте» распределения,  $\Delta f_a(t, p)$ , может быть большой и даже значительно превышать энергию равновесной компоненты космологической плазмы. Выпишем сначала основные соотношения, определяющие динамику космологической плазмы. Заметим также, что основные положения теории восстановления термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением, основанные на *методе уравнения энергобаланса*, были разработаны в предыдущих статьях Автора [22] [23], [24].

### 4.4.1. Модель материи

Как известно (см., например, [25]), уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (68)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p(\varepsilon)) = 0. \quad (69)$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_s; \quad p = p_p + p_s, \quad (70)$$

где  $\varepsilon_p, p_p$  – плотность энергии и давление космологической плазмы,  $\varepsilon_s, p_s$  – плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной.

*Инвариантное ускорение Вселенной*

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (71)$$

связано с *эффективным коэффициентом баротропы* материи,  $\varkappa \equiv p/\varepsilon$ , соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa). \quad (72)$$

Таким образом, на стадии ускорения ( $t > t_1$ ):

$$0 < \Omega < 1, \Rightarrow -1 < \varkappa < -\frac{1}{3}. \quad (73)$$

До этого момента  $\varkappa \in [1/3, -1/3]$ . Согласно (68) – (69) масштабный фактор и суммарная плотность энергии *при заданном постоянном коэффициенте баротропы* меняются по закону:

$$a = a_1 t^{2/3(\varkappa+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varkappa+1)^2 t^2}, \quad \varkappa + 1 \neq 0 \quad (74)$$

Используя связь (72), перепишем соотношения (74) в более удобном для нас виде:

$$a = a_1 t^{1/(1-\Omega)}; \quad \varepsilon = \frac{3}{8\pi(1-\Omega)^2 t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (75)$$

Заметим, что при любых значениях инвариантного ускорения  $\Omega = \text{Const} \in [-1, 1)$  плотность энергии пропорциональна  $t^{-2}$ .

#### 4.4.2. Основные предположения модели

Примем следующие предположения в нашей модели:

1<sup>o</sup>. Скейлинговый характер взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий и унификация всех межчастичных взаимодействий на основе фундаментальных постоянных  $G, \hbar, c$  при энергиях выше унитарного предела, что приводит к формуле универсального асимптотического сечения рассеяния (31);

2<sup>o</sup>. *Минимальность связи фундаментальных макроскопических полей с космологической плазмой*. Это автоматически означает, что закон сохранения энергии (75) выполняется по отдельности для фундаментальных полей и плазмы:

$$\dot{\varepsilon}_s + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_s + p_s(\varepsilon_s)) = 0, \quad (76)$$

$$\dot{\varepsilon}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_p + p_p(\varepsilon_p)) = 0. \quad (77)$$

3<sup>o</sup>. *Ультрарелятивистское уравнение состояния космологической плазмы* на рассматриваемой стадии расширения:

$$p_p = \frac{1}{3}\varepsilon_p, \quad (77) \Rightarrow \varepsilon_p a^4 = \text{Const.} \quad (78)$$

4<sup>o</sup>. *Ультрарелятивистское начало Вселенной*:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varkappa = \frac{1}{3}. \quad (79)$$

#### 4.4.3. Баланс энергии космологической плазмы

Основой развивающейся здесь теории является *уравнение энергобаланса* космологической плазмы, являющееся, фактически, законом сохранения ее энергии. Для случая суммарного ультрарелятивистского состояния материи эта теория была построена автором в работах [4], [20]. Здесь мы обобщим и детализируем результаты этой теории на случай произвольного суммарного уравнения состояния материи. Из (77) с учетом (78) сразу следует:

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const}, \quad (80)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_p$  — конформная плотность энергии космологической плазмы. Определим эту константу, полагая согласно (75) на начальной ультрарелятивистской стадии расширения:

$$a(t)|_{t \rightarrow 0} = \sqrt{t}. \quad (81)$$

Тогда для конформной плотности энергии плазмы получим, предполагая, что космологическая плазма является единственной ультрарелятивистской компонентной материи, —

$$\tilde{\varepsilon}_p = \frac{3}{32\pi}. \quad (82)$$

Введем далее температуру  $T_0(t)$  космологической плазмы в идеальной Вселенной, в которой на данный момент космологического времени  $t$  вся плазма является локально равновесной. Таким образом, плотность энергии этой плазмы описывается формулой (59) с  $N = N_0$  — эффективным числом типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T_0$ . Отсюда с учетом (82) получим закон эволюции температуры плазмы в равновесной Вселенной:

$$T_0(t) = \frac{1}{a(t)} \left( \frac{45}{32\pi^3 N_0} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (83)$$

Относительно величины  $N_0$  — эффективного числа типов частиц, находящихся в термодинамическом равновесии, мы будем полагать, что  $N_0(t)$  — медленно меняющаяся функция космологического времени:

$$\dot{N}_0 t \ll 1. \quad (84)$$

Пусть теперь  $T(t)$  — истинная температура равновесной компоненты космологической плазмы, а  $\Delta f_a(p, t)$  — функция распределения « $a$ »-го сорта неравновесных частиц плазмы. Найдем плотности энергии равновесной,  $\varepsilon_e$ , и неравновесной,  $\varepsilon_{ne}$ , компонент:

$$\varepsilon_e = \frac{N\pi^2}{15} T^4(t); \quad (85)$$

$$\varepsilon_{ne} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty p^3 \Delta f_a(p, t) dp, \quad (86)$$

где  $S$  — спин частиц;  $N(t)$  — эффективное число типов равновесных частиц в плазме с температурой  $T(t)$ . Выражая далее с помощью (83) масштабный фактор через температуру  $T_0(t)$  и вводя новую *безразмерную* конформную импульсную переменную  $\tilde{p}$ :<sup>9</sup>

$$p = \left( \frac{45}{32\pi^3} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{\tilde{p}}{a(t)} = T_0(t) N_0^{\frac{1}{4}} \tilde{p}, \quad (87)$$

<sup>9</sup>В отличие от импульсной переменной,  $p$ , давление обозначается римским шрифтом, — р.

получим для (86):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p}. \quad (88)$$

Далее, из (83) и (85) получим для конформной плотности энергии равновесной компоненты плазмы:

$$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{3}{32\pi} y^4, \quad (89)$$

где введена безразмерная функция,  $y(t)$  – относительная температура [20]:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \leq 1. \quad (90)$$

Из (89) можно получить соотношение:

$$\sigma(t) \equiv y^4(t) \equiv \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_p} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_e}{\tilde{\varepsilon}_e + \tilde{\varepsilon}_{ne}}. \quad (91)$$

Таким образом, закон сохранения энергии космологической плазмы (82) с помощью соотношений (86) и (89) можно переписать в виде:

$$y^4 + \frac{15}{2\pi^4} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a(\tilde{p}, t) d\tilde{p} = 1. \quad (92)$$

Соотношение (92) и называется *уравнением энергобаланса плазмы*. Оно получено нами при использовании трех предположений модели –  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $4^\circ$ . Заметим, что в предыдущих статьях автора это основное соотношение математической модели восстановления термодинамического равновесия выводилось при более частных предположениях. При заданной зависимости функции распределения неравновесных частиц от температуры равновесной компоненты плазмы и космологического времени уравнение энергобаланса становится нелинейным интегральным уравнением относительно температуры равновесной компоненты. Следовательно, для получения этого уравнения в явной форме необходимо решить кинетическое уравнение для неравновесных частиц.

## 4.5 Кинетическое уравнение для неравновесных частиц

### 4.5.1. Решение кинетического уравнения

Уравнение энергобаланса (92), в свою очередь, определяется решением кинетического уравнения относительного неравновесного распределения  $\Delta f(t, p)$ . Используя здесь соотношение (87), приведем кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц (42) с интегралом столкновений (66) к виду:

$$\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{8\pi N}{3\tilde{p}L(\frac{1}{2}\tilde{p}T_0TN^{1/4})} \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} T^2(t) a(t) \Delta f_a. \quad (93)$$

Решая (93), получим:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp \left[ -\frac{8\pi}{3\tilde{p}} \left( \frac{2\pi^3}{45} \right)^{1/4} \int_0^t \frac{NaT^2 dt}{L(\frac{1}{2}\tilde{p} T_0 T N_0^{1/4})} \right], \quad (94)$$

где

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \equiv \Delta f_a(0, \tilde{p}). \quad (95)$$

#### 4.5.2. Переход к безразмерным нормированным переменным

Введем среднюю конформную энергию неравновесной компоненты ультрарелятивистских частиц в начальный момент времени,  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ , —

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\tilde{n}(0)} \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^3 d\tilde{p}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p}) \tilde{p}^2 d\tilde{p}} \quad (96)$$

и безразмерную нормированную импульсную переменную,  $\rho$ , —

$$\rho \equiv \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_0}, \quad (97)$$

так что

$$\langle \rho \rangle_0 = \frac{\tilde{\varepsilon}(0)}{\langle \tilde{p} \rangle_0 \tilde{n}(0)} \equiv 1 \Rightarrow \langle \rho \rangle_0 = \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^3 d\rho}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty \Delta f_a^0(\rho) \rho^2 d\rho} = 1. \quad (98)$$

Согласно математической модели неравновесной плазмы средняя энергия частиц в первоначальном неравновесном распределении должна быть больше и даже значительно больше тепловой энергии частиц, таким образом согласно (87), (96) в рассматриваемой нашей модели:

$$\langle \tilde{p} \rangle_0 \gg 1. \quad (99)$$

Фактически величина  $\langle \tilde{p} \rangle_0$  является *независимым параметром* рассматриваемой здесь модели, — физический смысл этого безразмерного параметра — отношение средней энергии частиц первоначального неравновесного распределения к температуре плазмы в равновесной Вселенной в начальный момент времени<sup>10</sup>. В отличие от конформной импульсной переменной  $\tilde{p}$  среднее значение безразмерной конформной импульсной переменной  $\rho$  в начальном распределении тождественно равно 1.

Преобразуем выражение в экспоненте (94), переходя к безразмерным переменным  $y, \rho$ . Учитывая слабую зависимость логарифмического фактора  $L$  от своих аргументов, а также убывающий характер подынтегральной функции в (94), примем следующую оценку логарифмического фактора:

$$L \left( \frac{1}{2} \tilde{p} T_0 T N_0^{1/4} \right) \simeq L(\langle \tilde{p} \rangle_0 T_0^2) \equiv L_0(t). \quad (100)$$

<sup>10</sup>Сами эти величины могут быть бесконечными, но их отношение конечно.

Таким образом, с логарифмической точностью представим решение (94) в компактной форме:

$$\Delta f_a(t, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \exp \left( -\frac{2}{\rho} \int_0^t \xi \frac{y^2}{a} dt \right), \quad (101)$$

где введено обозначение:

$$\xi \equiv \xi(t) = \left( \frac{5\pi}{18} \right)^{1/4} \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx 0.967 \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)} \approx \frac{N}{\langle \tilde{p} \rangle_0 N_0^{1/2} L_0(t)}. \quad (102)$$

Вводя теперь новую *безразмерную временную переменную*,  $\tau$ , –

$$\tau = 2 \int_0^t \frac{\xi}{a} dt, \quad (103)$$

такую, что:

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv 2 \frac{\xi}{a} > 0, \quad (104)$$

и новую *безразмерную функцию*,  $Z(\tau)$ , –

$$Z(\tau) = \int_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \quad (105)$$

приведем решение кинетического уравнения (101) к виду:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (106)$$

Исследуем *уравнение связи* (103) безразмерной временной переменной  $\tau$  и космологическим временем  $t$ . Полагая в (103) степенную зависимость масштабного фактора  $a(t)$  от космологического времени и принимая во внимание слабую зависимость от времени фактора  $\xi$ , получим:

$$a \sim t^\alpha \rightarrow \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, 0; \\ \tau \sim \ln t, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (107)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha \leq 1 \rightarrow \tau(\infty) = \infty$ , а при  $\alpha < 1 \rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < \infty$ . Сравнивая соотношение (107) с соотношениями (72) – (75), приходим к следующему важному выводу:

$$\begin{aligned} \varkappa &\geq -\frac{1}{3} \quad (\Omega \leq 0) \Rightarrow \tau(\infty) = +\infty; \\ \varkappa &< -\frac{1}{3} \quad (\Omega > 0) \Rightarrow \tau(\infty) = \tau_\infty < +\infty. \end{aligned} \quad (108)$$

Поскольку функция распределения неравновесной компоненты космологической плазмы (106) зависит от времени лишь посредством *монотонно возрастающей функции* безразмерной временной переменной  $Z(\tau)$ , то соотношения (108) означают, что в ультраполятистской космологической плазме во Вселенной с отрицательным ускорением асимптотически достигается полное термодинамическое равновесие, тогда как в

ускоряющейся Вселенной термодинамической равновесие никогда строго не достигается.

#### 4.5.3. Конформная плотность энергии неравновесной компоненты

Подставляя решение кинетического уравнения в форме (106) в выражение для конформной плотности энергии неравновесных частиц, получим

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} = \frac{45}{64\pi^5} \sum_a (2S+1) \int_0^\infty \tilde{p}^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \quad (109)$$

Произведем тождественное преобразование с этим выражением, учитывая что согласно определению (91) и уравнению энергобаланса (92):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \frac{3}{32\pi} : \quad (110)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ne} \equiv \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}^0}{\tilde{\varepsilon}_{ne}^0} \tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = (1 - \sigma_0) \Phi(Z) \frac{3}{32\pi}, \quad (111)$$

где мы с учетом преобразования к безразмерной импульсной переменной  $\rho$  (97) ввели новую безразмерную функцию  $\Phi(Z)$ :

$$\Phi(Z) \equiv \frac{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho) e^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}}{\sum_a (2S+1) \int_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^0(\rho)}. \quad (112)$$

#### 4.5.4. Решение и исследование уравнения энергобаланса

Вследствие определения (105) функция  $Z(\tau)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$Z'(\tau) = y^2(\tau) \Rightarrow Z'^2 = \sigma(\tau); \quad (113)$$

$$Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_0}, \quad (114)$$

где

$$Z' \equiv \frac{dZ}{d\tau} > 0. \quad (115)$$

Таким образом, с учетом (111) – (113) уравнение энергобаланса (92) можно переписать в виде дифференциального уравнения относительно функции  $Z(\tau)$ :

$$y^4 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) = 1 \Rightarrow Z'^2 + (1 - \sigma_0) \Phi(Z) = 1, \quad (116)$$

решая которое с учетом соотношений (114) – (115), найдем формальное решение в неявном виде:

$$\int_0^Z \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - \sigma_0) \Phi(u)}} = \tau. \quad (117)$$

Согласно определению (112) функция  $\Phi(Z)$  неотрицательна:

$$\Phi(Z) > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (118)$$

причем

$$\Phi(0) = 1; \quad \lim_{Z \rightarrow +\infty} \Phi(Z) = 0. \quad (119)$$

Вычисляя первую и вторую производную по  $Z$  от функции  $\Phi(Z)$ , дифференцируя соотношение (112) по  $Z$ , получим:

$$\Phi(Z)'_Z < 0, \quad (Z \in [0, +\infty)); \quad (120)$$

$$\Phi(Z)'' > 0, \quad (Z \in [0, +\infty)). \quad (121)$$

Вследствие (120) функция  $\Phi(Z)$  является строго монотонно убывающей, но тогда вследствие соотношений (119) эта функция ограничена на интервале:

$$\Phi(Z) \in [0, 1]; \quad (Z \in [0, +\infty)), \quad (122)$$

причем график функции  $\Phi(Z)$  вогнутый. Вследствие этих свойств функции  $\Phi(Z)$  уравнение  $\Phi(Z) = \Phi_0$  на рассматриваемом интервале значений всегда имеет одно и только одно решение  $Z = Z_0$ , т.е., *отображение  $Y = \Phi(Z)$  на множестве неотрицательных чисел является биективным*.

Далее, из соотношения (113) следует, что функция  $Z(\tau)$  является монотонно возрастающей на интервале  $\tau \in [0, \tau_\infty]$ . Дифференцируя соотношение (116) по  $\tau$  как сложную функцию, получим:

$$Z'[2Z'' + (1 - \sigma_0)\Phi'_Z] = 0. \quad (123)$$

Отсюда вследствие положительности  $Z'$  (116) найдем вторую производную:

$$Z'' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi'_Z. \quad (124)$$

Поэтому вследствие (120) и (90) – (91) получим из (124):

$$Z'' > 0, \quad (125)$$

т.е., график функции  $Z(\tau)$  также является вогнутым. Далее, дифференцируя (IV.53), получим с учетом (125):

$$y' > 0, \quad (126)$$

— т.е. функция  $y(\tau)$  (а вместе с ней и функция  $\sigma(\tau)$ ) является монотонно возрастающей. С другой стороны, она ограничена снизу начальным значением  $y_0$  ( $\sigma_0$ ), а сверху – значением 1:

$$y' > 0, y \in [y_0, 1); \quad \sigma' > 0, \sigma \in [\sigma_0, 1). \quad (127)$$

Перечисленные свойства функций  $y(\tau)$ ,  $Z(\tau)$  и  $\Phi(Z)$  обеспечивают биективность цепочки отображений  $\tau \leftrightarrow y$ ,  $y \leftrightarrow Z$ ,  $Z \leftrightarrow \Phi$ . В итоге, каждому значению  $\Phi$  соответствует одно и только одно значение  $Z$  и одно и только одно значение  $\tau$ :  $\tau \leftrightarrow \Phi$ . Для замыкания этой цепочки достаточно определить связь функций  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$  с помощью уравнения энергобаланса (117):

$$y = [1 - (1 - \sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \quad (128)$$

Уравнения (117) и (128) являются параметрическим решением уравнения энергобаланса (116), а вышеперечисленные свойства функций  $\Phi(Z)$  и  $Z(\tau)$  обеспечивают единственность его решения. Согласно (112) функция  $\Phi(Z)$  полностью определяется начальным распределением неравновесных частиц  $\Delta f_a^0(\rho)$ . Поэтому с математической точки зрения задача о восстановлении термодинамического равновесия во Вселенной с произвольным ускорением полностью решена. Конкретные модели определяются моделью темной материи и моделью первоначального неравновесного распределения частиц.

Продифференцируем теперь соотношение (124) по  $\tau$  и учтем связь (113) между функциями  $y(\tau)$  и  $Z(\tau)$ :

$$Z''' = -\frac{1}{2}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}Z' \Rightarrow y''y = -y'^2 - \frac{1}{4}(1 - \sigma_0)\Phi''_{ZZ}y^2. \quad (129)$$

Таким образом, вследствие (121):

$$y'' < 0, \quad (130)$$

— т.е., график функции  $y(\tau)$ , а вместе с ним и  $\sigma(\tau)$ , является выпуклым. Далее, поскольку  $\Phi_Z(Z \rightarrow \infty) = 0$ , из (124) следует:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} y'(\tau) = 0 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma'(\tau) = 0, \quad (131)$$

— т.е., значение  $\sigma = 1$  достигается асимптотически при  $\tau \rightarrow \infty$ . Это позволяет нарисовать качественный график функции  $y(\tau)$  (Figure 12). Конечность безразмерного времени  $\tau_\infty$  приводит к установлению предельного значения функции  $y(\tau)$ :

$$y(\tau_\infty) = y_\infty < 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_\infty < 1. \quad (132)$$

Вследствие этого часть энергии космологической плазмы навсегда консервируется в неравновесной сверхтепловой компоненте:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{ne}(t)}{\varepsilon_p(t)} = 1 - \sigma_\infty = \begin{cases} = 0, & \tau_\infty = \infty \\ > 0, & \tau_\infty < \infty \end{cases}. \quad (133)$$

Согласно (108) это возможно лишь для ускоренно расширяющейся Вселенной.

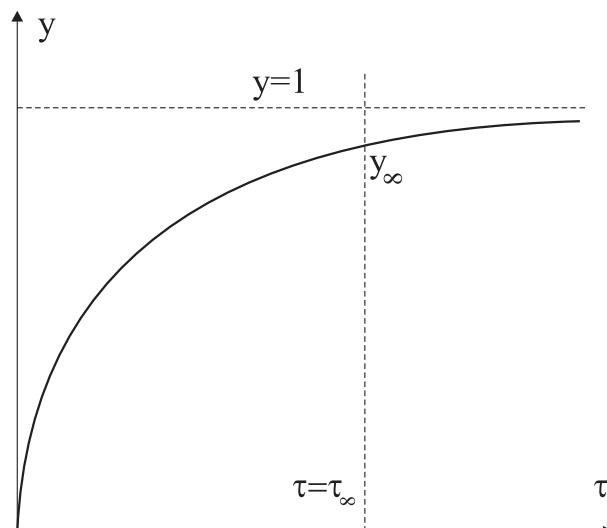


Рис. 12. Качественный вид графика функции  $y(\tau)$ .

## 4.6 Точная модель перехода с ультрарелятивистской стадии на инфляционную

Рассмотрим следующую простую модель материи, состоящей из двух компонент – минимально связанного массивного скалярного поля (космологический член) с уравнением состояния:

$$p_s = -\varepsilon_s, \quad (134)$$

и ультрарелятивистской плазмы с уравнением состояния (78). Тогда суммарный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение можно записать в виде:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} \frac{1-3\delta}{1+\delta}; \quad \Omega(t) = -\frac{1-\delta}{1+\delta}, \quad (135)$$

где

$$\delta = \delta(t) = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p}. \quad (136)$$

Таким образом, при  $\delta = \text{Const}$  формулы (74) можно записать в следующем удобном виде [30]:

$$a = a_1 t^{(1+\delta)/2}; \quad \varepsilon = \frac{3}{32\pi} \frac{(1+\delta)^2}{t^2}, \quad \Omega < 1. \quad (137)$$

Законы сохранения энергии (76) – (77) принимают вид:

$$\varepsilon_s = \text{Const} = \frac{3\Lambda^2}{8\pi}; \quad (138)$$

$$\varepsilon_p a^4 \equiv \tilde{\varepsilon}_p = \text{Const} \simeq \frac{3}{32\pi}. \quad (139)$$

Подставляя (138)-(139) в уравнение (68) и интегрируя его, получим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2} \right) e^{(t-t_0)/2\Lambda} - \frac{b^2}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + b^2}} e^{-(t-t_0)/2\Lambda} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (140)$$

где:

$$b^2 = \frac{3}{32\pi\Lambda^2}. \quad (141)$$

В частности, при  $t_0 = 0$  для масштабного фактора имеем отсюда:

$$a(t) = \frac{1}{\Lambda} \sqrt{\frac{3}{32\pi}} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda} \quad (142)$$

Вычисляя согласно (136), (138), (139) и (142) отношение  $\delta$ , найдем:

$$\delta(t) = \left( \frac{3}{16\pi\Lambda} \text{sh} \frac{t}{2\Lambda} \right)^2. \quad (143)$$

Далее, согласно (136) можно вычислить эффективный коэффициент баротропы и инвариантное ускорение (см. Рис. 13).

Следующий рисунок показывает, что с помощью параметра  $\Lambda$  можно легко управлять временем перехода на инфляционный режим ускорения  $\kappa \rightarrow -1$ . Напомним, что космологическое время  $t$  измеряется в планковских единицах.

Таким образом, согласно (103) определим новую безразмерную временную переменную,  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2\Lambda\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(\varphi, 1/\sqrt{2}), \quad (144)$$

где:

$$\varphi = \arccos \frac{1 - \operatorname{sh} t/2\Lambda}{1 + \operatorname{sh} t/2\Lambda}; \quad (145)$$

$F(\varphi, k)$  – эллиптический интеграл первого рода:

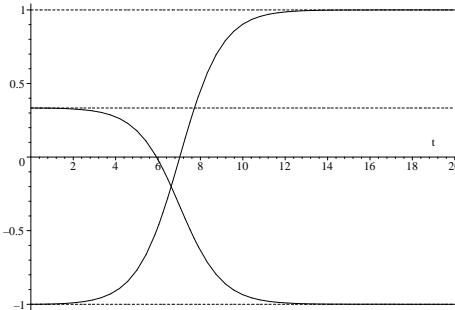
$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad (k^2 < 1). \quad (146)$$

Таким образом:

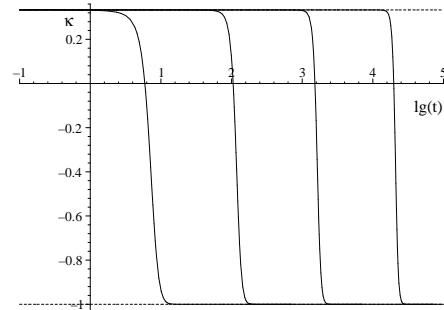
$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{1}{\operatorname{sh} \varphi} \frac{\operatorname{ch} \varphi}{1 + \operatorname{sh} \varphi} > 0; \quad \tau \in [0, \tau_\infty), \quad (147)$$

где<sup>11</sup>

$$\tau_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = \frac{2\Lambda\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0} F(1, 1/\sqrt{2}). \quad (148)$$



**Рис. 13.** Эволюция эффективного коэффициента баротропы  $\kappa(t)$  (тонкая линия) и инвариантного ускорения  $\Omega(t)$  (жирная линия) относительно точного решения (142) при  $\Lambda = 1$ . Пунктирными линиями показаны асимптоты  $-1; 1/3; 1$ .



**Рис. 14.** Эволюция эффективного коэффициента баротропы  $\kappa(t)$  относительно точного решения (142) в зависимости от космологической постоянной  $\Lambda$  слева – направо:  $\Lambda = 1, \Lambda = 10, \Lambda = 100, \Lambda = 1000$ .

## 4.7 Численная модель восстановления LTE в ускоренной Вселенной

### 4.7.1. Модель первоначального неравновесного распределения

<sup>11</sup>  $F(1, 1/\sqrt{2}) \approx 1.083216773$ .

Таким образом, как мы отмечали выше, математическая модель процесса восстановления LTE в космологической плазме сводится к двум параметрическим уравнениям (117) и (128), определяющим при заданной функции  $\Phi(Z)$  связи вида:

$$\tau = \tau(Z) \quad (117); \quad (149)$$

$$y = y(Z) \quad (128), \quad (150)$$

разрешая которые, мы можем определить функцию  $y(\tau)$  и, тем самым, формально полностью решить поставленную задачу. Таким образом, окончательное решение задачи находится в квадратурах заданием начального распределения неравновесных частиц  $\Delta f_0(p)$  и последующим определением интегральной функции  $\Phi(Z)$  (112). Заметим, что формально параметрические уравнения (117) и (128), как и определение функции  $\Phi(Z)$ , не отличаются от аналогичных, полученных ранее автором в работах [4], [20]. Принципиально новый момент, вносимый ускорением Вселенной, заключается в связи  $\tau(t)$  (103).

Для построения численной модели рассмотрим первоначальное распределение типа белого шума:

$$\Delta f_0(\rho) = \frac{A}{\rho^3} \chi(\rho_0 - \rho), \quad (151)$$

где  $A$  - нормировочная постоянная,  $\rho_0 > 1$  - безразмерный параметр,  $\chi(x)$  - ступенчатая функция Heaviside, так что конформная плотность энергии относительно этого распределения равна:

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}^0 = \frac{\langle \tilde{p} \rangle_0^4 A \rho_0}{32\pi^5}. \quad (152)$$

Вычисляя функцию  $\Phi(Z)$  относительно распределения (151), найдем:

$$\Phi(Z) = e^{-x} - x \text{Ei}(x); \quad x \equiv \frac{Z}{\rho_0}, \quad (153)$$

где  $\text{Ei}(x)$  есть интегральная показательная функция

$$\text{Ei}(x) = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} dt.$$

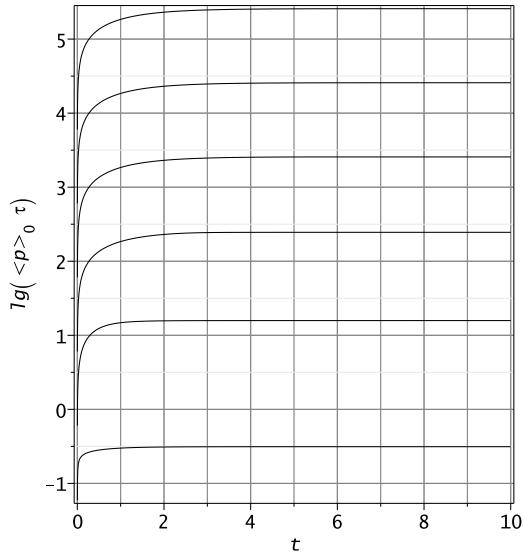
#### 4.7.2. Результаты численного интегрирования

Задача, таким образом, сводится к численному интегрированию системы уравнений (103), (117), (128). В статье [29] (см. также [30]) описана авторская программа в пакете Maple численного моделирования этой задачи и представлены некоторые результаты численного моделирования описанной выше математической модели восстановления термодинамического равновесия ускоренной Вселенной. Ниже представлены более полные результаты численного моделирования и их анализ. В дальнейшем в соответствии с (138) и (142) удобно ввести временную космологическую постоянную

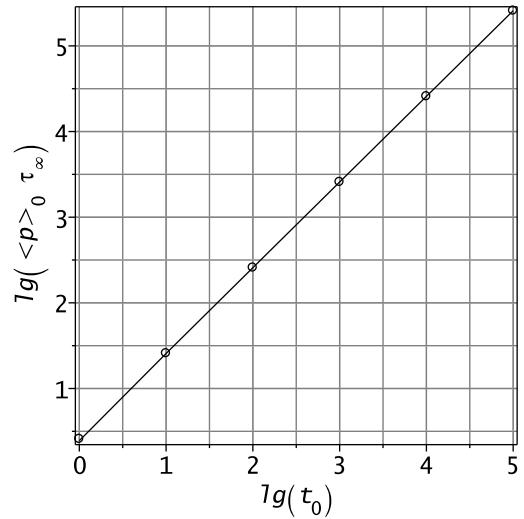
$$t_0 \equiv 4\Lambda. \quad (154)$$

На Рис. 155 представлены результаты численного интегрирования для определения параметра  $\tau_\infty$ . В частности, интегрирование соотношения (103) подтвердило

нечувствительность величины  $\tau_\infty$  от ряда параметров и, фактически, подтвердило оценочную формулу (148), которая не учитывала деталей логарифмической зависимости параметра  $\langle \xi \rangle$  от времени. На Рис. 16 показаны результаты численного интегрирования этой величины.



**Рис. 15.** Зависимость десятичного логарифма безразмерной временной переменной  $\langle \tilde{p} \rangle_0 \tau$  от космологического времени  $t$ . Снизу – вверх:  $t_0 = 1; 10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5$ . Всюду принято  $N_0 = 100; N = 10$ .

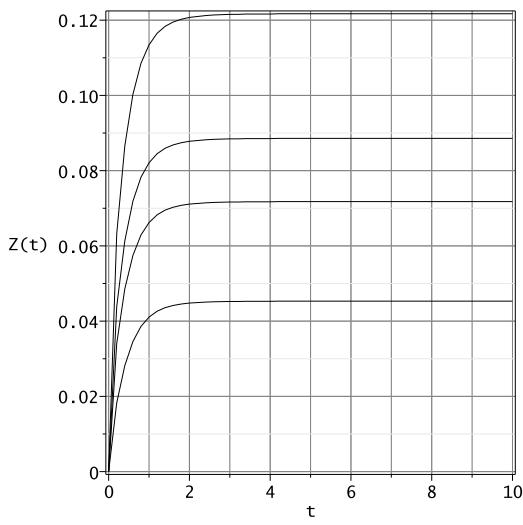


**Рис. 16.** Зависимость десятичного логарифма безразмерного временного параметра  $\tau_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0$  от десятичного логарифма космологической постоянной  $t_0$ . Сплошная линия –  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ , точки –  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10^5$ ; всюду  $N_0 = 100; N = 10, p_0 = 10$ .

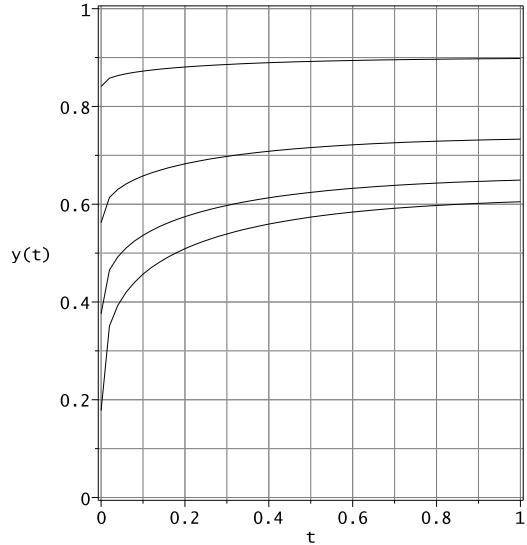
Эти результаты хорошо описываются формулой

$$\tau_\infty \approx \frac{2.57 t_0}{\langle \tilde{p} \rangle_0}. \quad (155)$$

На Рис. 17 показана зависимость переменной  $Z(t)$  при различных значениях временной космологической постоянной.



**Рис. 17.** Зависимость безразмерной функции  $Z(t)$  от времени; всюду  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.



**Рис. 18.** Зависимость относительной температуры  $y(t)$  от времени; всюду  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу вверх: 0.01; 0.1; 0.2; 0.5.

Как следует из результатов, представленных на этом рисунке, значение функции  $Z(t)$  также имеет предельное значение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = Z_\infty < \infty. \quad (156)$$

Согласно (106) это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  “замораживается” распределение сверхтепловых частиц:

$$\Delta f_a(\tau_\infty, \rho) = \Delta f_a^0(\rho) \cdot e^{-\frac{Z_\infty}{\rho}}. \quad (157)$$

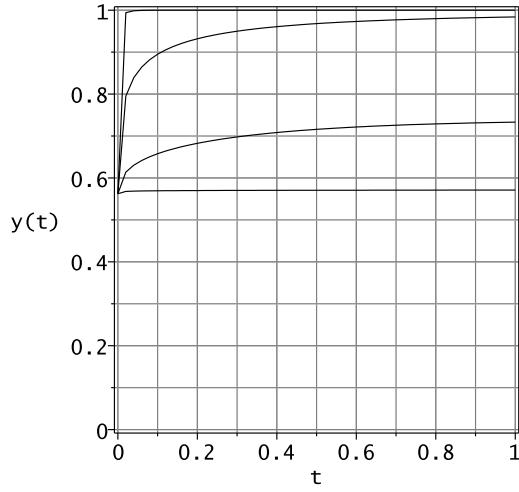
Таким образом, в современной Вселенной может остаться “хвост” неравновесных частиц сверхвысоких энергий:

$$E > E_\infty = Z_\infty \langle \tilde{p} \rangle_0. \quad (158)$$

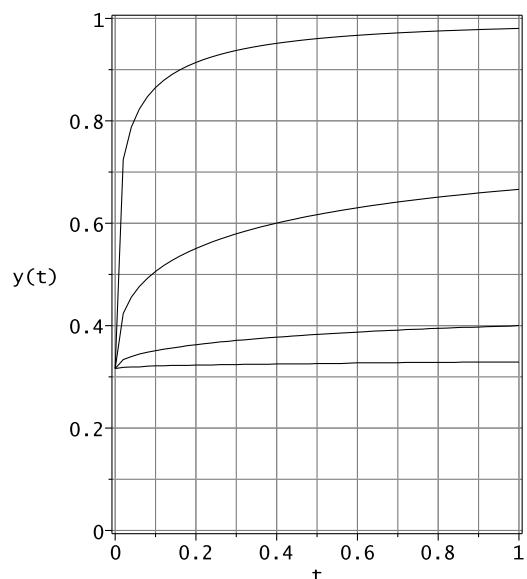
На Рис. 19–20 показаны результаты численного интегрирования для относительной температуры  $y(t) = T(t)/T_0(t) \leq 1$ . Согласно смыслу этой величины безразмерный параметр:

$$e_\infty = 1 - \sigma_\infty = 1 - y_\infty^4 > 0 \quad (159)$$

есть относительная доля энергии космологической плазмы, содержащаяся в неравновесном хвосте распределения.



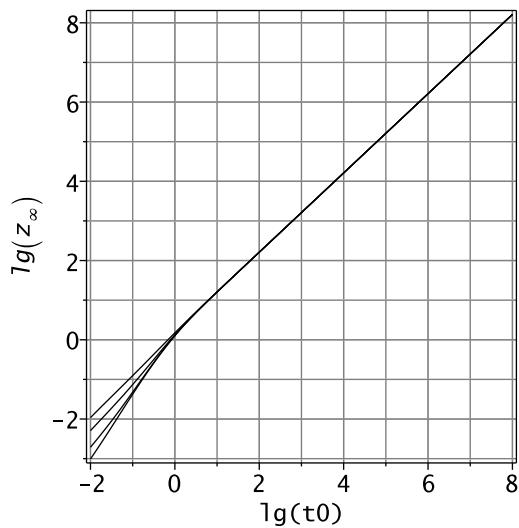
**Рис. 19.** Зависимость относительной температуры,  $y(t)$ , от времени; всюду  $\sigma_0 = 0.1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ;  $t_0$  — bottom-up: 0.1; 1; 10; 100.



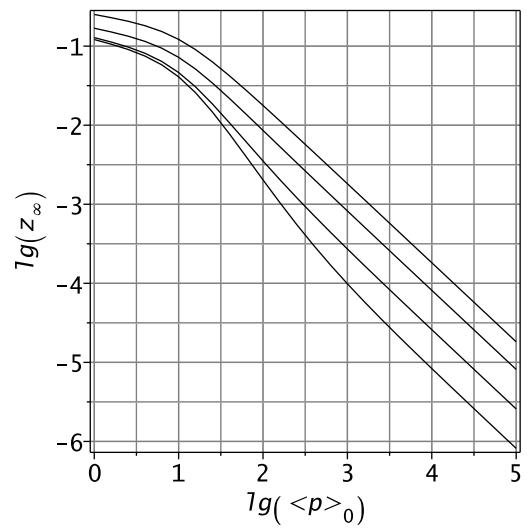
**Рис. 20.** Зависимость относительной температуры,  $y(t)$ , от времени; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $t_0$  — bottom-up: 1; 10; 100; 1000.

#### 4.7.3. Асимптотические значения параметров неравновесного распределения на инфляционной стадии

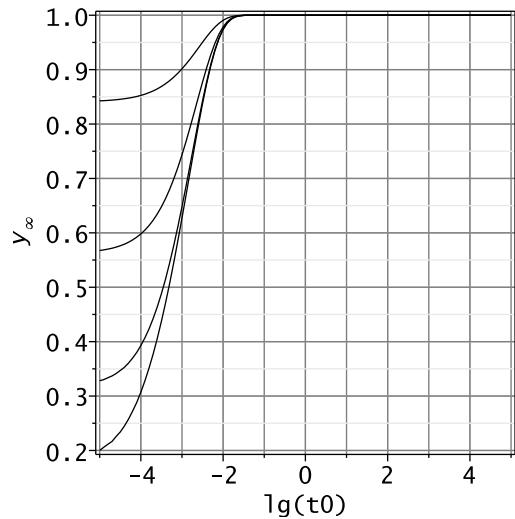
Для наблюдения в современную эпоху Вселенной важно знание возможных предельных значений параметров неравновесного распределения. Такими возможными наблюдаемыми параметрами являются относительная температура,  $y_\infty$ , относительная доля энергии, заключенной в неравновесном хвосте распределения, а также и форма этого распределения. На Рис. 21, 22, ??, 24, 25, 26 представлены вычисленные значения первых двух указанных параметров.



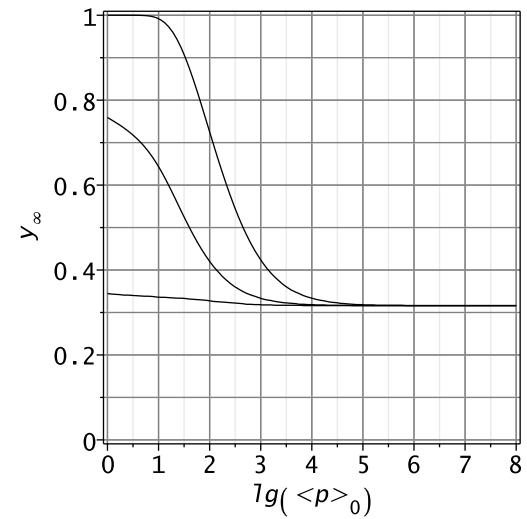
**Рис. 21.** Dependency of the dimensionless function  $Z_\infty$  on cosmological constant  $t_0$ ; it is everywhere  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 100$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — bottom-up: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



**Рис. 22.** Dependency of the dimensionless function  $Z_\infty$  on parameter  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ ; it is everywhere  $t_0 = 1$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — bottom-up: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



**Рис. 23.** Зависимость предельного значения относительной температуры,  $y_\infty$ , от космологической константы  $t_0$ ; всюду  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ,  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $\sigma_0$  — снизу - вверх: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.

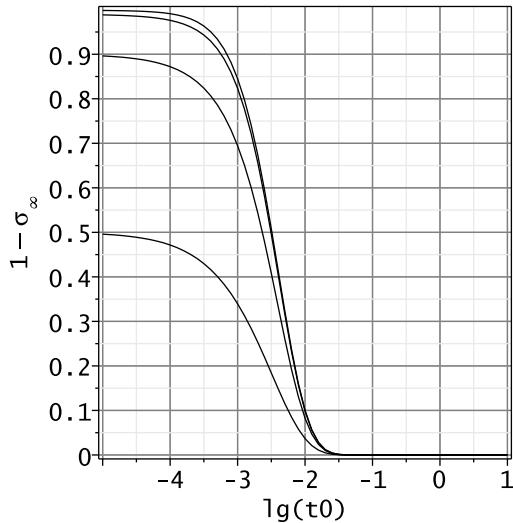


**Рис. 24.** Зависимость предельного значения относительной температуры,  $y_\infty$ , от десятичного логарифма параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ ; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ;  $t_0$  — снизу - вверх: 0.1; 1; 10.

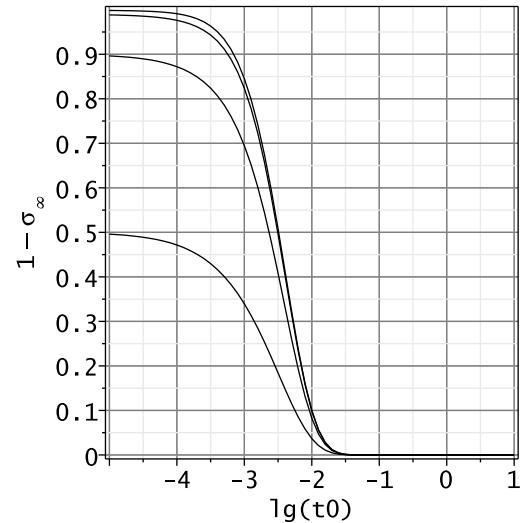
#### 4.7.4. Анализ результатов численного моделирования

Из представленных результатов следует, что начиная со значений величины параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$  порядка  $10 \div 100$ , возможно выживание неравновесных реликтовых частиц в современную эпоху эволюции Вселенной. Это — поразительный факт, так как согласно результатам более ранних статей Автора, в которых рассматривался

стандартный космологический сценарий, исключающий инфляционную стадию, в современную эпоху могли выжить только реликтовые частицы с энергией  $10^{12}$  GeV и выше. В рассматриваемом здесь сценарии на современной инфляционной стадии могут выживать реликтовые частицы с энергией порядка 1 Kev и выше!



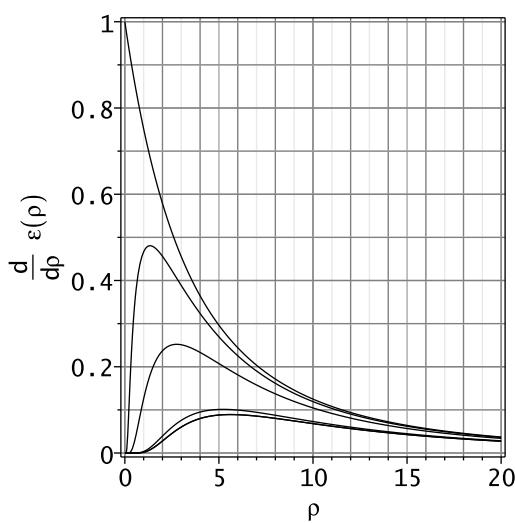
**Рис. 25.** Зависимость относительной доли энергии неравновесных частиц,  $1 - \sigma_\infty$ , от космологической константы  $t_0$ ; всюду  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\sigma_0$  — сверху-вниз: 0.001; 0.01; 0.1; 0.5.



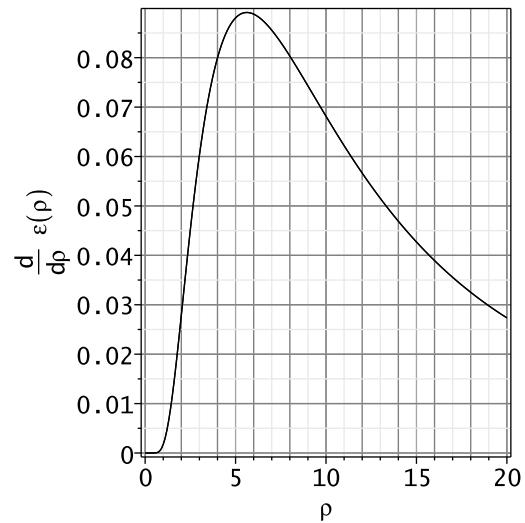
**Рис. 26.** Зависимость относительной доли энергии неравновесных частиц,  $1 - \sigma_\infty$ , от параметра  $\langle \tilde{p} \rangle_0$ ; всюду  $\sigma_0 = 0.01$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1000$ ;  $t_0$  — сверху - вниз: 0.1; 1; 10.

На Рис. 27 представлена эволюция распределения плотности энергии неравновесных частиц в предположении их начального распределения в форме типа белого шума

$$\left( \frac{d\varepsilon}{d\rho} \right)_0 = A \frac{\chi(\rho_0 - \rho)}{(1 + \rho/\langle \tilde{p} \rangle_0)^3}. \quad (160)$$



**Рис. 27.** Эволюция распределения плотности энергии; всюду  $\sigma_0 = 0.5$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ,  $t_0 = 1$ ; сверху вниз:  $t = 0.0001$ ;  $0.01$ ;  $0.1$ ;  $1$ ;  $10$ ;  $100$ . Lines at  $t=10$  and  $t=100$  are coincide.



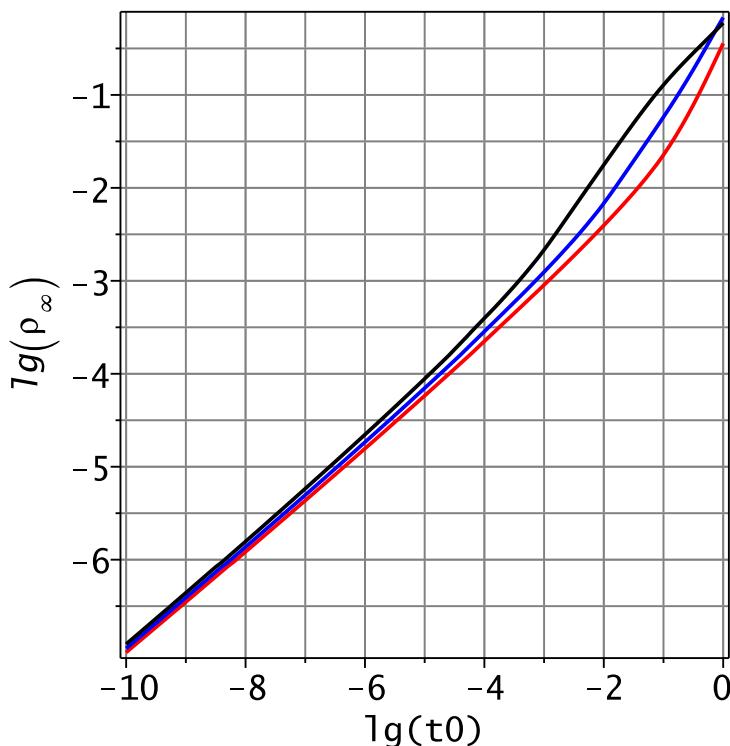
**Рис. 28.** Фиксация неравновесной функции распределения при  $t = \infty$ .  $\sigma_0 = 0.5$ ;  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ ,  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ ,  $t_0 = 1$ .

Вычисляя максимум распределения плотности энергии с помощью соотношений (106), найдем:

$$\rho_{\infty}^{max} = \sqrt{Z_{\infty} \langle \tilde{p} \rangle_0}. \quad (161)$$

На Рис. 29 показана зависимость максимума спектра энергии неравновесных частиц от космологического параметра  $t_0$ . Из этого рисунка можно увидеть, что при не очень больших значениях космологической константы максимум энергетического спектра лежит в области достаточно низких энергий, что делает принципиально возможным детектирование первичных неравновесных частиц в космических условиях.

Заметим, что величина безразмерной энергии  $\rho$  фактически означает, что в современную эпоху энергия частиц  $\rho \langle \tilde{p} \rangle_0$  во много раз превышает температуру реликтовых фотонов. Таким образом, в современную эпоху мы можем наблюдать истинно реликтовые частицы с энергиями порядка 1 Кев и выше в максимуме распределения. Говоря об «истинно реликтовых частицах», мы имеем ввиду частицы, которые выжили с момента рождения Вселенной, в отличие от реликтовых фотонов и нейтрино, которые сформировались в радиационно-доминированную эпоху. Детектирование истинно реликтовых частиц в космосе помогло бы получить информацию «из первых рук» о моменте рождения Вселенной, а также о фундаментальных взаимодействиях элементарных частиц при сверхвысоких энергиях, которые никогда не будут доступны земной цивилизации.



**Рис. 29.** Dependency of relativity limiting energy of a maximum  $\lg \rho_\infty$  of distribution on a cosmological constant at  $\sigma_0 = 0.01$ ,  $N_0 = 100$ ;  $N = 10$ . Red line –  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 1$ , blue line –  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 10$ , black line –  $\langle \tilde{p} \rangle_0 = 100$ .

## Литература

- [1] Steven Weinberg. *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [2] H.M. Pilkuhn. *Relativistic Particle Physics*, Springer-Verlag, New York Inc, 1979.
- [3] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **25** No 4, 92 (1982)
- [4] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **29**, No 2, 19 (1986).
- [5] L.B. Okun, *Leptons and quarks*, North-Holland, Amsterdamm· Oxford · New-York · Tokyo, 1981.
- [6] L.D. Landau, *J.Sov.Phys. (JETP)*, **10**, 718 (1940).
- [7] M. Froissart, *Phys. Rev.*, 123, 1053 (1961)
- [8] A. Martin, *Phys. Rev.*, 129, 1432 (1963)
- [9] A. Martin, *Nuovo. Cim.*, 142, 930 (1966)
- [10] Y.S. Jin, A. Martin, *Phys. Rev.B* 135, 1369 (1964)
- [11] M. Sugawara, *Phys. Rev. Lett.*, 14, 336 (1965)
- [12] R.I. Eden, *High Energy Collisions of Elementary Particles*, Cambridge At the University Press, 1967

- [13] Игнатьев Ю.Г. // Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации, Тезисы Советской гравитационной конференции. – Москва. – 1984.
- [14] Yu.G.Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 1 (49), pp. 1-14.
- [15] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 8, 42 (1980).
- [16] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **23** No 9, 27 (1980).
- [17] Игнатьев Ю.Г. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. – 1980. – Москва: Атомиздат. – Вып. 11. – с. 113.
- [18] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26**, No 8, 19 (1983).
- [19] Yu.G. Ignat'ev, J. Sov. Phys. (Izv. Vuzov). **26** No 12 9 (1983)
- [20] Yu.G.Ignatyev, D.Yu.Ignatyev, *Gravitation & Cosmology* Vol.13 (2007), No. 2 (50), pp. 101-113
- [21] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.
- [22] Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. II. Модель энергобаланса.// Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. – № 1. 2013. – С. 79–98.
- [23] Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. III. Модель энергобаланса для инфляционной стадии.// Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. – № 2. 2013. С. 5–10.
- [24] Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. IV. Модель энергобаланса для стадии с произвольным ускорением.// Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. – № 3. 2013. С. 5–19.
- [25] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971
- [26] Yu. G. Ignat'ev, Russian Physics Journal, Vol. 56, No. 6, November, 2013. - p. 693-706 DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4
- [27] Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013.
- [28] Yu.G. Ignatyev, Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 19, No 4, 2013.
- [29] Yu. G. Ignat'ev, Russian Physics Journal, to be publish in Vol. 57, No. 1, Jenuvary, 2014; Yu.G. Ignatyev, arxiv.org/pdf/1310.2183.pdf [gr-qc] 8 October 2013.
- [30] Yurii Ignatyev, arXiv:1306.3633v1 [gr-qc] 13 June 2013; Yu.G. Ignatyev, Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 19, No 4, 2013.

## **Author's Index**

Ignat'ev Yu.G., 59

Melnikov V.N., 5

Minkevich A.V., 25

Starobinsky A.A., 47

**INFO! ИНФОРМАЦИЯ О МЕЖДУНАРОДНЫХ ШКОЛАХ «GRACOS»**

Международная школа по гравитации и космологии «GRACOS-2014» проводится параллельно с Международной конференцией по гравитации, космологии и астрофизике – 15-й Российской гравитационной конференции, с 1 по 10 июля 2014 г. Пересечение школы с Международной конференцией по гравитации, космологии и астрофизике (30.06. - 05.07) позволит, во-первых, дать возможность молодым слушателям школы присутствовать на докладах ведущих ученых и сделать свои доклады, а, во-вторых, - использовать научный потенциал конференции для организации лекций для участников школы. Школа по гравитации и космологии GRACOS является традиционной летней школой для Казани – она регулярно и успешно проводится с 2007 года, сначала – на базе Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, а с 2012 года – на базе Казанского федерального университета. Цель школы –познакомить молодых ученых с результатами и методами научных исследований в одной из наиболее фундаментальных и сложных областей современной теоретической физики – теории гравитации, фундаментальных полей и космологии, в частности, с результатами прорывных исследований на стыке космологии, теории фундаментальных полей и физики элементарных частиц, полученными в последние 3 года. Тем самым, проведение школы будет способствовать повышению профессионализма молодых исследователей – физиков теоретиков и математиков в области фундаментальной физики и будет мотивировать их научные исследования.



**II РОССИЙСКАЯ ШКОЛА ПО ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ GRACOS-2009**

**И МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР  
«СОВРЕМЕННЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ  
И КОСМОЛОГИИ»<sup>1, 2, 3</sup>,**

Ю.Г. Игнатьев, Казанский(Приволжский) федеральный университет,  
Казань, Россия

<sup>1</sup>E-mail: ignatev\_yu@rambler.ru

**1. Оргкомитет и месторасположение Gracos.** Российский фонд фундаментальных исследований поддержал проект по организации и проведению II Российской школы по гравитации и космологии – Gracos-2009. Одной из основных целей проекта является привлечение талантливой российской молодежи, специализирующейся в области теоретической физики, астрофизики, прикладной математики и математического моделирования, к научным исследованиям в области фундаментальной физики, знакомство ее с основными проблемами, идеями и методами исследования современной теории гравитации и космологии, а также развития профессионализма научной молодежи в области теоретической физики. Параллельно с работой школы проводился Международный научный семинар «Современные проблемы теории гравитации и космологии». Эта вторая подобная научная конференция, финансируемая РФФИ и проводимая на базе ТГГПУ (Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, г. Казань) в его учебно-оздоровительном центре «Яльчик», расположенного на берегу живописного таежного озера Яльчик в Республике Марий-Эл.



**Рис.1.** Берег озера Яльчик в месте проведения школы Gracos-2009 (фото предоставлено автором)

Выбор Президиумом Российского гравитационного общества ТГГПУ в качестве базы дислокации Российской школы гравитации и космологии продиктован рядом обсто-

<sup>1</sup>Статья написана по заказу Редакции «Вестника РФФИ», но по неизвестным причинам не была опубликована; перепечатка из “Трудов Российской летней школы по гравитации и космологии и Международного семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии», 3-7 сентября 2012 г., Казань—Яльчик. / под ред. Ю.Г. Игнатьева. — Казань: Казанский университет, 2012. - 116 с.

<sup>2</sup>Gracos – сокращение фразы Gravitation and Cosmology, являющейся одновременно и названием международного научного журнала Российского гравитационного общества, издающегося издательством Springer (USA).

<sup>3</sup>II Российская школа по гравитации и космологии проведена по гранту РФФИ № 09-02-06041-г.

ятельств: во-первых, Казань является одним из наиболее крупных центров исследований в области гравитации и космологии, во-вторых, в ТГГПУ локализована одна из сильнейших гравитационных групп России, в которой успешно работают и выполняют диссертации молодые ученые, в- третьих, в ТГГПУ имеются необходимые структуры и возможности для реализации проекта Российской школы гравитации и космологии, в частности, это учебно-оздоровительный центр «Яльчик». Наконец, гравитационная группа ТГГПУ имеет успешный опыт проведения крупных научных конгрессов – это 12 Российская гравитационная конференция (Международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике, 2005 г., грант РФФИ 05-02-26044-г.), Российская школа по гравитации и космологии Gracos-2007 (грант РФФИ 07-02-06043-г), Международный семинар «Современные проблемы теории гравитации и космологии» (грант РФФИ 07-02-06011г, 2007), Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии в образовании и науке» (2007 г., грант Минобр и науки РТ).

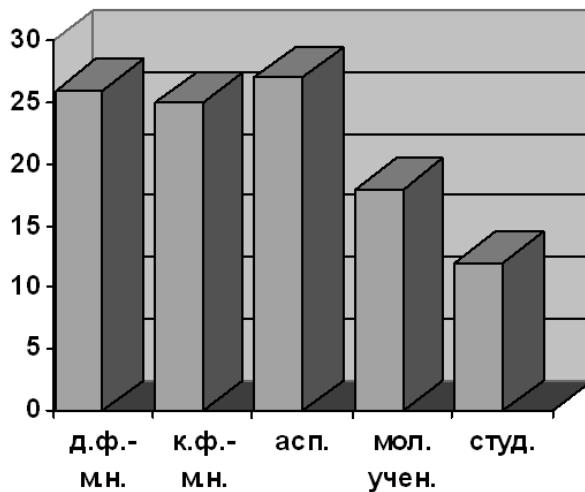


**Рис.2.** Резиденция Оргкомитета Gracos-2009 в Марийской тайге

**2. Контингент участников.** Всего было зарегистрировано 107 участников школы-семинара, из них: лекторов школы – 15 (все доктора наук), докладчиков – 87, слушателей – 20. Качественный состав участников был следующий (Рис. 3).

Таким образом, примерно половину участников школы-семинара составляли остеиненные ученые, вторую половину – молодые ученые, аспиранты, магистранты и студенты старших курсов. Почти четверть участников школы семинара составляли доктора физико-математических наук, специалисты высокого международного научного уровня – фактически на одного аспиранта приходился один доктор наук. С одной стороны, такая пропорция, конечно, была выгодна молодым участникам конференции, так как давала им возможность тесных научных контактов с ведущими специалистами в области гравитации и космологии. С другой стороны, эта пропорция указывает на плачевное положение, сложившееся в фундаментальных науках, – низкий уровень притока молодежи в сферу научной деятельности. Не каждый студент и не каждый аспирант становится кандидатом наук, и далеко не каждый кандидат – доктором на-

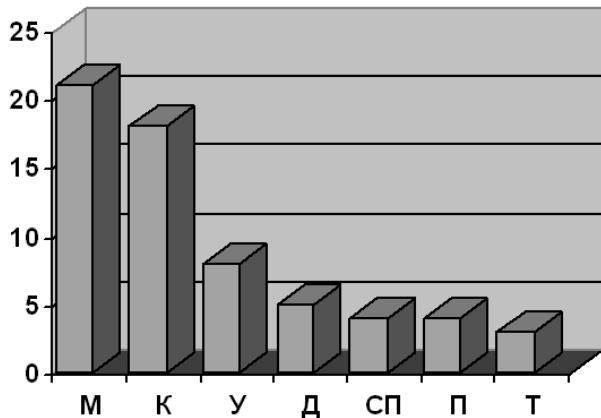
ук. Это неудовлетворительное состояние фундаментальных наук в России было предметом серьезного обсуждения Оргкомитетом Gracos-2009. Главными причинами этого состояния являются низкий приоритет ученых в современной России и низкий уровень финансирования фундаментальных наук. На последнюю причину, в частности, указывает следующее обстоятельство. На Gracos-2009 были представлены гравитационные группы различных регионов России, ближнего и дальнего зарубежья: Москва, Казань, Санкт-Петербург, Дубна, Пермь, Томск, Ульяновск, Димитров, Ижевск, Красноярск, Омск, Ижевск, Харьков, Минск, Болгария, Чехия, Бангладеш. Картина распределения этих регионов по масштабу участия показана на диаграмме Рис. 4.



**Рис.3.** Качественный состав участников школы-семинара в кол-ве человек: д.ф.-м.н. – доктора физ.-мат. наук, к.ф.-м.н. – кандидаты физ.-мат. наук, асп. – аспиранты, мол. учен. – молодые ученые, студ. – студенты и магистранты.

Таким образом, примерно половину участников школы-семинара составляли остеиненные ученые, вторую половину – молодые ученые, аспиранты, магистранты и студенты старших курсов. Почти четверть участников школы семинара составляли доктора физико-математических наук, специалисты высокого международного научного уровня – фактически на одного аспиранта приходился один доктор наук. С одной стороны, такая пропорция, конечно, была выгодна молодым участникам конференции, так как давала им возможность тесных научных контактов с ведущими специалистами в области гравитации и космологии. С другой стороны, эта пропорция указывает на плачевное положение, сложившееся в фундаментальных науках, – низкий уровень притока молодежи в сферу научной деятельности. Не каждый студент и не каждый аспирант становится кандидатом наук, и далеко не каждый кандидат – доктором наук. Это неудовлетворительное состояние фундаментальных наук в России было предметом серьезного обсуждения Оргкомитетом Gracos-2009. Главными причинами этого состояния являются низкий приоритет ученых в современной России и низкий уровень финансирования фундаментальных наук. На последнюю причину, в частности, указывает следующее обстоятельство. На Gracos-2009 были представлены гравитационные

группы различных регионов России, ближнего и дальнего зарубежья: Москва, Казань, Санкт-Петербург, Дубна, Пермь, Томск, Ульяновск, Димитров, Ижевск, Красноярск, Омск, Ижевск, Харьков, Минск, Болгария, Чехия, Бангладеш. Картина распределения этих регионов по масштабу участия показана на диаграмме Рис. 4.



**Рис.4.** Число участников из различных регионов. М – Москва, К – Казань, У – Ульяновск – Димитров, Д – Дубна, СП – Санкт-Петербург, П – Пермь, Т – Томск.

Сопоставление данных этой диаграммы с реальными размерами гравитационных групп регионов убедительно говорит о том, что главной причиной неучастия молодых ученых из удаленных от Казани регионов России явилось отсутствие средств на проезд. Об этом же говорят и результаты опросов.

**3. Организация работы школы Gracos.** Руководством ТГГПУ и местным оргкомитетом школы-семинара было обеспечено бесплатное проживание всех участников школы в жилых зданиях учебно-оздоровительного центра (УОЦ) в течение 6 дней.



**Рис.5.** Столовая-конференц зал школы Gracos-2009

Учитывая достаточно низкую температуру последних августовских ночей, все жилые помещения школы были обеспечены нагревательными приборами и теплыми постельными принадлежностями. Просторная столовая УОЦ служила одновременно двум целям – в одном из ее залов было организовано качественное трехразовое питание участников конференции, во втором зале читались лекции, проходили пленарные и секционные заседания. Питание было организовано по достаточно низкой, приемлемой для молодых ученых и студентов цене – 200 руб/сутки, – для студентов 4-5 курсов, входящих в состав группы технической поддержки, как и для самой этой группы, питание было бесплатным.

Школа Gracos была обеспечена всей необходимой оргтехникой: медиаэкранами, про-

екторами, оверхедами, ноутбуками, принтерами, сканерами. Участники школы получили папки с необходимым набором канцелярских принадлежностей и качественно издаными Трудами школы-семинара объемом 12 п.л., в который вошли 84 статьи участников школы. Для обеспечения работы школы при Оргкомитете постоянно дежурили два автобуса.

#### 4. Научные направления школы Gracos-2009

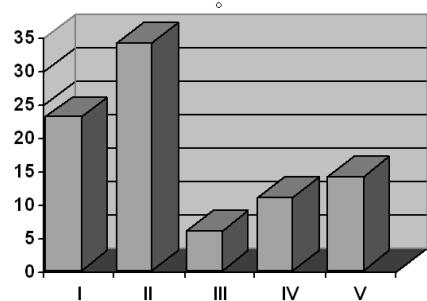
Работа школы и секций семинара проходила в следующих пяти основных направлениях:

1. Классическая и квантовая теория гравитации – руководители: профессора В.Г. Багров (ТГУ, Томск, А.Б. Балакин (КГУ, Казань) и Ю.С. Владимиров (МГУ, Москва);
2. Космология – руководители профессора и Ю.Г. Игнатьев (ТГГПУ, Казань), В.Н. Лукаш (ФИАН, Москва) и А.А. Старобинский (ИТФ, Москва);
3. Квантовая гравитация, квантованные поля – руководители профессора Д.В. Гальцов (МГУ, Москва), А.А. Гриб (Пед. университет им. Герцена, Санкт-Петербург), Н.Р. Хуснутдинов (ТГГПУ, Казань);
4. Многомерная гравитация – руководители профессора В.Д. Иващук (РУДН, Москва), В.Н. Мельников (ВНИИМС, Москва);
5. Черные дыры, браны, кротовые норы – руководители профессора К.А. Бронников (ВНИИМС, Москва), С.В. Сушков (ТГГПУ, Казань).



Эти научные направления отражают практически весь спектр современной теории гравитации и космологии, а количество докладов на секциях – актуальность направлений исследований (Рис. 7).

Рис.6. Обложка сборника трудов Gracos-2009



I – классическая и квантовая гравитация, II – космология, III – квантовая гравитация и квантованные поля, IV – многомерная гравитация, V – черные дыры, браны, кротовые норы.

**Рис.7.** Распределение количества докладов по секциям



**Рис.8.** Заседание секция № 1 «Классическая гравитация». Лекция профессора Ю.С. Владимира для слушателей школы



**Рис.9.** Руководитель секции I профессор Юрий Сергеевич Владимиров (Москва, МГУ) ведет дискуссию с докладчиком

Пожалуй, наиболее интересные открытия в последние годы происходят в области космологии в связи с существенным увеличением точности измерений как в области наблюдательной космологии, так и физики элементарных частиц и других областях экспериментальной физики. В частности, в последние годы были обнаружены фундаментальные космологические феномены: вторичное ускорение расширения Вселенной, космическая паутина между сверхскоплениями галактик, отсутствие W-бозонов на предсказываемом масштабе энергии, аномальное превышение частиц сверхвысоких энергий в космических лучах, необъяснимое совпадение плотностей энергии реликтового излучения и космических лучей и многие другие. Эти открытия повлекли за собой не только ревизию стандартного космологического сценария (СКС) и теории фундаментальных взаимодействий частиц, но и пересмотр фундаментальных представлений

энергии, массы и самой гравитации. Не удивительно поэтому, что секция II оказалась самой многочисленной и бурной.



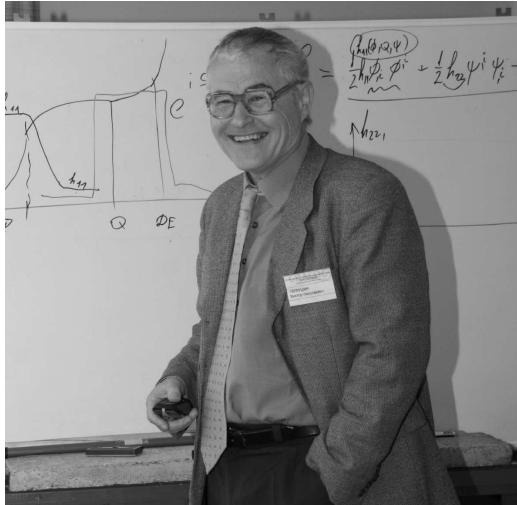
**Рис.10.** Заседание секция № 2 «Космология». На переднем плане справа профессор Д.В. Гальцов (МГУ, Москва)



**Рис.11.** Профессор Ю.Г. Игнатьев (ТГГПУ, Казань) комментирует доклад своего аспиранта Миахахова Р.Ф.

Наряду с большим количеством работ, посвященных космологическим сценариям, основанным на отказе от классических представлений о энергии и массе и использующим различные теоретические модели темной материи, черной энергии и экзистенции, на конференции были представлены модели, основанные на СКС, в котором рассматриваются более сложные модели вещества. В частности, профессора Д.В. Гальцов и Ю.Г. Игнатьев с учениками продемонстрировали космологические модели с многокомпонентными системами, включающими взаимодействующие скалярные поля, которые обеспечивают вторичное ускорение в рамках СКС. Профессор В.Н. Первушин (ОИЯИ, Дубна) с учениками предложил гамильтонову формулировку космологии в рамках модели электрослабых взаимодействий, предсказывающей приемлемую для эксперимента массу W-бозонов – 118 Гэв. Этот доклад вызвал оживленную дискуссию участников семинара.

Удивительным фактом в последние годы является быстрое превращение космологии из абстрактной теории, допускающей множество спекулятивных элементов, в строгую науку, имеющую солидную экспериментальную базу.



**Рис.12.** Профессор Виктор Николаевич Перовшин (ОИЯИ, Дубна) полемизирует со слушателями после своего доклада.



**Рис.13.** Участники школы на экскурсии в Казани около театра оперы и балета.

**5. Культурная программа Gracos-2009.** Несмотря на очень плотный, насыщенный график работы школы – с 9.00 до 19.00 с перерывом на обед и кофе-брейки, удалось все же провести и некоторые культурно-оздоровительные мероприятия. В день открытия школы-семинара, после вечерних заседаний, был организован фуршет. Один день работы школы, 26 августа, с 9.00 до 15.00, был посвящен организованным мероприятиям: часть участников конференции совершила туристическую экскурсию в Казань и Раифский монастырь (Рис. 13), (Казань находится на расстоянии 70 км от Яльчика), большая же часть выбрала пеший поход на одно из красивейших озер Марийской тайги – озеро Глухое (Рис. 14). После обеда и вечернего заседания был организован товарищеский ужин, который сопровождался исполнением бардовских песен под гитарный аккомпанемент профессора С.В. Сушкова импровизированным хором ученых разных рангов и возрастов. Два вечера школы профессор Ю.С. Владимиров устраивал показ документальных фильмов о древних цивилизациях Египта и Латинской Америки с собственными комментариями.

Профессор М.Я. Иванов (ЦИАМ, Москва) рассказал о последних достижениях авиационной техники и показал фильм о последнем авиасалоне Max-2009. Надо отметить, что он же сделал очень интересный доклад на секции «Космология» о некоторых необычных проявлениях фундаментальных взаимодействий в реактивных двигателях последних поколений.

Кроме указанных плановых мероприятий участникам школы были предоставлены лодки для водных прогулок по заповедным местам Яльчика (Рис. 16). Участники конференции также проводили время за рыбной ловлей, сбором грибов, купанием и игрой в теннис. Это удавалось сделать за счет хотя и очень плотного, но линейного расписания работы секций – в каждый момент времени работала только одна из пяти секций. Молодые ученые и студенты вечера проводили у костров. Таким образом, участники школы смогли и достаточно хорошо отдохнуть – напомним, что школа работала в последнюю

перед осенним семестром неделю августа. Этому помогла и хорошая погода.



**Рис.14.** Участники школы на экскурсии на озеро Глухое.



**Рис.15.** Один вечер школы Оля Сандахова из Перми, недавно защищившая кандидатскую диссертацию, читала свои лирические стихи



**Рис.16.** Председатель Оргкомитета Gracos-2009, президент Российского гравитационного общества, профессор В.Н. Мельников в качестве лоцмана по Яльчику на борту шлюпки.

## 6. Итоги Gracos-2009

В 11.00 26 августа состоялась официальная церемония закрытия школы-семинара Gracos-2009. Были подведены основные итоги конференции, отмечены большие проблемы фундаментальных исследований в современной России, проблемы привлечения

молодежи к фундаментальным исследованиям, а также проблемы сохранения и развития научного потенциала, пути выхода из тупика. Накануне, вечером, состоялось заседание Президиума Российского гравитационного общества под председательством Президента РГО, профессора Виталия Николаевича Мельникова, на котором были подведены основные итоги школы и выделены лучшие доклады молодых ученых. На закрытии конференции выступили профессора В.Н. Мельников (Рис 17), Ю.Г. Игнатьев, В.Н. Первушин, Д.В. Гальцов, С.В. Сушков. В торжественной обстановке были вручены Дипломы организационного комитета Gracos-2009 двадцати четырем молодым ученым (Рис. 18).

**6. Решение конференции.** На закрытии конференции была принята следующая Резолюция школы-семинара.

С 24 по 29 августа 2009 года на базе Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета г. Казани в УОЦ «Яльчик» под эгидой Российского гравитационного общества была проведена школа-семинар «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» Gracos-2009. Были заслушаны 87 докладов, из которых 15 – пленарные – лекционные. Программа школы была посвящена исследованию фундаментальных проблем теоретической физики и космологии. В работе школы приняли участие ученые из 12 регионов Российской Федерации, ближнего и дальнего зарубежья. К началу работы школы-семинара был выпущен сборник его трудов объемом 12 п.л. Одной из основных целей школы-семинара было привлечение к фундаментальным исследованиям молодежи.



**Рис.17.** Председатель Оргкомитета Gracos-2009 профессор Виталий Николаевич Мельников (Москва) подводит итоги школы-семинара. В Президиуме слева направо – профессора С.В. Червон (Ульяновск), Д.В. Гальцов (Москва), В.Н. Первушин (Дубна), Ю.Г. Игнатьев (Казань), В.Г. Багров (Томск), С.В. Сушков (Казань)



**Рис.18.** Председатель Оргкомитета Gracos-2009 профессор Виталий Николаевич Мельников вручает диплом Оргкомитета молодому ученому из Чехии Джири Ковару

**Постановили:**

1. Признать работу конференции успешной и плодотворной.
2. Выразить благодарность ректору и администрации ТГГПУ, а также местному организационному комитету Gracos-2009 за высокий уровень организации конференции.
3. Ходатайствовать перед ректором ТГГПУ о создании долговременных отношений с Российским гравитационным обществом с целью организации постоянно действующей школы-семинара на базе ТГГПУ и, по-возможности, провести модернизацию УОЦ «Яльчик» с целью повышения в будущем статуса школы-семинара до Международного класса.
4. Отметить дипломами организационного комитета II Российской школы-семинара «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии» Gracos-2009 доклады молодых ученых, посвященные исследованиям в области теории гравитации и космологии.
5. Провести III школу-семинар в 2012 году.

Набор сборника осуществлен в издательском пакете  $\text{\LaTeX}2\varepsilon$  в  
учебно-научной лаборатории «Информационных технологий в  
математическом образовании» Института математики и механики им.  
Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Разработка авторского  $\text{\LaTeX}$ -стиля оформления - **Ю.Г. Игнатьев**

Техническая редакция, набор и верстка: **Ю.Г. Игнатьев, А.А. Попов,  
А.Р. Самигуллина.**

Оформление обложки - **А.А. Агафонов**

Подписано в печать 05.06.14. Формат  $60\times84/8$   
Печать цифровая. Бумага офсетная. Печ. л. 7.  
Тираж 100 экз. Заказ ...

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии Издательства Казанского университета

**Казанский университет**  
420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37  
тел: (843) 233-73-59, 292-65-60