УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов[1]

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ПЕТРОВА

Показана связь алгебраической классификации Петрова гравитационных полей с теорией катастроф как обобщенной теорией фазовых переходов. Проведена аналогия переходов между алгебраическими типами пространства-времени и фазовыми переходами не уровне кривизны (тензора Вейля) на примерах классификации Петрова гравитационных полей, алгебраической классификации четырехмерных локально евклидовых пространств и получении гравитационных полей светоподобных источников. Аналогичным образом рассмотрено поведение алгебраической классификации электромагнитного поля и показано, что переход от системы отсчета с чисто магнитным (электрическим) полем к системе отсчета с чисто электрическим (магнитным) полем представляет собой аналог фазового перехода второго рода.

Ключевые слова: Алгебраическая классификация Петрова, гравитационные поля, электромагнитные поля, теория катастроф, фазовые переходы, светоподобные источники, лайтон, геликсон.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv; 64.60.Bd; 05.45.-a

Введение

Естественная инвариантная классификация римановых пространств на основе исследования алгебраической структуры тензора Римана-Кристоффеля (или в более общем случае – тензора конформной кривизны) впервые была предложена в работах А.З.Петрова [1,2] (см. [3], где собраны основные результаты).

Одним из ключевых моментов классификации Петрова является отображение 4-мерного пространства-времени на шестимерное евклидово пространство, которое в дальнейшем удается свести к 3-мерному комплексному евклидовому пространству. При этом тензор кривизны (или тензор Вейля) отображаются в симметричную вещественную бесследовую матрицу, которую затем можно представить как комплексную матрицу Вейля. Эта матрица легко получается и при специальном отображении тезора Вейля, которое оказывается следствием требования преобразования ортогональной 4-матрицы Лоренца в ортогональную 3-матрицу комплексного 3-пространства.

С другой стороны, существует тесная связь алгебраической классификации Петрова и эйнштейновской теорией гравитации через тензор кривизны Римана-Кристоффеля и уравнения тяготения.

В дальнейшем классификация комплексных матриц Вейля осуществляется путем постановки и решения задачи на собственные значения. Одним из важнейших результатов подхода А.З.Петрова к алгебраической классификации пространств является общая теорема (**теорема Петрова**) или **теорема об алгебрических типах гравитационных полей**.

Теорема 1. *Существует три и только три основных типа гравитационных полей по Петрову с сигнатурой метрики (+ - - -); в зависимости от собственных значений и векторов эти типы пространств распадаются на семь подтипов.*

Здесь следует привести также результаты разбиения на классы в зависимости от собственных векторов и собственных значений матрицы Вейля. Из теоремы Петрова следует неоднозначность разбиения на классы (типы) матриц Вейля. На диаграмме (см. рис.1) приведены результаты такого разбиения различными авторами. Необходимо отметить, что указанная таблица дополнена подтипом ***Ia***, который ни один из указанных авторов не выделяет в качестве самостоятельного. Такое выделение диктуется как классификацией матриц по рангам, так и чисто физическими соображениями, например, связанными с образованием стоячей гравитационной волны [4].

Стрелки на диаграмме Пенроуза (рис.1) указывают направление возрастания кратности главных светоподобных направлений при переходах между типами пространств (в том числе вырождение по рангу матрицы Вейля) [5].

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

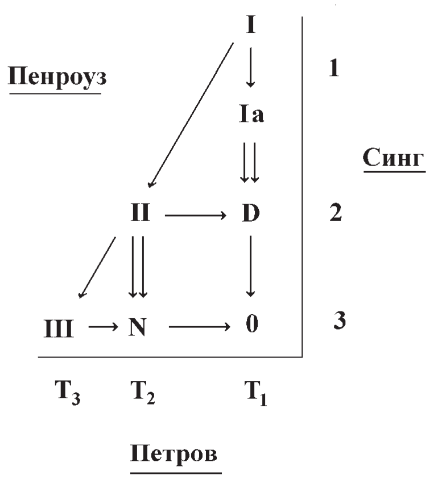

Рис. 1. Диаграмма алгебраической классификации пространства-времени согласно разным авторам.

Физическая интерпретация алгебраической классификации становится ясной при использовании уравнения девиации геодезических для анализа поведения облака пробных частиц в гравитационном поле [6]. Оказывается, что гравитационное поле типа ***N*** аналогично полю плоской электромагнитной волны (поперечно-поперечная плоская гравитационная волна). Поля типа ***III*** суть также волновые поля, но с продольной составляющей. Аналогом кулоновского поля (поля уединенного точечного заряда) является поле типа ***D***. Тип ***II*** – комбинация полей типов ***D*** и ***N***. В слабом приближении такое поле можно рассматривать как суперпозицию полей кулоновского типа и плоской гравитационной волны. Поля типа ***Ia*** аналогичны стоячим электромагнитным волнам (стоячая гравитационная волна, образованная из двух волн типа ***N*** , в приближении слабого поля относится как раз к такому типу). Обобщение пространства Минковского – это поля типа ***0*** с конформно-плоской метрикой. Примером такого пространства-времени является вселенная Фридмана. Гравитационные поля, не обладающие какими-либо симметриями, относятся к наиболее общему типу ***I***.

С другой стороны, электромагнитное поле, описываемое антисимметричным тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$), может быть проклассифицировано по алгебраическим типам по аналогии с подходом Петрова к классификации гравитационного поля. Для этого необходимо поставить задачу на собственные значения для тензора электромагнитного поля, а затем провести разбиение на классы (типы полей) в зависимости от собственных векторов и собственных значений матрицы F, являющейся матричным представлением тензора $F_{\mu\nu}$. Результаты такой классификации приведены, например в [7, с.170] (см. рис.2).

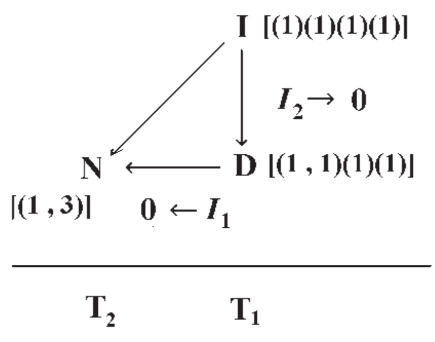

Рис. 2. Диаграмма алгебраической классификации электромагнитного поля.

В отличие от гравитационного поля электромагнитное поле может иметь два алгебраических типа T_1 и T_2 (аналоги типов по Петрову) и три подтипа: I, D, N – аналоги типов по Пенроузу. Переход между подтипами связан с поведением инвариантов электромагнитного поля: $I_1 = (B^2 - E^2)$ и $I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B}$, где $\vec{E}$ и $\vec{B}$ суть векторы напряженности электрического поля и индукции магнитного поля соответственно.

Подтип I отвечает самому общему состоянию поля ($I_1 \neq I_2 \neq 0$). Соответствующая этому подтипу характеристика равна $[(1)(1)(1)(1)]$, то есть все корни характеристического уравнения различны и не равны нулю. Специальные подтипы D и N являются аналогами соответствующих подтипов классификации Петрова. При этом подтип D получается из подтипа I при $I_2 = 0$, когда два собственных значения равны нулю. В этом случае его характеристика равна $[(1,1)(1)(1)]$ и к нему принадлежит, в частности, поле Кулона. Если же оба инварианта I_1 и I_2 равны нулю, то получаем подтип N с характеристикой $[(3)(1)]$. К этому подтипу относится и поле плоской электромагнитной волны, то есть светоподобное электромагнитное поле.

1. Теория катастроф и алгебраическая классификация гравитационных полей

Классификация Петрова гравитационных полей, с одной стороны, связана с решениями кубического характеристического уравнения на собственные значения матрицы Вейля

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \tag{1.1}$$

где λ обозначает характеристические значения, p и q – управляющие параметры.

С другой стороны это уравнение (1.1) может рассматриваться как условие на критические точки для «потенциальной» функции

$$U = (1/4)\,\lambda^4 + (1/2)\,p\lambda^2 + q\lambda, \tag{1.2}$$

которая описывает катастрофу сборки (см, например, [10]).

Задание сепаратрисы (полукубической параболы Нейля) уравнением (Q – дискриминант кубического уравнения)

$$Q = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 0, \tag{1.3}$$

означает равенство двух корней из трех для уравнения (1.1). По алгебраической классификации это соответствует наличию типов ***D*** и ***II***. Исключение переменной λ из уравнений:

$$d^2U/d\lambda^2 = 3\lambda^2 + p = 0; \quad d^3U/d\lambda^3 = 6\lambda^2 = 0 \tag{1.4}$$

приводит к требованию $q = 0$ (вырожденность матрицы Вейля), что в свою очередь означает $\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -\lambda_3 = \sqrt{p}$ или наличие на плоскости параметров (p, q) одномерного множества Максвелла. На этом множестве реализуется тип ***Ia***. Совместное решение уравнений (1.4) дает точку сборки $p = q = 0$ (трижды вырожденную точку), которой отвечают типы пространств ***0, N, III***. Вся оставшаяся плоскость параметров (p, q) отвечает типу ***I*** (см. рис.3) [8]- [9].

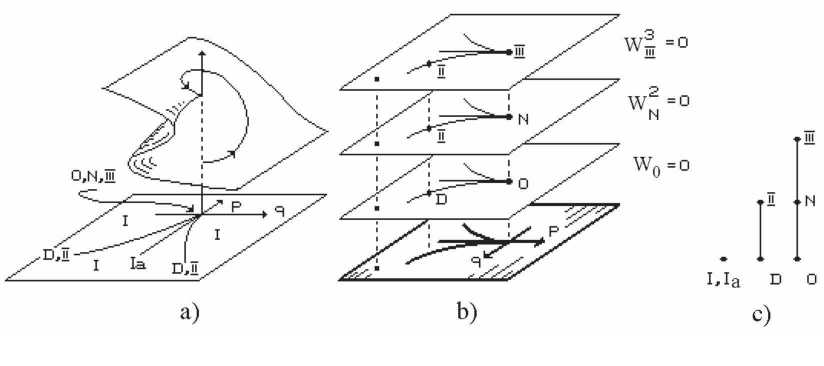

Рис. 3. a). Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров p и q. **b).** Листы, отвечающие классам сопряженности матриц Вейля. **c).** Нильпотентные и полупростые классы сопряженности матриц Вейля.

С другой стороны, точка сборки является аналогом точки фазового перехода второго рода [8]-[9], а переход в тип ***0*** отвечает переходу в наиболее «симметричную» фазу. При этом собственные значения λ (инварианты тензора кривизны или тензора Вейля) играют роль параметра порядка, а параметр p – роль температуры; первая производная функции U по p – энтропии, а вторая производная - теплоемкости. Однако у матриц Вейля имеется собственная характеристика (ранг матрицы), которая ведет себя как теплоемкость твердого тела при фазовых переходах второго рода. Так, ранги матриц типов ***0, N, III*** соответственно равны $r = 0, 1, 2$. Следует подчеркнуть, что здесь «фазами субстанции» выступают типы гравитационных полей [9].

В точке сборки присутствует вырождение по λ (все $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2, 3$), поэтому этой точке соответствуют сразу три типа матриц: ***0, N, III***. Кроме того, скачки вторых производных по p от функции U в точке сборки отвечают скачкам рангов матриц Вейля.

Необходимо еще учитывать и то, что матрицы Вейля упомянутых трех типов обладают следующими свойствами: $W_0 = 0$ (нильпотент индекса 1), $W_N^2 = 0$ (нильпотент индекса 2), $W_{III}^3 = 0$ (нильпотент индекса 3). Описанная ситуация с типами пространств наглядно изображена на рис.3. Фактически плоскость (p, q) (рис.3b) есть проекция трех листов, отвечающих классам сопряженности матриц Вейля [1]: нильпотентные классы сопряженности и полупростые классы сопряженности, то есть содержащие диагональные матрицы (рис.3c).

Над точкой сборки (точкой фазового перехода второго рода) лежат три класса сопряженности нильпотентных матриц индексов 1,2,3. При этом на каждом листе точке фазового перехода второго рода отвечает своя нильпотентная матрица Вейля. Над кривой Нейля – два полупростых класса сопряженности матриц ***D*** и ***II*** типов, а над остальными точками – по одному полупростому классу (типы ***I*** и ***Ia***). Приведенная на рис.3b диаграмма совпадает с разбиением матриц Вейля на классы по Сингу (см. рис.1). Необходимо отметить, что наличие классов сопряженности матриц Вейля снимает вырождение, присущее решению задачи на собственные значения в данном случае. Кроме того, введение матриц типа ***Ia*** имеет здесь обоснование в виде существования множества Максвелла, при пересечении которого происходит «фазовый» переход первого рода, и где потенциальная функция U структурно неустойчива ($q = 0$), то есть критические значения функции совпадают в двух и более точках. В этом смысле структурно неустойчив и тип ***Ia***. Забегая вперед, к этому следует добавить, что все алгебраические типы гравитационных полей (кроме типа ***I***) крайне неустойчивы к малым возмущениям другими типами гравитационных полей как и показано в работах [11]- [12], где получены возможные результирующие типы гравитационных полей при конкретных возмущениях с точки зрения алгебраической классификации. Это и понятно, так как такая смена типа поля связана с фазовыми переходами определенного рода.

2. Алгебраическая классификация четырехмерных локально евклидовых пространств

Алгебраическая классификация пространств, впервые построенная А.З.Петровым, применялась и интерпретировалась в основном как классификация гравитационных полей, описываемых общей теорией относительности, использующей псевдориманову метрику. Поэтому было бы не безинтересно применить метод Петрова к классификации локально евклидовых 4-х мерных пространств, то есть 4-пространств с метрикой, имеющей сигнатуру (++++). Кроме того, появляется возможность продемонстрировать здесь одно из немногих применений теории двойного переменного.

Двойные переменные представляют собой разновидность гиперкомплексных переменных и записываюся в виде (см., например, [13])

$$\zeta = x + \mathrm{e}y, \tag{2.1}$$

где e – базовая единица двойных переменных, $\mathrm{e}^2 = +1$.

При введении двойных переменных обычно считается, что x, y принадлежат полю вещественных переменных, но из-за трудностей с нахождением радикалов под двойными переменными будем понимать конструкцию (2.1), но, вообще говоря, x и y будут считаться принадлежащими полю комплексных переменных.

Операция сопряжения вводится как смена знака при e : $\zeta^\times = x - \mathrm{e}y$. Квадрат модуля двойного переменного $|\zeta|^2$ определяется произведением $\zeta\zeta^\times = \zeta^\times\zeta = x^2 - y^2$ и при $x^2 = y^2 \neq 0$; $\zeta\zeta^\times = 0$. При этом корень из этой величины может быть и мнимым (в смысле комплексных переменных). Поэтому, чтобы избежать этого следует различать на плоскости двойного переменного области с

[1]Подобие матриц ($A = TBT^{-1}$, $\det T \neq 0$) является отношением эквивалентности на множестве матриц. Определенные этим отношением классы эквивалентности называются классами сопряженности.

$\zeta\zeta^{\times} > 0$ и $\zeta\zeta^{\times} < 0$, границей которых служит область $\zeta\zeta^{\times} = 0$. Для записи двойных переменных справедлив аналог формулы Эйлера для комплексных переменных: $\zeta = |\zeta| \cdot exp(e \cdot \varphi)$, где φ – аргумент двойной переменной.

Как и для комплексных переменных введем на плоскости двойного переменного квадрат расстояния между двумя точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$(\Delta\zeta)(\Delta\zeta)^{\times} = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 = (\Delta l)^2 . \tag{2.2}$$

Плоскость с такой метрикой оказывается псевдоевклидовой, а если придать физический смысл x временной координаы, а y – пространственной, то получим пример двумерной плоскости Минковского, на которой выделяются области, разделенные светоподобными линиями, удовлетворяющих условию $|\zeta| = 0$ (двумерный световой конус). Алгебраические операции с двойными переменными аналогичны соответствующим операциям с комплексными величинами. Другими словами, двойные переменные образуют коммутативно-ассоциативную алгебру над полем комплексных величин, однако сами поля не образуют, так как не всегда существует обратный элемент. В дальнейшем примем, что переменные и функции с нулевым модулем исключены из рассмотрения и участия в операциях. Отказ от таких величин означает отказ от работы, в частности, на светоподобных линиях и поверхностях.

Как и при обычной алгебраической классификации пространства-времени с помощью базовой единицы e и на основе тензора Вейля строится 3×3 бесследовая матрица Вейля W двойных переменных над полем вещественных величин и ставится задача на собственные значения. В результате приходим к теореме о типах матрицы Вейля для четырехмерных локально евклидовых пространств [14].

Теорема 2. Существует один и только один основной тип матриц Вейля пространств с сигнатурой $(+ + ++)$; в зависимости от собственных значений и векторов этот тип расщепляется на четыре подтипа: ***I, Ia, D, 0***.

К подтипу ***I*** будем относить пространство, соответствующая матрица Вейля которого имеет различные и не равные нулю собственные значения, представимые в виде двойных переменных над полем вещественных величин: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$; $W_I = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; Ранг матрицы Вейля равен трем.

Если имеется равное нулю собственное значение (например, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$), то соответствующий подтип пространства (вместе с матрицей Вейля) будем называть подтипом ***Ia***: $W_{Ia} = diag\,(0, \lambda, -\lambda)$; ранг $r = 2$.

Пространства, описываемые матрицами Вейля для случая двойного корня соответсвующего характеристического уравнения на двойные переменные, будем называть пространствами подтипа ***D***: $W_I = diag\,(2\lambda, -\lambda, -\lambda)$. Ранг матрицы равен трем.

Следовательно, при наличии тройного корня реализуется единственный вариант: $W_0 = 0$, то есть исследуемое пространство является конформно-плоским. Отнесем такое пространство к подтипу ***0***. Необходимо подчеркнуть, что здесь отсутствуют волновые подтипы, а все подтипы, на которые разбивается двойная матрица Вейля, относятся к одному типу $\mathbf{T_1}$ по Петрову

Характеристическое уравнение в данном случае есть условие экстремума «потенциальной» функции, формально совпадающей с (1.2) и задающей катастрофу сборки в пространстве двойных переменных [14]. Однако в отличие от описания гравитационных полей, кубической параболе Нейля (дискриминант кубического уравнения равен нулю) соответствует только тип ***D***, точке сборки (трижды вырожденная точка) – тип ***0***, а множеству Максвелла – тип ***Ia***. Другими словами, здесь существует лишь один лист, отвечающий классам сопряженности матриц Вейля.

Как и при рассмотрении гравитационных полей, для локально евклидовых пространств в плоскости управляющих параметров $(p,\, q)$ переходы между подтипами: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Ia} \to \boldsymbol{0}$, аналогичны фазовым переходам второго рода и сопровождаются скачками рангов соответствующих матриц Вейля (подтип ***0*** представляет собой наиболее симметричную «фазу»), а пересечение множества Максвелла отвечает фазовому переходу первого рода [14].

При введении комплексно-мнимой переменной $x^0 \to ix^0$ (с $i^2 = -1$) получаем 4-мерное пространство-время, а построенная классификация переходит в известную алгебраическую классификацию Петрова гравитационных полей.

3. Теория катастроф и алгебраическая классификация электромагнитного поля

Классификация электромагнитного поля при постановке задачи на собственные значения для тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ связана с решением биквадратного уравнения

$$\lambda^4 + I_1\lambda^2 - I_2 = 0, \tag{3.1}$$

где I_1 и I_2 – инварианты электромагнитного поля, введенные выше.

Уравнение (3.1) является уравнением на экстремум «потенциальной» функции

$$\Phi = (1/5)\lambda^5 + (1/3)I_1\lambda^2 - I_2^2\lambda = 0, \tag{3.2}$$

Функция (3.2) есть частный случай более общей функции

$$\tilde{\Phi} = (1/5)\lambda^5 + (1/3)a\lambda^2 + (1/2)b\lambda^2 + c\lambda. \tag{3.3}$$

Если значения параметров a, b, c ничем не ограничены, то полная бифуркационная картина такой катастрофы представляет собой «ласточкин хвост» [10]. Однако в нашем случае $b = 0$, а $c \equiv -I_2^2 \leq 0$. Другими словами, имеет место ***катастрофа с ограничениями***, соответствующая симметричному разрезу вдоль «ласточкина хвоста». Поэтому все дважды, трижды и четырежды вырожденные критические точки сливаются в одну четырежды вырожденную точку с $I_2^2 = 0$ и $I_1 = 0$. Эта точка отвечает плоской электромагнитной волне.

Необходимо добавить, что если ввести дуально сопряженный тензор электромагнитного поля

$$F^*_{\alpha\beta} = (1/2)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\gamma\delta}, \tag{3.4}$$

то при формулировке задачи на собственные значения для такого тензора получаем характеристическое уравнение (3.1), в котором необходимо перейти от λ к $i\lambda$, то есть совершить поворот на угол $\pi/2$ в комплексной плоскости собственных значений.

С другой стороны, напряженность электрического и индукцию магнитного полей можно объединить в комплексный 3-вектор $\vec{F} = \vec{E} + i\vec{B}$, который не меняется при поворотах, отвечающих переходам $\vec{E} \to i\vec{B}, \vec{B} \to -i\vec{E}$. При этом инвариант I_1 в отличие от I_2 меняет знак. Такие повороты в комплексной плоскости соответствуют дуальным поворотам между векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Следовательно, при такого рода поворотах в уравнении (3.1) происходит смена знака при λ^2, то есть инвариант I_1 меняет знак, проходя, естественно, через нуль.

В общем случае, когда все собственные значения не совпадают друг с другом, решения уравнения (3.1) могут быть записаны как $\lambda^2_{1,2} = -I_1/2 + (I_1^2/4 + I_2^2)^{1/2}$, $\lambda^2_{3,4} = -I_1/2 - (I_1^2/4 + I_2^2)^{1/2}$ и их дискриминанты неотрицательны. Поэтому критическое множество, отвечающее нулевым значениям дискриминанта, состоит лишь из одной точки $I_1 = I_2 = 0$ в пространстве параметров I_1 и I_2 (начало «ласточкиного хвоста»). Таким инвариантам удовлетворяет поле плоской электромагнитной волны, относящееся к типу N. Смена знака у I_1 означает переход к дуально сопряженному электромагнитному полю, то есть при $I_1 > 0$ существует такая система отсчета, в которой присутствует лишь электрическое поле, а для $I_1 < 0$ – система отсчета, где обнаруживается только магнитное поле. Точка $I_1 = I_2 = 0$ (тип N), через которую можно попасть из области положительных в область отрицательных значений инварианта I_1, является точкой фазового перехода между «разновидностями» («фазами») электромагнитного поля.

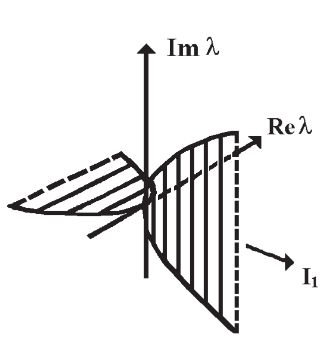

Рис. 4. Поведение дуально сопряженных полей при переходе через $I_1 = 0$.

Кроме того, при $I_1 = 0$ переход от системы отсчета с чисто магнитным (электрическим) полем к системе отсчета с чисто электрическим (магнитным) полем может осуществляться только через систему отсчета, движущуюся со скоростью света. При этом такой переход представляет собой аналог фазового перехода второго рода. В этом случае «фазами субстанции» выступают типы электромагнитного поля. Другими словами, непрерывное стремление I_1 к нулю при $I_2 = 0$ приводит к скачку алгебраического типа поля: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{N}$. На рис.4 изображены дуально сопряженные поля с $I_2 = 0$; $\mathbf{Re}\lambda \Leftrightarrow \mathbf{E}$, $\mathbf{Im}\lambda \Leftrightarrow \mathbf{B}$ (см. [8]).

4. Светоподобные источники, алгебраическая классификация и фазовые переходы

В классической электродинамики существует задача о нахождении предельного поля равномерно движущегося электрического заряда (см., например, [15]) при стремлении скорости заряда к скорости света с точки зрения покоящегося инерциального наблюдателя. В этом случае электромагнитное поле заряда в пределе приобретает свойства плоской монохроматической электромагнитной волны, то есть все собственные значения тензора электромагнитного поля вырождаются в нулевые.

В общей теории относительности подобная задача рассматривалась в [16] для гравитационного поля быстродвижущейся частицы на уровне 6×6 симметричной матрицы Петрова (6×6 матрицы кривизны), соответствующей внешнему полю Шварцшильда в собственной системе отсчета.

В обоих случаях собственные значения как тензора электромагнитного поля, так и матрицы Петрова стремятся к бесконечности в направлении, перпендикулярном к направлению движения, когда скорость частицы V приближается к скорости света, принятой здесь наряду с гравитационной ньютоновской постоянной G_N за единицу, $V \to c = 1$.

Однако корректное математическое решение двух упомянутых выше проблем связано с использованием обобщенных функций (δ-функций Дирака) в предельном переходе, суть которого состоит в том, что величина скорости V частицы устремляется к скорости света c , а масса покоя частицы устремляется к нулю ($m_0 \to 0$) так, чтобы полная релятивистская энергия частицы оставалась постоянной, $E = const$. Такую процедуру предельного перехода будем называть светоподобным пределом (см. [17]).

Распространяя эту предельную процедуру на ряд частицеподобных источников в общей теории относительности, можно получить решения уравнений тяготения, описывающие классические светоподобные сингулярные безмасссовые источники как скалярного, так и векторного типов: лайтоны (***lightons***) и гелихсоны (***helixons***) [18] - [19]. При этом в результате применения вышеупомянутой процедуры к частицеподобным источникам не все физические параметры, присущие этим частицам, сохраняются в предельном случае. В дальнейшем будем использовать понятие матрицы Вейля как симметричной бесследовой 3×3 комплексной матрицы Петрова в евклидовом 3D пространстве.

Аналогичную предельную процедуру на уровне собственных значений матрицы Вейля будем называть далее как ***светоподобный предел на уровне матрицы Вейля***. Такой светоподобный предел может быть описан как катастрофа сборки.

Прежде всего рассмотрим внешнее гравитационное поле Шварцшильда покоящейся массивной частицы, которое принадлежит к алгебраическому типу $\boldsymbol{D}$ по классификации Петрова-Пенроуза с матрицей Вейля

$$W_D = \frac{m_0}{r_0^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Здесь W_D – каноническая бесследовая матрица Вейля типа $\boldsymbol{D}$ по алгебраической классификации Петрова, m_0 - масса покоя частицы, r – радиальная переменная: $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, переменные x, y, z суть декартовы координаты в 3-пространстве. Пусть теперь эта частица двигаться с некоторой скоростью V вдоль оси z. Для этого применим к матрице Вейля (4.1) преобразования Лоренца, которые в данном случае описываются ортогональной 3×3 матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -i\sinh\psi & 0 \\ i\sinh\psi & \cosh\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

удовлетворяющей условиям: $T^{-1}T = \tilde{T}T = TT^{-1} = T\tilde{T} = 1$, $\det T = +1$, транспонированная матрица $\tilde{T} = T^{-1}$; $i^2 = -1$, $\cosh\psi = (1 - V^2)^{-1/2}$, $\sinh\psi = V(1 - V^2)^{-1/2}$ (значком «волна» обозначена операция транспонирования матрицы). Переход $V \to 1$ соответствует пределу $\psi \to \infty$.

Тогда в покоящейся системе отсчета для гравитационного поля массивной частицы на уровне матрицы Вейля можно записать

$$W = TW_D T^{-1} = \frac{E\varepsilon^2}{R^3} W(\varepsilon), \tag{4.3}$$

где $\varepsilon = (1 - V^2)^{1/2}$; $E = m_0/\varepsilon$ – полная энергия частицы, $E = const$, $R^2 = \rho^2\varepsilon^2 + (z + Vt)^2$; $\rho^2 = x^2 + y^2$. Матрица Вейля $W(\varepsilon)$ имеет следующий вид:

$$W(\varepsilon) = \varepsilon^2 C_D + 3(W_N^{(E)} + iV \cdot W_N^{(B)}), \tag{4.4}$$

где C_D - матрица Вейля алгебраического типа $\boldsymbol{D}$,

$$C_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

матрица «электрического» типа W_N^E и матрица «магнитного типа» W_N^B суть две части матрицы Вейля алгебраического типа $\boldsymbol{N}$

$$W_N = W_N^{(E)} + iW_N^{(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

которая отвечает поперечно-поперечной плоской гравитационной волне, распространяю-щейся вдоль оси z.

Перейдем к нахождению предельного вида матрицы Вейля (4.3), введя обозначения $\xi = z + Vt$ для «текущей переменной» и $\eta = z+t$ для опережающего времени, хотя это чисто условно, так как знак связан с выбором направления движения частицы относительно покоящегося наблюдателя, то есть со сменой направления движения.

Физическая суть рассматриваемого предельного перехода заключается в том, что скорость V в каждый момент времени остается постоянной, хотя и меняется как параметр. Другими словами, имеется бесконечная последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянными скоростями так, что каждая последующая система отсчета движется относительно предыдущей с большей по величине скоростью. Меняя параметр V, мы просто меняем систему отсчета, в которой находится частица. Наша задача заключается в том, чтобы выяснить, что произойдет, когда скорость частицы совпадет со скоростью света. При этом следует иметь в виду, что увеличение скорости может приводить к изменению (в том числе и в сторону возрастания) физических характеристик частицы. Это означает, что наряду с пределом $V \to 1$ требуется ввести дополнительные предельные ограничения на эти физические характеристики. В частности, при рассмотрении предельного перехода в (4.3) вместе с предельным переходом $\varepsilon \to 0\,(V \to 1)$ потребуем, чтобы масса покоя частицы стремилась к нулю, $m_0 \to 0$ так, чтобы полная энергия $E = m_0/\varepsilon$ при таком светоподобном предельном переходе оставалась постоянной.

Другой особенностью этого предельного перехода является необходимость исследования не только наличия обычного предела при $V \to 1$, но и предела в смысле обобщенных функций, то есть выяснить, существует ли отличный от нуля предел интеграла от рассматриваемой функции на всем бесконечном интервале изменения переменной V. Тогда можно говорить, что подынтегральная функция имеет своим пределом обобщенную функцию, частным случаем которой является известная δ-функция Дирака.

Для этого рассмотрим предел следующего интеграла при $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2\rho^2)^{-3/2} d\xi, \tag{4.7}$$

который оказывается равным $2/\rho^2$. Обычный предел подынтегральной функции равен нулю.

Следовательно, полный предел подынтегральной функции может быть записан как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\varepsilon^2 (\xi^2 + \varepsilon^2\rho^2)^{-3/2}] = \frac{2}{\rho^2}\delta(\eta) = \frac{2}{x^2 + y^2}\delta(z + t). \tag{4.8}$$

Учитывая этот результат и факт постоянства полной энергии при светоподобном пределе, получаем в (4.3)

$$\frac{E\varepsilon^2}{R^3} \to \frac{2E}{\rho^2}\delta(z+t). \tag{4.9}$$

Тогда светоподобный предел матрицы Вейля (4.4) будет равен $W(\varepsilon) \to 3W_N$, то есть в пределе получаем матрицу Вейля плоской гравитационной волны.

В конечном итоге светоподобный предел матрицы Вейля (4.3) движущейся массивной частицы может быть представлен как [17]

$$W = \frac{6}{\rho^2}\delta(z+t)W_N, \tag{4.10}$$

а скалярную светоподобную безмассовую частицу, гравитационное поле которой описывается такой сингулярной матрицей Вейля, будем называть лайтоном (***lighton***) [20]- [21].

С точки зрения теории катастроф введенный выше светоподобный предел на уровне матрицы Вейля представляет собой одну из семи элементарных катастроф: катастрофу сборки.

Для исследуемого случая на рис.5 изображена поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров (p, q). Точка сборки $(p = q = 0)$ в нашем случае – это точка фазового перехода второго рода гравитационного поля из алгебраического типа $\boldsymbol{D}$ в алгебраический тип $\boldsymbol{N}$ (переход из одной «фазы» в другую). Алгебраические типы по Петрову суть различные «фазы» гравитационного поля (см., например, [22]).

Равенство нулю дискриминанта характеристического кубического уравнения задает полукубическую параболу, отвечающую матрице Вейля типа $\boldsymbol{D}$. Рассматриваемый здесь случай отмечен на рис.5 крестиком $(q < 0)$.

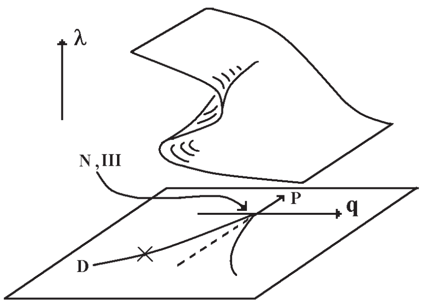

Рис. 5. Поверхность катастрофы сборки и ее проекция на плоскость управляющих параметров p и q.

Характеристическое уравнение имеет три корня: $\lambda_1 = \lambda_3 = -\lambda_2/2 = -\varepsilon^2$. Для этих корней потенциальная функция U принимает следующие значения: $U(\lambda_1) = U(\lambda_3) = p^2/12$ и $U(\lambda_2) = -2p^2/3$. В точке сборки можно наблюдать скачки вторых производных $\Delta(\partial^2 U/\partial p^2) = 1/6$ и $\Delta(\partial^2 U/\partial p^2) = -4/3$, которые соответствуют скачку ранга матрицы Вейля с $r = 3$ (тип $\boldsymbol{D}$) до $r = 1$ (тип $\boldsymbol{N}$), где через Δ обозначен скачок значения второй производной потенциальной функции U.

При применении процедуры светоподобного предела $(\varepsilon \to 0, V \to 1)$ собственные значения стремятся к нулю: $\lambda_i \to 0, i = 1, 2, 3$. Матрица Вейля (4.3) имеет два собственных вектора X_1 и X_2. Первый собственный вектор X_1 отвечает собственному значению λ_2 и стремится к светоподобному собственному вектору $\tilde{X}_1 = (-i/(1-\varepsilon^2)^{-1/2}, 1, 0) \to \tilde{L}$ матрицы типа $\boldsymbol{N}$, так что выполняется предельное уравнение на собственные значения $W_N L = 0$. Второй собственный вектор $\tilde{X}_2 = (0, 0, 1)$ также является собственным вектором матрицы Вейля $\boldsymbol{N}$ типа: $W_N X_2$ [22].

С другой стороны, шварцшильдоподобная предельная метрика в данном случае может быть представлена в форме Керра-Шилда [17], [22], [23]

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - 8Hl_\mu l_\nu, \tag{4.11}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ - метрический тензор пространства-времени Минковского; $H = -2E\delta(z+t)\ln(x^2+y^2)$; $l_\mu = \delta^0_\mu + \delta^3_\mu$; $l_\mu l^\mu = 0$.

Такая метрика (4.11) описывает точечный сингулярный светоподобный источник и является точным решением точных волновых уравнений Эйнштейна [17], [22], [23]

$$\Box g_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

где $\Box$ – оператор Д'Аламбера, $T_{\mu\nu} = 2E\delta(z+t)\delta(x)\delta(y)l_\mu l_\nu$ – есть тензор энергии-импульса сингулярного светоподобного источника.

Полученная предельная метрика (4.11) имеет два вектора Киллинга : светоподобный вектор $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространственноподобный вектор $\xi_Z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$, который задает аксиальную симметрию и в полярных координатах равен $\partial/\partial\varphi$.

Шварцшильдоподобное решение обладает четырьмя векторами Киллинга: временноподобный вектор $\xi_T = \partial/\partial t$ и три пространственноподобных вектора: $\xi_X = (y\partial/\partial z - z\partial/\partial y)$, $\xi_Y = (z\partial/\partial x - x\partial/\partial z)$, $\xi_Z = (x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$. Применяя далее преобразования Лоренца к этим векторам и затем процедуру светоподобного предела, получаем, что вектор ξ_Z оказывается инвариантным, а векторы $L\xi_T, L\xi_X, L\xi_Y$ вырождаются в светоподобный вектор [22], [23].

Следовательно, светоподобный предел массивной частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля (рис.5), что соответствует фазовому переходу второго рода (смена алгебраического типа пространства-времени) и изменению пространственной симметрии гравитационного поля такого источника: от сферической к аксиальной.

С другой стороны, наличие δ-образной сингулярности матрицы Вейля $\boldsymbol{N}$ типа и анализ предельной метрики указывают на то, что гравитационное поле точечной шварцшильдоподобной частицы трансформируется в поле точечного безмассового источника, движущегося со скоростью света, а уравнения тяготения для такого поля преобразуются в волновое уравнение с сингулярным источником (тензором энергии-импульса) светоподобного излучения. Все это позволяет утверждать, что мы имеем дело со скалярной светоподобной безмассовой частицей, которую назовем лайтоном (***lighton***).

Другим известным решением является решение Ньюмена, Унти и Тамбурино (НУТ) [24]- [25], описывающее внешнее статическое сферически симметричное гравитационное поле типа $\boldsymbol{D}$ островного источника, обладающего наряду с обычной массой движения m еще и дуальной массой b, представляющей собой гравитационный аналог магнитного монополя. При $b = 0$ решение НУТ переходит в известное решение Шварцшильда. Здесь к описанной светоподобной процедуре добавляется то, что новый параметр $B = b/\varepsilon$ так же остается постоянным ($b \to B = const$). В итоге предельная метрика будет описывать гравитационное поле волнового алгебраического типа $\boldsymbol{N}$, но без параметра НУТ [26].

Как и в случае со шварцшильдовской частицей, здесь мы имеем светоподобный предел матрицы Вейля как катастрофу с точки зрения задачи на собственные значения. Точка сборки ($p = q = 0$) есть точка фазового перехода гравитационного поля решения НУТ от алгебраического типа $\boldsymbol{D}$ к вырожденному типу $\boldsymbol{N}$ (рис.5). Во время процедуры светового предела также наблюдается изменение симметрии гравитационного поля, а векторы Киллинга решения НУТ вырождаются в светоподобные векторы Киллинга [27]. Таким образом, светоподобный предел массивной НУТ частицы может быть описан как катастрофа сборки на уровне матрицы Вейля с изменением симметрии гравитационного поля такого источника и «сбрасыванием» НУТ параметра. Следовательно, и в этом случае мы получаем скалярную светоподобную безмассовую частицу лайтон (***lighton***).

Внешнее гравитационное поле массивной частицы со спином (то есть частицы, имеющей собственный момент импульса) описывается известным решением Керра [28], принадлежащего к алгебраическому типу $\boldsymbol{D}$. В этом случае процедура светоподобного предела дополняется требованием, чтобы z-компонента керровского момента импульса L_Z в результате такого предельного перехода преобразовывалась по правилу $L_Z = a \cdot m_0 \to J \cdot E$, где $a = L_Z/m_0$ - керровский приведенный момент импульса (собственный момент импульса на единицу массы покоя), J - предел приведенного момента импульса в результате применения светоподобного предела, $J = const$.

Процедура светоподобного предельного перехода, примененная к матрице Вейля решения Керра, приводит к предельному выражению

$$W \to \frac{3}{\rho^2}\delta(z+t)\left(2E\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\pi J}{2\rho}\sin\theta\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}\right). \tag{4.13}$$

Получившаяся матрица относится к ***III*** алгебраическому типу (волновому типу с продольной составляющей). Как и для случаев со шварцшильдовской и НУТ частицами, светоподобный предел матрицы Вейля решения Керра есть катастрофа с точки зрения проблемы на собственные значения. В рассматриваемом случае точка сборки представляет собой точку фазового перехода гравитационного поля из типа ***D*** в тип ***III*** (рис.5).

Светоподобный предел соответствующей метрики Керра имеет только два вектора Киллинга: светоподобный вектор $\xi_L = (\partial/\partial t + \partial/\partial z)$ и пространственноподобный аксиальный вектор $\xi_Z = \partial/\partial\varphi$ в полярных координатах. Решение же Керра имеет следующие два вектора Киллинга: временноподобный $\xi_T = \partial/\partial t$ и пространственноподобный аксиальный вектор $\xi_Z = \partial/\partial\varphi$.

Применение лоренцевского буста к векторам Киллинга решения Керра вместе с процедурой светоподобного предела приводит к $\xi_Z \to \xi_Z$; $\xi_T \to \xi_L$. В итоге светоподобный предельный переход для керровской частицы может быть описан как катастрофа сборки с изменением симметрии гравитационного поля такого источника. Что касается собственного момента импульса керровской частицы, движущейся вдоль оси z, то при упомянутом предельном переходе остается только z-компонента спина частицы (положительная или отрицательная компоненты относительно направления движения) или спиральность $L_Z = \pm JE$ [23], [29]. Соответствующую векторную светоподобную безмассовую частицу со спиральностью назовем геликсоном (***helixon***). Если же керровский приведенный момент импульса $a = L_Z/m_0$ строго перпендикулярен направлению движения частицы (оси z), то при светоподобном предельном переходе предельный приведенный момент импульса J исчезает и получаем результат, совпадающий с предельным переходом для шварцшидоподобной частицы [23], [29], то есть в пределе имеем скалярную светоподобную безмассовую частицу лайтон (***lighton***).

Заключение

В работе показана связь алгебраической классификации Петрова гравитационных полей с теорией катастроф как обобщенной теорией фазовых переходов на уровне тензора кривизны (тензора Вейля). Фазами субстанции выступают алгебраические типы пространств, а параметром порядка – инварианты тензора кривизны. Одна из основных катастроф – катастрофа сборки является с физической точки зрения фазовым переходом второго рода. Показано, что при классификации четырехмерных локально евклидовых пространств методом Петрова такая классификация возможна при привлечении двойных переменных, как разновидности гиперкомплексных переменных. При этом также наблюдается связь с теорий катастроф. Конкретная демонстрация теории гравитационных фазовых переходов второго рода проведена на примерах рассмотрения светоподобных пределов частицоподобных решений уравнений гравитационного поля: Шварцшильда, Керра и НУТ. Обнаружено, что при таких переходах меняется не только алгебраический тип гравитационных полей (с типа ***D*** на волновые типы ***N*** и ***III***), но и их симметрия. Полученные при таком предельном переходе светоподобные частицы названы лайтонами (***lightons***) и геликсонами (***helixons***) в зависимости от наличия или отсутствия у них спиральности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.З. О пространствах, определяющих поля тяготения //ДАН СССР. 1951. Т.81. № 2. С. 149–152.
2. Петров А.З. Классификация пространств, определяемых полями тяготения //Уч. зап. Казанск. ун-та. Казань: КГУ, 1954. Т.114. Кн.8. С.55.
3. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
4. Мицкевич Н.В., Баранов А.М., Луговцов В.В. Композиция типов пространств по классификации Петрова //Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: материалы докл. IV Всесоюзн. конф. БГУ. Минск, 1976. С.195–200.
5. Баранов А.М., Луговцов В.В., Мицкевич Н.В. Композиция пространств второго вырожденного типа по Петрову //150 лет геометрии Лобачевского: тез. докл. Всесозн. научн. конф. по неевклид. геометрии (Казань). М.: Изд-во ВИНИТИ, 1976. С.21 .
6. Szekeres P. The Gravitational Compass //J.Math.Phys. 1965. V. 6. No 9. P.1387–1391.
7. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
9. Baranov A.M. Catastrophe theory and algebraic classification of gravitational and electromagnetic fields // Abstracts of Contributed Papers of 10th Intern. Confer. on GRG. Padova (Italy), 1983. V.1. P. 174–175.
10. Баранов А.М. Теория катастроф и алгебраическая классификация Петрова //200 лет Казанскому университету: тез. юбилей. научн. конфер. физ. фак-та КГУ (Казань, ноябрь 2004). КГУ. Казань, 2004. С.107.

11. Баранов А.М., Мицкевич Н.В. О композиции пространств в общей теории относительности/ Ун-т Дружбы народов им.П.Лумумбы. М., 1976. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 13.07.76, №2628-76.

12. Баранов А.М. Возмущения пространств и классификация Петрова /Ун-т Дружбы народов им. П.Лумумбы. М., 1976. 8 с. Деп. в ВИНИТИ 13.07.76, №2632-76 .

13. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.:Наука, 1966. 647 с.

14. Баранов А.М. Алгебраическая классификация четырехмерных локально евклидовых пространств // Изв.Вузов. Физика. 1994. №11. С.90–95.
Baranov A.M. Algebraic classification of four-dimensional locally euclidean spaces //Rus.Phys.Journal. 1994. V.37. No 11. P.1087–1091.

15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

16. Pirani F.A.E. Gravitational Waves in General Relativity. 1V. The Gravitational Field of a Fast-movinig Particle //Proc. Roy. Soc. (London). 1959. V.A252. P.96–101.

17. Баранов А.М. Гравитационные поля «светоподобных» источников /Ун-т Дружбы народов им. П.Лумумбы. М., 1976. 12 с. Деп. ВИНИТИ 13.07.76, №2631-76.

18. Baranov A.M. Lightons and Helixons as Lightlike Particles in General Relativity //Journal of SibFU, series "Math. & Phys.". 2011. V.4. No.1. P.3-10;
Baranov A.M. Lightons and Helixons as Lightlike Particles in General Relativity, URL: *http://ArXiv.org/gr-qc/1104.3775*.

19. Баранов А.М. Светоподобные источники в общей теории относительности. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. 112 с.

20. Баранов А.М. Светоподобные источники в общей теории относительности //Вестник Красноярского госуниверситета (Физико-математические науки). 2005. № 7. С.44–54.

21. Baranov A.M. Gravitational fields of lightons and helixons in General Relativity //Grav. Cosmol. 2006. No 2-3. P.100–102;
Baranov A.M. Gravitational Fields of Lightons and Helixons in General Relativity, URL: *http://ArXiv.org /gr-qc/1105.6327*.

22. Баранов А.М. Светоподобный предел шварцшильдоподобного источника как катастрофа // Гравитация и электромагнетизм: сб.статей. Минск: Университетское, 1992. Вып. 5. С.27–31.

23. Баранов А.М. Светоподобный предел решения Керра и конструирование поля светоподобной нити //Изв. вузов. Физика. 1994. №10. С.64–69.
Baranov A.M. Light-cone limit of the Kerr solution and construction of the field of a light-cone filament //Rus.Phys.Journal. 1994. V.37. No 10. P.971–975.

24. Newman E., Tamburino L., Unti T. Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric // J. Math. Phys. 1963. V.40. No 7. P.915.

25. Misner S.W. The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space // J. Math. Phys. 1963. V.40. No 7. P.924.

26. Баранов А.М. Светоподобный предел источника НУТ //Гравитация и теория относительности: сб.статей. Казань: Изд-во КГУ, 1987. Вып.24. С.11–19.

27. Baranov A.M. Lightlike Limits of NUT and Kerr Solutions as catastrophes // Геометризация физики III: тез. доклад. Международн. конф. (Казань-97). Казань: Хэтер, 1997. С.4–5.

28. Kerr R.P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metric // Phys. Rev. Letters. 1963. V.11. No 5. P.237–238.

29. Baranov A.M. Lightlike spinning source// Abstracts of Contributed Papers of 9th Intern.Confer. on GRG.-Jena(DDR), 1980. V.1. P.6.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

A. M. Baranov
The Phase Transitions in Gravitational and Electromagnetic Fields with relation Petrov's Algebraic Classification

Keywords: Algebraic classification of Petrov, gravitational fields, electromagnetic fields, catastrophe theory, phase transitions, lightlike sources, lighton, helixon.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv; 64.60.Bd; 05.45.-a

This article shows the connection of Petrov's algebraic classification of gravitational fields with the catastrophe theory as the generalised theory of phase transitions. The analogy between the transitions of the space-time algebraic types and the phase transitions at the curvature tensor level (Weyl's matrices level) are demonstrated. There are the first and second order phase transitions. Algebraic types of space-times are "phases of a substance"(states of gravitational fields) and the order parameters of phase transitions are the curvature invariants. The most symmetric "phase"is the gravitational field with a conformally flat metric.

The examples of the Petrov classification of gravitational fields, an algebraic classification of four-dimensional local Euclidean spaces, an algebraic classification of electromagnetic fields and of the deriving of the gravitational fields of the lightlike sources are presented in the connection with such analogy. In all cases the main catastrophe is the cusp catastrophe. It is the second order phase transition from point of view of the physics.

It is shown that the algebraic classification of four-dimensional local Euclidean spaces is possible with using the theory of double variables as one sort of hypercomplex variables. In such classification there also are the catastrophe changes, i.e. the phase transitions between algebraic types.

In the electromagnetic field the most symmetric "phase"is the lightlike state of the electromagnetic field (the plane electromagnetic wave).

The particular demonstration of the theory of gravitational phase transitions of the second order is made under investigations of the lightlike limits of the particlelike solutions of Schwarzschild, Kerr and NUT. It is found that we have the changes not only the algebraic type of gravitational fields (from type D to wave types N and III) but and of their symmetry. The found lightlike particles under such limit are named as lightons and helixons depending on presence or absence of the helicity.

REFERENCES

1. Petrov A.Z. On the Spaces defining fields of gravitation, *DAN USSR*, 1951, vol.81, no.8, pp.149–152.

2. Petrov A.Z. The classification of the spaces defined by fields of gravitation, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, Kazan: KSU, 1954, vol.114, Book 8, pp.55.

3. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p.

4. Mitskevich N.V., Baranov A.M., Lugovtsov V.V. The composition of the space types on Petrov's classification, *The modern theoretical and experimental problems of the theory of a relativity and gravitation: Transactions of the IV Soviet confer.*, Belarus State University, Minsk, 1976, pp.195–200.

5. Baranov A.M., Lugovtsov V.V., Mitskevich N.V. Composition of spaces of the second degenerate type on Petrov, *Abstracts of Contributed Papers of All-Union Sci. Conf. on non-Euclidean Geometry Dedicated to the 150 Years Anniversary of the Lobachevsky Geometry (Kazan)*, Moscow, VINITI, 1976, p.21.

6. Szekeres P. The Gravitational Compass //J.Math.Phys. 1965. V. 6. No 9. P.1387–1391.

7. Vladimirov Ju.S. *Reference Frame in the Theory of Gravitation*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.

8. Poston T., Stewart I. *Catastrophe theory and its applications.* London-San Francisco-Melbourne: Pitman, 1978, 580 p.

8. Baranov A.M. Catastrophe theory and algebraic classification of gravitational and electromagnetic fields, *Abstracts of Contributed Papers of 10th Intern. Confer. on GRG*, Padova, Italy, 1983, vol.1, pp. 174–175 .

9. Baranov A.M. Theory of Catastrophe and Algebraic Classification of Petrov, *Abstracts of Sci. Conf. of the KSU Phys. Fac. Dedicated to the 200 Years Anniversary of Kazan University (Kazan, 2004, Nov.)*, Kazan State University, Kazan, 2004, p.107.

10. Baranov A.M., Mitskevich N.V. On composition of spaces in General Relativity, University of the People Friendship of name P.Lumumba, Moscow, 1976, 15 p. Deposited in VINITI 13.07.1976, no. 2628-76.

11. Baranov A.M. Perturbations of spaces and Petrov's classification, University of the People Friendship of name P.Lumumba, Moscow, 1976, 8 p. Deposited in VINITI 13.07.1976, no. 2632-76.

12. Rosenfeld B.A. *Many-dimensional spaces*, Moscow: Nauka, 1966, 647 p.

13.Baranov A.M. Algebraic classification of four-dimensional locally euclidean spaces, *Izv.Vuz. Fizika*, 1994, no.11, pp.90–95;
Baranov A.M. Algebraic classification of four-dimensional locally euclidean spaces, *Rus.Phys.Journal*, 1994, vol.37, no.11, pp.1087–1091.

14. Landau L.D., Lifshits E.M. *The classical Theory of Field*, Moscow: Nauka, 1988, 512 p.

15. Pirani F.A.E. Gravitational Waves in General Relativity. 1V. The Gravitational Field of a Fast-movinig Particle, *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1959, vol.A252, pp.96–101.

16. Baranov A.M. Gravitational fields of "lightlike" sources, University of the People Friendship of name P.Lumumba, Moscow, 1976, 12 p. Deposited in VINITI 13.07.1976, no. 2631-76.

17. Baranov A.M. Lightons and Helixons as Lightlike Particles in General Relativity, *Journal of SibFU, series "Math. & Phys."*, 2011, vol.4, no.1, pp.3-10;
Baranov A.M. Lightons and Helixons as Lightlike Particles in General Relativity, URL: *http://ArXiv.org/gr-qc/1104.3775.*

18. Baranov A.M. *Lightlike sources in General Relativity*, Krasnoyarsk, Siberian Federal University, 2011, 112 p.

19. Baranov A.M. Lightlike sources in General Relativity, *Vestnik of Krasnoyarsk State University (Phys. and Math. Sci.)*, 2005, no.7, pp. 44–54.

20. Baranov A.M. Gravitational fields of lightons and helixons in General Relativity, *Grav. Cosmol.*, 2006, no. 2-3, pp. 100–102;
Baranov A.M. Gravitational Fields of Lightons and Helixons in General Relativity, URL: *http://ArXiv.org/gr-qc/1105.6327.*

21. Baranov A.M. Lightlike limit of the Schwarzschildlike source as catastrophe, *Gravitation and electromagnetism*: Transactions, Belarus State University, Minsk, The university, 1992, no. 5, pp.27–31.

22. Baranov A.M. Lightlike limit of the Kerr solution and construction of field of a lightlike pencil,*Izv. Vuz. Fizika*, 1994, no. 10, pp.64–69.
Baranov A.M. Light-cone limit of the Kerr solution and construction of the field of a light-cone filament, *Rus.Phys.Journal*, 1994, vol.37, no. 10, pp.971–975.

23. Newman E., Tamburino L., Unti T. Empty-Space Generalization of the Schwarzschild Metric, *J. Math. Phys*, 1963, vol.40, no. 7, p.915.

24. Misner S.W. The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space, *J. Math. Phys*, 1963, vol.40, no. 7, p.924.

25. Baranov A.M. Lightlike limit of NUT's source, *Gravitation and theory of relativity*: Transactions, Kazan State University, Kazan, 1987, no. 24, pp.11–19.

26. Baranov A.M. Lightlike Limits of NUT and Kerr Solutions as Catastrophes, *Geometrization of Physics III: Abstracts of Int. Conf. (Kazan-97)*, Kazan State University, Kazan, Khater, 1997, pp.4–5.

27. Kerr R.P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metric, *Phys. Rev. Letters*, 1963, vol.11, no. 5, pp.237–238.

28. Baranov A.M. Lightlike spinning source, *Abstracts of Contributed Papers of 9th Intern.Conf. on GRG*, Jena University, Jena (DDR), 1980, vol.1, p.6.

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Sibrian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru