О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ И ЧАСТИЦ

Что мы знаем и не знаем о материи?

Журавлев В. М.

Ульяновский государственный университет,
Лаборатория космических исследований

4 ноября 2016 г.

Содержание

Истоки геометродинамики

1. Клиффорд В. О пространственной теории материи. Альберт Эйнштейн и теория гравитации: сб. статей. М.: Мир, 1979. С. 36–37
2. C.W. Misner, J.A. Wheeler, Ann. Phys. USA 2, 527 (1957).
3. Дж. Уилер. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: И.Л. (1962) 352 с.
4. Ч.Мизнер, Дж.Уилер, в сб. Альберт Эйнштейн и теория гравитации, Мир, Москва (1979), с.542.
5. Сахаров А.Д.. Топологическая структура элементарных зарядов и CPT-симметрия. В сб. Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1972, С. 542–554

Тополого-геометрическая теория полей и частиц

- Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля (Часть I). Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, 2014, вып. 4. С. 6-24. http://www.stfi.ru/ru/issues.htm
- Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть II). Масса и гравитация, 2014, вып. 4. С. 25-39. http://www.stfi.ru/ru/issues.html
- Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть III). Уравнения индукции фундаментальных полей, 2015, вып. 3. С. 44-60. http://www.stfi.ru/ru/issues.html
- Журавлев В.М. Геометрия, топология и физические поля. (Часть IV). Топологическая структура частиц, 2015, вып. 4. С. 1-15. http://www.stfi.ru/ru/issues.html

Точка зрения Клиффорда

"On the space theory of matter"(1870)

"Я считаю:

1. 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там не справедливы обычные законы геометрии
2. 2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
3. 3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весомая или эфирная
4. 4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности

У. Клиффорд"

Точка зрения Клиффорда

"On the space theory of matter"(1870)

"Я считаю:

1. 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там не справедливы обычные законы геометрии
2. 2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
3. 3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весомая или эфирная
4. 4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности

У. Клиффорд"

Точка зрения Клиффорда

"On the space theory of matter"(1870)

"Я считаю:

1. 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там не справедливы обычные законы геометрии
2. 2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
3. 3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весомая или эфирная
4. 4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности

У. Клиффорд"

Точка зрения Клиффорда

"On the space theory of matter"(1870)

"Я считаю:

1. 1. Что малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там не справедливы обычные законы геометрии
2. 2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.
3. 3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи, будь она весомая или эфирная
4. 4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности

У. Клиффорд"

Ручка Уилера

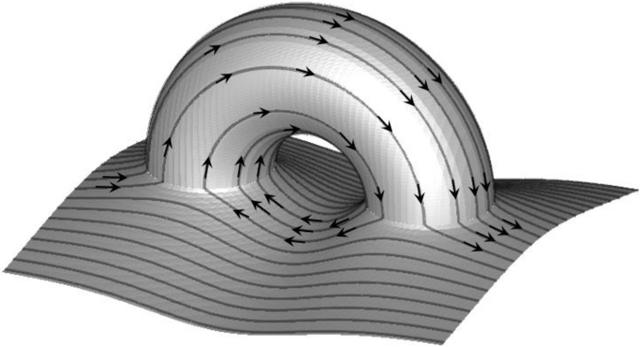


Рис.: 1. Ручка Уилера и “заряд без заряда”

Геометрия вложения в евклидово пространство

Какова геометрия пространства?

Физическое пространство является 3-х мерной гиперповерхностью (многообразием) в объемлющем евклидовом пространстве четырех измерений W^4.
Геометрия физической гиперповерхности задается с помощью функции высоты:

$$u = \mathcal{F}(x, t)$$

Соответствующая метрика задаётся соотношениями:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta}, \ \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

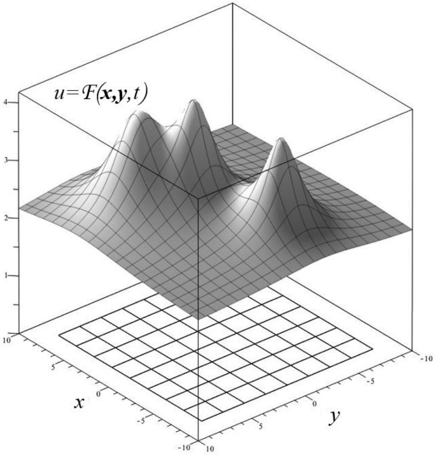


Рис.: 3. Физическая гиперповерхность и функция высоты

Геометрические маркеры

$e^a(\overrightarrow{x}, t)$ - геометрические маркеры

Пусть $\mathcal{F}$ - функция высоты физической гиперповерхности. Свяжем поля $e^a = e^a(\overrightarrow{x}, t)$ с $\mathcal{F}$ соотношением:

$$\mathcal{F} = \varepsilon|e(x)|^2/2 + \mathcal{F}_0, \qquad (1)$$

где $\mathcal{F}_0$ - значение $\mathcal{F}$ в минимуме $\varepsilon = 1$ (или максимуме $\varepsilon = -1$), которое эквивалентно уравнениям:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial |e|^2}{\partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} e^a.$$

и, как следствие, уравнению:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^{(a)}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \varepsilon e^{(a)}$$

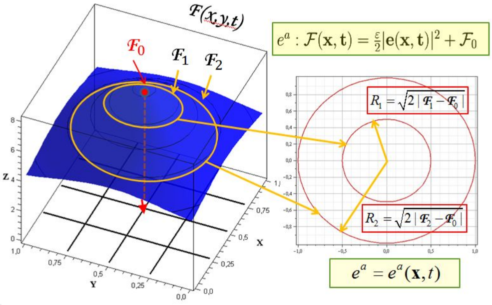


Рис.: 5. Функция высоты - квадрат расстояния в пространстве маркеров

Принцип Уилера: топологическая интерпретация

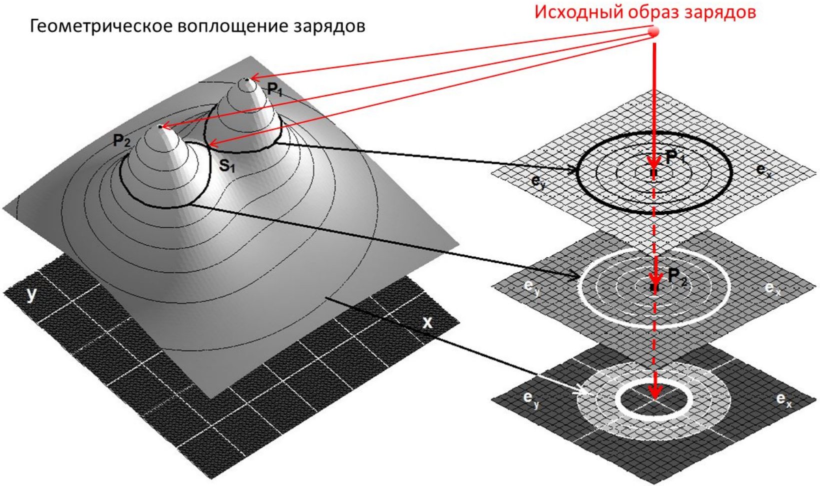


Рис.: 6. Топологическая интерпретация принципа Уилера

Координатные тождества

Точечный заряд в пространстве маркеров

Пусть e^1, e^2, e^3 - геометрические маркеры. Тогда имеет место формальное дифференциальное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a}\left(\frac{e^a}{|\overrightarrow{e}|^3}\right) = 4\pi\delta(\overrightarrow{e}). \qquad (2)$$

Здесь $\delta(\overrightarrow{e}) = \delta(e^1)\delta(e^2)\delta(e^3)$ - δ-функция Дирака.

Дивергенция радиус-вектора в пространстве маркеров

Имеет место второе формальное дифференциальное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a} e^a = 3. \qquad (3)$$

Электродинамическое тождество

Тождество в физической системе координат

В случае, если $e^a = e^a(\overrightarrow{x})$ - функции новой системы координат $\overrightarrow{x} = (x^1, x^2, x^3)$, то тождество (??) в этой системе координат принимает вид:

$$\boxed{\frac{1}{|J|}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(|J|\frac{\mathcal{E}^\alpha}{|\overrightarrow{e}(x)|^3}\right) = 4\pi\delta(e(x)) = \frac{4\pi}{|J|}\sum_k \varepsilon_k \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_k). \qquad (4)}$$

Здесь $\varepsilon_k = \pm 1$ - величина заряда, x_k - решения уравнения:
$|\overrightarrow{e}(x_k)|^2 = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$

$$J = \det\left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right), \quad \mathcal{E}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a.$$

J- якобиан отображения координат $\overrightarrow{e} \to \overrightarrow{x}$.

Электродинамическое тождество

Уравнение Максвелла

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(|J|\frac{\mathcal{E}^\alpha}{|\overrightarrow{e}(x)|^3}\right) = 4\pi\sum_k \varepsilon_k \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_k). \qquad (5)$$

Если полагать:

$$\overrightarrow{D} = |J|\frac{\mathcal{E}^\alpha}{|\overrightarrow{e}(x)|^3}, \quad \left(J = \det\left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right), \quad \mathcal{E}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a.\right)$$

и

$$\rho_e = \sum_k \varepsilon_k \delta(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_k).$$

Уравнение (5) можно рассматривать как первое уравнение Максвелла для индукции электрического поля совокупности точечных зарядов:

$$\boxed{\operatorname{div}\overrightarrow{D} = 4\pi\rho_e \qquad (6)}$$

Гравитационное тождество

Уравнение Пуассона

В физической системе координат (3) принимает вид:

$$\frac{1}{|\mathrm{J}|}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\alpha}\left(|\mathrm{J}|\mathcal{E}^\alpha\right) = 3. \tag{7}$$

Здесь, как и раньше:

$$\mathrm{J} = \det\left(\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}{\partial \mathrm{x}^\alpha}\right), \quad \mathcal{E}^\alpha = \frac{\partial \mathrm{x}^\alpha}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}\mathrm{e}^{\mathrm{a}}.$$

Это уравнение приводится к виду уравнения Пуассона:

$$\operatorname{div}\vec{\mathrm{g}} = 4\pi \mathrm{G}\rho_{\mathrm{m}}. \tag{8}$$

где $\vec{\mathrm{g}} = (4\pi/3)\mathrm{G}|\mathrm{J}|\mathrm{m}_0\vec{\mathcal{E}}$ - ускорение свободного падения, а величина $\rho_{\mathrm{m}} = \mathrm{m}_0|\mathrm{J}|$ играет роль плотности массы, m_0 - размерный множитель массы.

Напряженность фундаментального поля

Фундаментальные напряженности

Поля

$$\overrightarrow{\mathrm{D}} = \frac{1}{\mathrm{R}^3}\overrightarrow{\mathcal{G}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{g}} = \frac{4\pi}{3}\mathrm{Gm}_0\overrightarrow{\mathcal{G}}$$

будем называть

напряженностями электромагнитного и гравитационного полей.

Поле $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ с компонентами:

$$\mathcal{G}^\alpha = |\mathrm{J}|\mathcal{E}^\alpha = |\mathrm{J}|\frac{\partial \mathrm{x}^\alpha}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}\mathrm{e}^{\mathrm{a}}$$

будем называть напряженностью фундаментального поля.

Динамика полей

Уравнения индукции фундаментального поля

Перенос геометрических маркеров

Скорость переноса маркеров

Скорость переноса определяется соотношением:

$$\boxed{\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \qquad (9)}$$

Скорость переноса определяется из (9) однозначно:

$$V^\alpha = -\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a}\frac{\partial e^a}{\partial t}.$$

Из (9) для якобиана $|J|$ следует уравнение:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}|J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(V^\beta |J|\right) = 0. \qquad (10)}$$

- закон сохранения плотности маркеров.

Как меняются напряженности со временем?

Вычислим производную от компонент напряженности $\vec{\mathcal{G}}$, используя скорость переноса $\vec{\mathrm{V}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{\alpha}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial |\mathrm{J}|}{\partial \mathrm{t}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}} \mathrm{e}^{\mathrm{a}} + |\mathrm{J}| \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}} \frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}{\partial \mathrm{t}} + |\mathrm{J}| \mathrm{e}^{\mathrm{a}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}. \tag{11}$$

Динамика фундаментальной напряженности

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{G}}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{rot}\left([\vec{\mathcal{G}} \times \vec{\mathrm{V}}]\right) - 3|\mathrm{J}|\vec{\mathrm{V}}. \tag{12}$$

Здесь учитывалось:

$$\mathrm{V}^{\alpha} = -\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}} \frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{a}}}{\partial \mathrm{t}}, \qquad \frac{\partial |\mathrm{J}|}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{div}\left(|\mathrm{J}|\vec{\mathrm{V}}\right) = 0.$$

Уравнение электромагнитной индукции

Используя соотношение:

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} = \mathrm{R}^{-3}\overrightarrow{\mathcal{G}},$$

находим:

Уравнение электромагнитной индукции

$$\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{\mathcal{H}}\right) = \frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{D}}}{\partial \mathrm{t}} + 4\pi \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_{\mathrm{k}} \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{k}}) \overrightarrow{\mathrm{V}}. \tag{13}$$

Это уравнение в точности соответствует уравнению электромагнитной индукции для электрической индукции $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ в предположении, что:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{H}} = [\overrightarrow{\mathrm{V}} \times \overrightarrow{\mathcal{D}}] + \nabla \Phi_{\mathrm{H}}, \qquad \Delta \Phi_{\mathrm{H}} = -\mathrm{div}\left([\overrightarrow{\mathrm{V}} \times \overrightarrow{\mathcal{D}}]\right).}$$

- напряженность магнитного поля, электрический ток:

$$\overrightarrow{\mathrm{j}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_{\mathrm{k}} \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}_{\mathrm{k}}) \overrightarrow{\mathrm{V}}$$

Уравнение гравитационной индукции

Используя соотношение:

$$\overrightarrow{g} = \frac{4\pi G}{3} m_0 \overrightarrow{\mathcal{G}}, \tag{14}$$

находим:

Уравнение гравитационной индукции

$$\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\Big([\overrightarrow{g} \times \overrightarrow{V}]\Big) - 4\pi G \rho \overrightarrow{V}. \tag{15}$$

Напряженность гравимагнитного поля:

$$\boxed{\overrightarrow{Z} = -[\overrightarrow{g} \times \overrightarrow{V}]}$$

плотность импульса потока:

$$\overrightarrow{i} = 4\pi G \rho \overrightarrow{V}$$

с плотностью массы:

$$\rho = m_0 |J|$$

Динамика полей

Интегралы движения и геометрическое усреднение

Геометрическое усреднение

В силу уравнения:

$$\frac{\partial|J|}{\partial t} + \mathrm{div}\Big(|J|\overrightarrow{V}\Big) = 0$$

плотность $|J|$ сохраняется, что позволяет ввести геометрическое усреднение.

Геометрическое усреднение.

Пусть $Q(\overrightarrow{x}, t)$ - функция координат и времени. Тогда

$$\overline{Q} = \frac{1}{V_0}\int\limits_{\mathcal{V}_0} Q(x,t)|J|d\mathcal{V}, \qquad (16)$$

где

$$V_0 = \int\limits_{\mathcal{V}_0} |J|d\mathcal{V}. \qquad (17)$$

Здесь $\mathcal{D}_0$ - образ области $\mathcal{V}_0$ в декартовой карте координат e, а $|\mathcal{V}_0|$ - величина объема области $\mathcal{D}_0$, соответствующей $\mathcal{V}_0$.

Средние координаты, скорости, ускорения

В частности, имеем:

$$\mathrm{X}^{\alpha} = \overline{\mathrm{x}}^{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{V}_0} \int\limits_{\mathcal{V}_0} \mathrm{x}^{\alpha} |\mathrm{J}| \mathrm{dV}, \tag{18}$$

$$\mathrm{U}^{\alpha} = \overline{\mathrm{u}}^{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{V}_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \int\limits_{\mathcal{V}_0} \mathrm{x}^{\alpha} |\mathrm{J}| \mathrm{dV} = \int\limits_{\mathcal{V}_0} \mathrm{V}^{\alpha} |\mathrm{J}| \mathrm{dV}, \tag{19}$$

$$\mathrm{A}^{\alpha} = \overline{\mathrm{a}}^{\alpha} = \frac{1}{\mathrm{V}_0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} \int\limits_{\mathcal{V}_0} \mathrm{x}^{\alpha} |\mathrm{J}| \mathrm{dV} = \int\limits_{\mathcal{V}_0} \left(\mathrm{V}^{\alpha}_{\mathrm{t}} + \mathrm{V}^{\beta} \mathrm{V}^{\alpha}_{,\beta} \right) |\mathrm{J}| \mathrm{dV}. \tag{20}$$

Интеграл берется по объему, ограниченному изповерхностью функции $\mathcal{F}$, переносимой полем $\overrightarrow{\mathrm{V}}$.

Интегралы движения и геометрическое усреднение

Утверждение:

Если функция $I(\overrightarrow{x}, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V^{\alpha} \frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{21}$$

то геометрическое среднее значение этой функции:

$$< I >= \frac{1}{V_0} \int\limits_{V} I(\overrightarrow{x}, t)|J|dV$$

является сохраняющейся величиной

$$\frac{d < I >}{dt} = \frac{1}{V_0} \frac{d}{dt} \int\limits_{V} I(\overrightarrow{x}, t)|J|dV = \frac{1}{V_0} \int\limits_{V} \left(\frac{\partial I}{\partial t} + V^{\alpha} \frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} \right) |J|dV = 0. \tag{22}$$

Следствие: Любая функция маркеров $I = I(e^1, e^2, e^3)$ полей $e^a(\overrightarrow{x}, t)$ является интегралом движения усредненных уравнений.

Уравнения Ньютона

Гидродинамическое тождество:

$$\boxed{\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + V^{\beta}\frac{\overrightarrow{V}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\nabla}|\overrightarrow{V}|^2 - [\overrightarrow{V} \times \mathrm{rot}\,\overrightarrow{V}]. \quad (23)}$$

$$\overrightarrow{A}(t) = \frac{d\overrightarrow{\overrightarrow{V}}}{dt} = \int\limits_{\mathcal{V}_0}\left(\frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} - [\overrightarrow{V}, \mathrm{rot}\,\overrightarrow{V}] + \frac{1}{2}\nabla|\overrightarrow{V}|^2\right)\tilde{J}d\mathcal{V}$$

Полагая:

$$\boxed{V = -\gamma_0 A + \nabla\chi, \qquad (24)}$$

находим:

$$\overrightarrow{A}(t) = \frac{1}{V_0}\int\limits_{\mathcal{V}_0}\left(\gamma_0\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} - \gamma_0\nabla\Phi + \gamma_0[\overrightarrow{V}, \mathrm{rot}\,\overrightarrow{A}] + \nabla\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{V}|^2 + \gamma_0\Phi + \chi_t\right)\right)|J|d\mathcal{V}$$

Усредненные уравнения - уравнения Ньютона!

Формальное представление поля V переноса маркеров:

Уравнение Ньютона частицы в эм. поле:

$$\frac{d}{dt}\overline{V} = c\gamma_0\overline{E} - \gamma_0\left[\overline{V}\times\overline{B}\right] - \nabla_X\overline{U} + F_q. \tag{25}$$

Здесь:

$$\overline{U} = \overline{|V|^2/2 + \chi_t + \gamma_0\Phi},$$

$$\overline{B} = \overline{\mathrm{rot}A}, \quad \overline{E} = -\overline{\left(\nabla\Phi - c^{-1}A_t\right)}$$

средние (макроскопические) поля, F_q^α - “квантовая поправка”:

$$F_q^\alpha = \int\limits_{\mathcal{V}_i}\gamma_0\left[V'\times B'\right]^\alpha\tilde{J}dV,$$

Микроскопические поля

Функция Φ, и векторное поле A интерпретируются как микроскопические потенциалы электромагнитного поля, так что:

$$E = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \mathrm{rot}A.$$

- микроскопические напряженности электромагнитного поля.

Остаточный потенциал

$$U(x,t) = \frac{1}{2}|V|^2 + \chi_t + \gamma_0\Phi, \tag{26}$$

по смыслу носит не электромагнитный характер!

Масса частицы:

$$M = \int\limits_V |J|dV = \mathcal{V}_0.$$

Энергия и масса

Энергия и масса

Интегралы движения усредненных уравнений

Утверждение:

Если функция $I(\overrightarrow{x}, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{27}$$

то геометрическое среднее значение этой функции:

$$< I >= \int\limits_V I(\overrightarrow{x}, t)\tilde{J} dV$$

является сохраняющейся величиной

$$\frac{d < I >}{dt} = \frac{d}{dt} \int\limits_V I(\overrightarrow{x}, t)\tilde{J} dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial I}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial I}{\partial x^\alpha} \right) dV = 0. \tag{28}$$

<u>Следствие</u>: Любая функция $I(e^a, e^2, e^3)$ полей $e^a(\overrightarrow{x}, t)$ является интегралом движения усредненных уравнений.

Энергия электромагнитного поля

Утверждение:

Пусть $\overrightarrow{\mathrm{D}}$ - индукция фундаментального поля. Рассмотрим векторные поля вида:

$$\overrightarrow{\mathcal{E}} = \mathrm{f}(\mathcal{F})\overrightarrow{\nabla}\mathcal{F}, \tag{29}$$

где $\mathcal{F}$ - фундаментальный потенциал.
Тогда величина:

$$\boxed{\mathrm{I_E} = \int\limits_{\mathrm{V}} \left(\overrightarrow{\mathrm{D}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right) \mathrm{dV} \qquad (30)}$$

является интегралом движения усредненных уравнений.

Энергия электромагнитного поля

Доказательство

Подставляя $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (29) в (31), имеем:

$$\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{E}} = \int\limits_{\mathrm{V}} \frac{|\mathrm{J}|}{|\mathrm{R}|^3} \mathrm{f}(\mathcal{F}) \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \mathcal{F} \nabla_\beta \mathcal{F} \mathrm{dV} = \int\limits_{\mathrm{V}} \frac{|\mathrm{J}|}{|\mathrm{R}|} \mathrm{f}(\mathcal{F}) \mathrm{dV}.$$

Поскольку $\mathrm{R} = \sqrt{2|\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}|}$, а $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \overrightarrow{\mathrm{e}}^{\,2}$, то $\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{E}}$ - интеграл движения.

Величина:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{E}} = \int\limits_{\mathrm{V}} \left(\overrightarrow{\mathrm{D}}, \overrightarrow{\mathcal{E}} \right) \mathrm{dV} \tag{31}$$

является интегралом движения усредненных уравнений

От энергии к массе

Выбирая

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{E}} = \overrightarrow{\nabla}\Phi = 4\pi\overrightarrow{\nabla}\mathrm{R}^3/3,}$$

получаем равенство:

$$\boxed{\mathrm{W} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathrm{V}}\left(\overrightarrow{\mathrm{D}}, \overrightarrow{\mathcal{E}}\right)\mathrm{dV} = \int\limits_{\mathrm{V}}|\mathrm{J}|\mathrm{dV}.}$$

От энергии к массе

Масса

Энергия

$$W = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V \left(\vec{D}, \vec{E}\right) dV = \int\limits_V |J| dV.$$

с точки зрения СТО и ОТО содержит всю массу частицы.

Масса - это объем пространства маркеров, соответствующий частице

$$M = \int\limits_V |J| dV.$$

Отсюда следует соотношение Эйнштейна (при $c = 1$):

$$W = Mc^2, \qquad (32)$$

Гравитационное поле

После того, как обосновано использования $|J|$ в качестве плотности массы, появляется обоснование описания поля (14):

$$\vec{g} = \frac{4\pi G}{3} m_0 \vec{\mathcal{G}}$$

Здесь m_0 - множитель размерности массы. В качестве напряженнсти гравитационного поля, которое удовлетворяет системе уравнений:

Уравнения гравитационного поля

$$\operatorname{div} \vec{g} = 4\pi G \rho_m,$$
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\left([\vec{g} \times \vec{V}]\right) - 4\pi G \rho_m \vec{V}.$$

где ρ_m - плотность массы:

$$\boxed{\rho_m = m_0 |J|}$$

Геометрические поправки

Учет неевклидовой геометрии пространства маркеров

Обобщённое усреднение

Массовая функция

Утверждение. Геометрическое усреднение с функцией

$$\widetilde{J} = I(\overrightarrow{e})|J|,$$

где $I(\overrightarrow{e})$ - любой интеграл движения, обладает теми же свойствами, что и исходное геометрическое усреднение. В частности, выполняется уравнение сохранения

$$\boxed{\frac{\partial \widetilde{J}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[V^{\alpha}\widetilde{J}\right] = 0.}$$

Кроме этого, плотность энергии частицы будет определяться соотношением:

$$\rho_m = \widetilde{J} = I(\overrightarrow{e})|J|.$$

Функцию $I(\overrightarrow{e})$ будем называть масс-фактором.

Вычисление массы простой ячейки

Выбор масс-фактора

Предполагая, что масс-фактор имеет следующий вид:

$$I(e) = \sqrt{1 + R^2/R_0^2}. \tag{33}$$

Получаем объем пространства простой топологической ячейки:

$$V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 + R_0^3(1 + 4\pi\alpha), \tag{34}$$

где

$$\boxed{\alpha = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{4\pi}.}$$

Числовое значение α равно:

$$\alpha = \frac{1}{137.9770423} = 0.007247582520.$$

Объем пространства маркеров

Постоянная тонкой структуры

Нормировочный коэффициент в простейшем случае есть объем параболоида в 4-х мерном пространстве с шаром радиуса $\mathrm{R_0}$ в основании:

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}_0^3 \left[4\pi \int \sqrt{1+\mathrm{x}^2}\mathrm{x}^2 \mathrm{dx} \right] =$$

$$= 4\pi \mathrm{R}_0^3 \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1) \right].$$

Если обозначить $\mathrm{V_0} = 4/3\pi \mathrm{R}_0^3$, тогда:

$$\frac{\mathrm{V}-\mathrm{V_0}}{\mathrm{R}_0^3} = 1 + 4\pi\alpha,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{137.9770423}, \quad \alpha_0 = \frac{1}{137.0359998}$$

Геометрическая иллюстрация

Значение α

$$\alpha = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}-1) - \frac{1}{3} \right] - \frac{1}{4\pi}$$

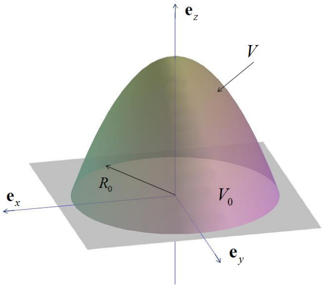


Рис.: 8. Отличие объемов интегрирования

Пример вычисления массы простой ячейки

Масса простой ячейки

В результате массу простой ячейки (взятую по модулю) можно записать в виде:

$$\boxed{\mathcal{M} = \mathrm{R}_0^3 \mathrm{m}_0 \left[\frac{4}{3}\pi + (1 + 4\pi\alpha)\right].}$$

Момент инерции простой ячейки

Внутреннее вращение ячейки

Сферические координаты на пространстве маркеров:

$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{R}\cos\Phi\sin\Theta, \quad \mathrm{e}^2 = \mathrm{R}\sin\Phi\sin\Theta, \quad \mathrm{e}^3 = \mathrm{R}\cos\Theta.$$

Поле переноса в пространстве маркеров имеет вид:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{e}}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\vec{\mathrm{e}} + [\vec{\Omega} \times \vec{\mathrm{e}}],$$

где $\vec{\Omega}$ - вектор угловой скорости:

$$\vec{\Omega} = \Big(-\Omega_2\sin\Phi, \Omega_2\cos\Phi, \Omega_1\Big).$$

Здесь $\Omega_1 = \dot{\Phi}$, $\Omega_2 = \dot{\Theta}$.
Осевой момент инерции для вращения вокруг оси e^3 с постоянной Ω_1 имеет вид:

$$\boxed{\mathrm{I}_{33} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\mathrm{R}_0} \Big((\mathrm{e}^1)^2 + (\mathrm{e}^2)^2\Big)\sqrt{1 + \mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2}\,\mathrm{R}^2\sin\Theta \mathrm{d}\mathrm{R}\mathrm{d}\Phi\mathrm{d}\Theta.}$$

Момент инерции ячейки

Вычисление момента инерции

$$\boxed{I_{33} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta \int_0^{R_0} \sqrt{1 + R^2/R_0^2} R^4 dR = \frac{8\pi}{3} R_0^5 \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} x^4 dx.}$$

Обозначим:

$$I_{33}^{(0)} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^3 \Theta d\Theta \int_0^{R_0} R^4 dR = \frac{8\pi}{3} R_0^5 \int_0^1 x^4 dx.$$

Момент инерции ячейки

$$\boxed{I_{33} = \frac{8\pi}{3} R_0^5 \left((7/48)\sqrt{(2)} - (1/16)\ln(\sqrt{(2)} - 1) \right), \quad I_{33}^{(0)} = \frac{8\pi}{15} R_0^5.}$$

Момент инерции ячейки

Обозначим:

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3, \quad V_1 = R_0^3 \left[\frac{4}{3}\pi + (1 + 4\pi\alpha) \right]$$

Поправка к моменту инерции шара

$$\boxed{\alpha_L = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{33}}{V_1} - \frac{I_{33}^{(0)}}{V_0} \right) = -\frac{19\sqrt{2} + 33\ln(\sqrt{2}-1))}{90(3\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1))} \simeq -\frac{1}{136.5584965}.}$$

Поправка к моменту импульса ячейки

Пусть $L_0 = 2\Omega_1 M_1 R_0^2/5$ момент импульса шара с массой $M_1 = V_1 m_0$, а $L = \Omega_1 I_{33}$ - полный момент импульса. Тогда:

$$\boxed{\frac{L - L_0}{L_0} = -5\alpha_L.}$$

Исправленные уравнения индукции гравитационного поля

Следуя формуле исправленной плотности масс:

$$\rho_{\mathrm{D}} = \mathrm{I}(\mathrm{R})|\mathrm{J}| = \sqrt{1 + \mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2}|\mathrm{J}|,$$

получаем исправленную формулу для поля напряженности гравитационного поля:

$$\overrightarrow{\mathrm{g}} = \frac{4\pi \mathrm{G}}{3}\mathrm{I}(\mathrm{R})|\mathrm{J}|\overrightarrow{\mathcal{E}} = \rho_{\mathrm{D}}\frac{4\pi \mathrm{G}}{3}\overrightarrow{\mathcal{E}}.$$

Уравнения гравитационного поля

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\mathrm{g}} = 4\pi \mathrm{G}_{\mathrm{D}}(\mathrm{R})\rho_{\mathrm{D}},$$
$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{g}}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{rot}\Big([\overrightarrow{\mathrm{g}} \times \overrightarrow{\mathrm{V}}]\Big) - 4\pi \mathrm{G}_{\mathrm{D}}(\mathrm{R})\rho_{\mathrm{D}}\overrightarrow{\mathrm{V}}.$$

где $\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{D}} \text{ - эффективный параметр гравитационного поля}}$:

$$\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{D}}(\mathrm{R}) = \mathrm{G}\zeta(\mathrm{R}) = \mathrm{G}\frac{1}{3}\frac{4\mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2 + 3}{1 + \mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2}. \quad (35)}$$

Темная материя

$$G_D(R) = G_0 \frac{1}{3} \frac{4R^2/R_0^2 + 3}{1 + R^2/R_0^2}.$$

$$G_D(R_0) = 7/6 G_0 > G_0$$

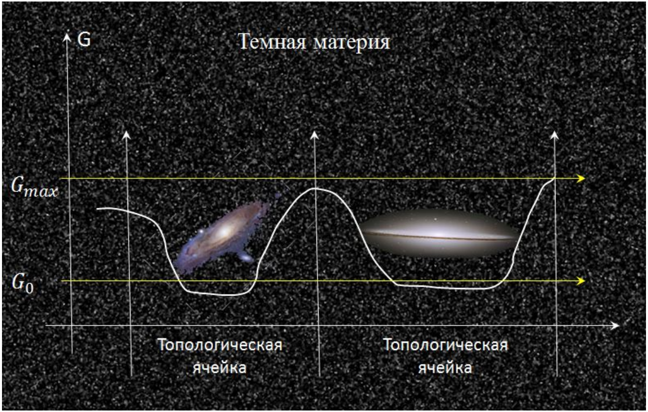


Рис.: 9. Темная материя ≡ эффективная гравитационная постоянная

Общие выводы I

Частицей является топологическая ячейка

Частица всегда должна рассматриваться как элемент топологической ячейки, которая ее содержит. Поэтому ее динамика определяется общей структурой топологичской ячейки.

Усредненные уравнения Ньютона

Усредненные уравнения Ньютона представлют собой уравнения для дискретных компонент топологических ячеек и определяют движение внутренних компонент относительно, содержащией их ячейки.

Масса - геометрия

Масса частиц определяется как множитель в уравнении Ньютона для относительного движения ячейки внутри ячейки системы отсчета и равна объему ячейки в пространстве маркеров.

Общие выводы II

Общее гравитационное поле

Гравитационное поле в данной теории является почти ньютоновским:

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{g}}) = 4\pi G_{\mathrm{D}}(\mathrm{R})\rho_{\mathrm{D}},$$

но переменное поле связано с гравимагнитным полем $\overrightarrow{\mathrm{Z}}$ уравнением индукции:

$$\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{g}}}{\partial \mathrm{t}} = -\mathrm{rot}\Big([\overrightarrow{\mathrm{g}} \times \overrightarrow{\mathrm{V}}]\Big) - 4\pi G_{\mathrm{D}}(\mathrm{R})\rho_{\mathrm{D}}\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

Связь с электромагнитным полем

Гравитационное поле связано с фундаментальным электромагнитным полем соотношением:

$$\overrightarrow{\mathrm{g}} = \frac{4\pi}{3}\mathrm{G}\mathrm{R}^3\mathrm{I}(\mathrm{R})\overrightarrow{\mathrm{D}}$$

Общие выводы III

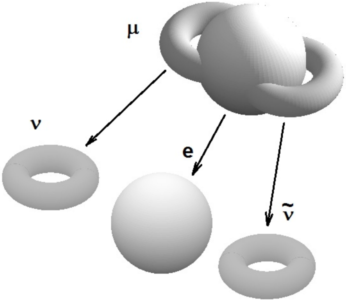
Темная материя или эффект скрытой массы

Эффект скрытой массы является следствием кривизны пространства маркеров и выражается в том, что в уравнения тяготения входит эффективная постоянная тяготения:

$$\mathrm{G_D(R)} = \mathrm{G}_0 \frac{1}{3} \frac{4\mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2 + 3}{1 + \mathrm{R}^2/\mathrm{R}_0^2}.$$

Внутри ячейки эффективная гравитационная постоянная меняется в диапазоне $[1, 7/6]$. Масса частиц вычисляется как объем (неевклидов) ячейки пространства маркеров. Поправки квантовой теории, связанные с поляризацией вакуума, есть поправки на неевклидовость пространства маркеров.

Спасибо за внимание!



Спасибо за внимание!