УДК 530.12

М. П. Коркина,[1] ***Е. М. Коптева*** [2]

ПРИМЕНЕНИЕ МАССОВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОТО

В работе показано, что использование метода массовой функции значительно упрощает получение точных решений уравнений Эйнштейна. Рассмотрены известные и получены новые решения для пустого пространства и для вселенной с пылевидной материей. Методом массовой функции получены точные решения фридмановского типа при наличии давления. Получены решения для черных дыр шварцшильдова типа, показано, что в таких черных дырах всегда присутствует небарионная материя. Получены точные решения, описывающие черную дыру на фоне пылевидного вещества.

Ключевые слова: точные решения; уравнения Эйнштейна; массовая функция; черная дыра, погруженная в пыль

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv, 04.20.Jb

Введение

Несмотря на то, что в области нахождения точных решений уравнений общей теории относительности (ОТО) достигнут значительный прогресс [1], это направление исследований не может перестать быть актуальным. Еще Дж. Сингом в [2] было отмечено: «В той сложной ситуации, которую мы перед собой имеем, точное решение уравнений поля гораздо предпочтительнее всяких приближений, причем даже точное математическое решение представляет собой лишь приближение к физической действительности (на большее не могла бы претендовать ни одна математическая формула)». В настоящей работе рассматривается применение метода массовой функции для нахождения точных сферически-симметричных решений уравнений Эйнштейна.

Массовая функция является одним из четырех алгебраических инвариантов, существующих для сферически-симметричных метрик [3]. Для сферически-симметричной метрики вида

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)}dt^2 - e^{\lambda(R,t)}dR^2 - r^2(R,t)d\sigma^2 \tag{0.1}$$

массовая функция определяется как

$$m(R,t) = r(R,t)\left(1 + e^{-\nu(R,t)}\dot{r}^2 - e^{-\lambda(R,t)}r'^2\right), \tag{0.2}$$

где штрих означает дифференцирование по координате R, а точка – по t; здесь и далее скорость света $c = 1$, $d\sigma^2$ – стандартная метрика на 2-сфере. Массовая функция рассматривалась в ряде работ, например, [4] – [7].

С помощью массовой функции система уравнений Эйнштейна записывается следующим образом:

$$m' = \varepsilon r^2 r'; \tag{0.3}$$

$$\dot{m} = -p_{||} r^2 \dot{r}; \tag{0.4}$$

$$2\dot{r}' = \nu'\dot{r} + \dot{\lambda}r'; \tag{0.5}$$

$$2\dot{m}' = m'\frac{\dot{r}}{r'}\nu' + \dot{m}\frac{r'}{\dot{r}}\dot{\lambda} - 4r\dot{r}r'p_{\perp}, \tag{0.6}$$

где ε – плотность энергии, которая включает в себя множитель $8\pi\gamma/c^4$ и измеряется в единицах длины (см$^{-2}$), $p_{||}$ – радиальное и $p_{\perp}$– тангенциальное ($T_2^2 = -p_{\perp}$) давление в тех же единицах, при этом в системе (0.3 – 0.6) уравнение (0.3) соответствует уравнению для T_0^0: $R_0^0 - R/2 = \varepsilon$, уравнение (0.4) соответствует аналогичному уравнению для T_1^1, уравнение (0.5), фактически, является условием сопутствия $T_0^1 = 0$, уравнение (0.6) следует из уравнения для T_2^2.

[1]E-mail: 958korkin@rambler.ru
[2]E-mail: kopteva-L@yandex.ru

1. Сферически-симметричные решения для пустого пространства

Применим метод массовой функции к получению сферически-симметричных решений, описывающих пустое пространство. В этом случае из (0.3) и (0.4) следует, что $m(R,t) = const = r_g$, а уравнение (0.6) тождественно обращается в нуль. Тогда полная система уравнений для пустого пространства принимает вид:

$$r_g = r(R,t)\left(1 + e^{-\nu(R,t)}\dot{r}^2 - e^{-\lambda(R,t)}r'^2\right); \tag{1.1}$$

$$2\dot{r}' = \nu'\dot{r} + \dot{\lambda}r'. \tag{1.2}$$

Подчеркнем, что в данном случае уравнения (1.1) и (1.2) полностью исчерпывают всю систему уравнений ОТО. Для того чтобы получить решение системы уравнений (1.1), (1.2), необходимо выбрать координатные условия.

Выберем синхронную систему координат $e^{\nu(R,t)} = 1$.

При таком координатном условии из (1.2) следует, что выражение $e^{-\lambda(R,t)}r'^2$ зависит только от координаты R: $e^{-\lambda}r'^2 \equiv f^2(R)$. Тогда из (1.1) получаем

$$r_g = r(R,t)\left(1 + \dot{r}^2 - f^2(R)\right). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) легко интегрируется, и три решения ($f^2(R) >, =, < 1$), которые в результате получаются, представляют собой частный случай известного решения Толмена-Бонди [8], о котором мы будем говорить ниже.

Выберем теперь Гауссову систему координат $e^{\lambda(R,t)} = 1$.

При таком условии получим уравнение, аналогичное (1.3):

$$r_g = r(R,t)\left(1 + \psi^2(t) - r'^2\right), \tag{1.4}$$

где $\psi^2(t)$ – произвольная функция интегрирования. Решение уравнения (1.4) имеет следующий вид:

$$ds^2 = \tanh^2\frac{\alpha}{2}dt^2 - dR^2 - r_g^2\cosh^4\frac{\alpha}{2}d\sigma^2, \tag{1.5}$$

где

$$R = \frac{r_g}{2}\left(\sinh\alpha + \alpha\right),$$

α – безразмерный параметр.

Если координатные условия выбрать так, чтобы пространственная часть метрики была конформно-плоской, то есть так, чтобы

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)}dt^2 - e^{\lambda(R,t)}\left(dR^2 + R^2d\sigma^2\right), \tag{1.6}$$

тогда получим

$$r(R,t) = e^{\frac{\lambda}{2}}R, \tag{1.7}$$

откуда

$$\dot{\lambda} = \frac{2\dot{r}}{r};$$

и

$$2\dot{r}' = \nu'\dot{r} + \frac{2\dot{r}}{r}r';$$

$$e^{\nu} = \frac{\dot{r}^2}{r^2\psi^2(t)}. \tag{1.8}$$

Из (1.1) с учетом (1.8) имеем

$$r_g = r\left(1 + r^2\psi^2(t) - \frac{R^2}{r^2}r'^2\right),$$

или
$$\frac{dr}{\sqrt{r^4\psi^2(t)+r^2-rr_g}}=\frac{dR}{R}. \tag{1.9}$$

Это уравнение в общем случае не интегрируется в элементарных функциях, однако, в частном случае, когда $r=r(R)$, можно записать

$$r_g=r\left(1-e^{-\lambda}r'^2\right).$$

Учитывая (1.7) из этого уравнения получаем

$$r(R)=\left(R+\frac{r_g}{4R}\right)^2. \tag{1.10}$$

Из системы (1.1), (1.2) при выборе координатных условий в виде

$$\begin{aligned} e^{\nu(R,t)}&=e^{\lambda(R,t)}\ ;\\ \lambda(R,t)&=\lambda(r(R,t))\ . \end{aligned} \tag{1.11}$$

получим обобщение известного решения Крускала-Шекереса [1]. Из (1.2) при учете (1.11) следует уравнение

$$\dot r'=\dot r r'\frac{d\lambda}{dr}, \tag{1.12}$$

проинтегрировав которое по t и по R, получим

$$\begin{aligned} \dot r(R,t)&=e^{\lambda}\psi(t)\ ;\\ r'(R,t)&=e^{\lambda}K(R)\ , \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\psi(t)$ и $K(R)$ – произвольные безразмерные функции интегрирования. Подставим выражения (1.13) в уравнение (1.1):

$$\left(\frac{r_g}{r}-1\right)e^{-\lambda(r)}=\psi^2(t)-K^2(R), \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что $r(R,t)=r(\alpha)$, где $\alpha\equiv\psi^2(t)-K^2(R)$.

Рассмотрим частный случай решения (1.14). Если выбрать произвольные функции в виде

$$\begin{aligned} \psi^2(t)&=\tfrac{t^2}{4r_g^2}\ ;\\ K^2(R)&=\tfrac{R^2}{4r_g^2}\ , \end{aligned} \tag{1.15}$$

то из (1.14) получим известное решение Крускала-Шекереса:

$$\left(\frac{r_g}{r}-1\right)e^{-\lambda(r)}=\frac{t^2-R^2}{4r_g^2}=\alpha. \tag{1.16}$$

Подставляя (1.15) в (1.13), найдем выражение для e^{λ} и подставим его в (1.16), после чего разделим переменные и проинтегрируем полученное уравнение. В результате получим

$$C\alpha=e^{\frac{r}{r_g}}\left(r_g-r\right). \tag{1.17}$$

Таким образом, из (1.16) и (1.17) имеем выражение для e^{λ}:

$$e^{\lambda}=\frac{C}{r}e^{-r/r_g}. \tag{1.18}$$

И, следовательно, искомая метрика принимает вид

$$ds^2=\frac{C}{r}e^{-r/r_g}\left(dt^2-dR^2\right)-r^2d\sigma^2, \tag{1.19}$$

где
$$e^{r/r_g}\left(r-r_g\right)=\frac{C}{4r_g^2}\left(t^2-R^2\right).$$

2. Решения для пылевидной материи

Для пылевидной материи давление $p = 0$. Тогда из уравнения (0.4) следует, что $\dot{m} = 0$, то есть массовая функция зависит только от пространственной координаты. При этом из (0.6) имеем $\nu' = 0$, а значит, система координат – синхронная. Из уравнения (0.5) в таком случае следует, что $e^{-\lambda}r'^2 \equiv f^2(R)$, где $f(R)$ – произвольная функция интегрирования. Тогда выражение для массовой функции (0.2) будет иметь вид

$$m(R) = r(R,t)\left(1 + \dot{r}^2(R,t) - f^2(R)\right). \tag{2.1}$$

Из уравнения (2.1) сразу следует решение Толмена-Бонди. Действительно, переписывая (2.1) относительно $\dot{r}$ и интегрируя стандартным образом в зависимости от знака выражения $f^2(R) - 1$, получим три типа решения Толмена-Бонди для интервала, записанного в новых обозначениях

$$ds^2 = dt^2 - \frac{r'^2(R,t)}{f^2(R)}dR^2 - r^2(R,t)d\sigma^2, \tag{2.2}$$

гиперболиче ский тип ($f^2(R) > 1$):

$$\begin{aligned} r(R,t) &= \tfrac{m(R)}{f^2(R)-1}\sinh^2\tfrac{\alpha}{2}; \\ t - t_0(R) &= \pm\tfrac{m(R)}{2(f^2(R)-1)^{3/2}}(\sinh\alpha - \alpha); \end{aligned} \tag{2.3}$$

эллиптический тип ($f^2(R) < 1$):

$$\begin{aligned} r(R,t) &= \tfrac{m(R)}{1-f^2(R)}\sin^2\tfrac{\alpha}{2}; \\ t - t_0(R) &= \tfrac{m(R)}{2(1-f^2(R))^{3/2}}(\alpha - \sin\alpha); \end{aligned} \tag{2.4}$$

параболический тип ($f^2(R) = 1$):

$$r(R,t) = \left[\pm\frac{3}{2}\sqrt{m(R)}(t - t_0(R))\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{2.5}$$

Массовая функция $m(R)$ здесь – произвольная функция R, и имеет смысл полной массы распределения пылевидной материи внутри слоя $R = const$.

Решения Фридмана для пылевидной материи являются частным случаем решений Толмена-Бонди при определенном выборе $m(R)$, $f(R)$ и $t_0(R)$, поэтому их также просто получить с помощью метода массовой функции. Однако упрощается и получение решений фридмановского типа с давлением, зависящим от времени. Рассмотрим этот случай подробнее.

Для однородного изотропного интервала

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dR^2 + F^2(R)d\sigma^2\right), \tag{2.6}$$

где $F^2(R) = \sin^2 R, \quad \sinh^2 R, \quad R^2$ в случае замкнутого, открытого и плоского мира, соответственно, массовая функция, согласно (0.1) и (0.2), имеет вид

$$m(t,R) = a(t)F^3(R)\left(\dot{a}^2(t) + k\right), \tag{2.7}$$

где $k = 0, \ \pm 1$ – параметр кривизны. Преобразовывая систему уравнений (0.3 – 0.6) для интервала (2.6) с массовой функцией (2.7) получим систему уравнений Фридмана для материи с давлением:

$$\frac{1}{a^2(t)}\left(\dot{a}^2(t) + k\right) = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\frac{\varepsilon(t)}{3}; \tag{2.8}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t) + p(t)} = -\frac{3\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{2.9}$$

В общем случае, для произвольных зависимостей $p(t)$, точное решение системы уравнений (2.8), (2.9) найти нельзя. Однако, ряд важных, физически значимых решений может быть получен при условии:

$$p(t) = n\varepsilon(t), \tag{2.10}$$

где n – произвольное постоянное число.

Подставим в уравнение (2.9) выражение для давления (2.10) и проинтегрируем полученное выражение, получим:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{a_n^2}\frac{3}{[a(t)/a_n]^{3(n+1)}}, \tag{2.11}$$

где a_n – постоянная интегрирования. Подставим выражение для плотности энергии (2.11) в уравнение (2.8) и разделим переменные:

$$\frac{da}{\sqrt{[a_n/a]^{3n+1} - k}} = dt. \tag{2.12}$$

Для пространства Лобачевского ($k = -1$) решение уравнения (2.12) будет

$$ds^2 = a_n^2 \sinh^{2\beta_n} \frac{\alpha}{\beta_n}\left(d\alpha^2 - dR^2 - \sinh^2 R d\sigma^2\right), \tag{2.13}$$

где α – параметр:

$$dt = a(\alpha)d\alpha,$$

$$a(\alpha) = a_n \sinh^{\beta_n} \frac{\alpha}{\beta_n},$$

а постоянная интегрирования выбрана в виде $\beta_n = \frac{2}{3n+1}$.

Аналогичное решение для закрытого мира имеет вид

$$ds^2 = a_n^2 \sin^{2\beta_n} \frac{\alpha}{\beta_n}\left(d\alpha^2 - dR^2 - \sin^2 R d\sigma^2\right), \tag{2.14}$$

и для плоского пространства, соответственно

$$ds^2 = a_n^2 \left(\frac{1+\beta_n}{\beta_n}\cdot t\right)^{\frac{2\beta_n}{1+\beta_n}} \left(d\alpha^2 - dR^2 - R^2 d\sigma^2\right). \tag{2.15}$$

3. Решения, описывающие черные дыры шварцшильдова типа

Рассмотрим сферически-симметричные решения уравнений ОТО, в которых все метрические коэффициенты зависят только от пространственных координат:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2 d\sigma^2. \tag{3.1}$$

Для метрики (3.1) массовая функция будет иметь вид

$$m(r) = r\left(1 - e^{-\lambda(r)}\right). \tag{3.2}$$

Плотность энергии в этом случае, согласно (0.3)

$$\varepsilon(r) = \frac{m'(r)}{r^2}. \tag{3.3}$$

В качестве тензора энергии-импульса выбираем тензор энергии-импульса анизотропной жидкости, у которого ненулевыми компонентами являются $T_0^0 = \varepsilon$, $T_1^1 = -p_{||}$, $T_2^2 = T_3^3 = -p_\perp$. Для получения точного решения в рассматриваемом случае выберем координатные условия в виде

$$e^{\nu(r)} = e^{-\lambda(r)}. \tag{3.4}$$

При условии (3.4) с учетом (3.2) метрику (3.1) можно записать в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m(r)}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\sigma^2. \tag{3.5}$$

Из уравнений ОТО для T_0^0 и T_1^1 следует, что при условии (3.4) выполняется равенство

$$T_0^0 = T_1^1, \tag{3.6}$$

то есть радиальное давление $p_{||} = -T_1^1$ всегда отрицательно. Таким образом, при выполнении координатного условия (3.4) в пространстве-времени (3.5) всегда присутствует небарионная материя.

Вместо оставшегося уравнения для T_2^2 удобнее использовать закон сохранения тензора энергии-импульса $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$, который в рассматриваемой задаче сводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}T_1^1 + \frac{2}{r}T_1^1 + \frac{2}{r}T_2^2 = 0, \tag{3.7}$$

где учтено, что при сферической симметрии $T_2^2 = T_3^3$. Подставим в уравнение (3.7) выражение для радиального давления через массовую функцию из (3.3) и (3.6) и получим выражение для тангенциального давления:

$$T_2^2 = \frac{m''(r)}{2r} = -p_{\perp}. \tag{3.8}$$

Таким образом, все метрические коэффициенты и все ненулевые компоненты тензора энергии-импульса выражены через массовую функцию и ее производные. Задание уравнения состояния в рассматриваемом случае (при условии (3.5), это соотношение между радиальной и тангенциальной составляющими давления) полностью определяет вид решения.

Возможны различные по физическим свойствам решения, описываемые метрикой (3.2).

1. Если $m(r) < r$ для всех возможных r $(0 < r < \infty)$, то такие решения описывают только R-область. Поскольку радиальное давление отрицательно, то, возможно, такие решения могут описывать сферические конфигурации при наличии «темной» энергии.

2. Если $m(r) > r$ для всех возможных r, то такие решения описывают только T-область. Например, при уравнении состояния $T_2^2 = \frac{r}{2}T_1^1$ имеем решение, описывающее только T-область:

$$ds^2 = \left(\frac{r_0}{t}e^{\frac{t}{r_0}} - 1\right)^{-1} dt^2 - \left(\frac{r_0}{t}e^{\frac{t}{r_0}} - 1\right) dr^2 - t^2 d\sigma^2, \tag{3.9}$$

где r_0 – произвольная постоянная.

3. Если метрические коэффициенты $e^{\nu(r)}$ и $e^{\lambda(r)}$ знакопеременны, то такие решения описывают черные дыры шварцшильдова типа. Предположим, что

$$T_2^2 = \beta T_1^1, \tag{3.10}$$

где β – произвольная постоянная. При условии (3.10) из (3.3) и (3.8) получаем уравнение для массовой функции

$$m''(r) - 2\beta m'(r)\frac{1}{r} = 0, \tag{3.11}$$

решение которого имеет вид

$$m(r) = C_1\frac{r^{2\beta+1}}{2\beta+1} + C_2.$$

Примем, что постоянные $C_2 = r_g$ ($r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}$ радиус Шварцшильда), $\frac{C_1}{2\beta+1} = A$ $(2\beta + 1 \neq 0)$, и перепишем массовую функцию в виде

$$m(r) = r_g + Ar^{2\beta+1}. \tag{3.12}$$

При $\beta = 1$ из (3.12) имеем решение де Ситтера [9], если $r_g = 0$, и решение Коттлера [10] при ненулевом r_g. При $\beta = -1$ имеем решение Рейсснера-Нордстрема [11]. При $\beta = \frac{1}{2}$ имеем решение, полученное в работах [12,13], которое описывает пространство-время риндлеровского типа, которое в настоящее время активно исследуется [14,15]. Случай $\beta = -\frac{1}{2}$ является особым, в этом случае $e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r} - \frac{r_0}{r}\ln\frac{r}{r_0}$.

Для всех остальных $\beta \neq -\frac{1}{2}$ можно записать общее решение в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} - \sum_i A_i r^{2\beta_i}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} - \sum_i A_i r^{2\beta_i}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\sigma^2, \tag{3.13}$$

где учтено, что вследствие аддитивности массовой функции вклады в метрические коэффициенты, соответствующие материи с различными уравнениями состояния, складываются (в предположении отсутствия взаимодействия между различными типами материи $\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i$, $p = \sum_i p_i$).

Физический смысл различных β далеко не всегда ясен. Однако, например, в [16] рассматривалась черная дыра, окруженная квинтэссенцией, что соответствует $\beta = -\frac{1}{3}$. Несомненно, представляет интерес изучение общих свойств таких черных дыр, в частности, движения пробных частиц в поле таких объектов.

4. Решения, описывающие черные дыры на фоне пылевидной материи

Проблема построения модели черной дыры в пространстве, которое не является пустым, а заполнено материей, представляет большой интерес как в физике черных дыр – при изучении динамики горизонта и термодинамики черных дыр, так и при изучении связи между расширением Вселенной и физикой локальных объектов – звезд, галактик и др.

Одна из первых работ этого направления – работа Мак Витти [17], который получил решение в виде

$$ds^2 = \left[\frac{1 - r_g\mu(t)/4R}{1 + r_g\mu(t)/4R}\right]^2 dt^2 - \frac{1}{\mu^2(t)}\left[1 + \frac{r_g\mu(t)}{4R}\right]^4 \left(dR^2 + R^2 d\sigma^2\right). \tag{4.1}$$

При $\mu(t) = const = 1$ выражение (4.1) представляет собой метрику Шварцшильда, выраженную в изотропных координатах. При $r_g = 0$ метрика (4.1) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\mu^2(t)}\left(dR^2 + R^2 d\sigma^2\right). \tag{4.2}$$

Решение (4.2) можно рассматривать как модель Фридмана для случая плоского пространства; в зависимости от выбора функции $\mu(t)$ это может быть как пылевидная модель, так и модель с давлением. Мак Витти предложил своё решение в качестве модели частицы в расширяющейся вселенной. В работах [18,19] было показано, что это решение не может описывать точечную частицу во вселенной, но, возможно, может описать черную дыру.

Чтобы выяснить физический смысл решения (4.1) получим для него вид массовой функции:

$$m(R,t) = r_g + R^3\frac{\dot\mu^2(t)}{\mu^5(t)}\left(1 + \frac{r_g}{4R}\mu(t)\right)^6, \tag{4.3}$$

откуда при $\dot\mu(t) = 0$ имеем $m = r_g$, то есть массовую функцию для решения Шварцшильда, а при условии $r_g = 0$ и $\frac{\dot\mu^2(t)}{\mu^5(t)} = const \equiv \frac{1}{a_0^2}$ – массовую функцию для решения Фридмана в случае пылевидной материи. Из (0.3) и (0.4) получим плотность энергии и давления для метрики (0.1)

$$\begin{gathered}\varepsilon(t) = 3\tfrac{\dot\mu^2(t)}{\mu^2(t)};\\ p(R,t) = 6\mu^3(t)\tfrac{r_g/4R}{(r_g/4R)-1}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Из выражений для массовой функции (4.3), плотности энергии и давления (4.4) сразу же видно, что решение (4.1) не может описывать ни точечную частицу, ни черную дыру в пространстве Фридмана (давление зависит и от R и от t).

Решения, полученные в работах [20–22], фактически, являются модификациями решения (0.1). Так, решение из [20] представляет собой решение (4.1), в котором метрические коэффициенты перед dR^2 и $d\sigma^2$ умножаются еще на некоторую функцию времени, а решение из [21], [22] – это решение (4.1), в котором $\mu(t) = const$, а метрические коэффициенты перед dR^2 и $d\sigma^2$ также умножаются на функцию времени. Аналогичное рассмотрение этих решений с помощью метода массовой функции, показывает, что они также не описывают черную дыру ни в пространстве-времени Фридмана, ни Толмена-Бонди, поскольку давление в них является функцией и координаты R, и времени t.

Построим модель черной дыры во вселенной, описываемой решением Толмена-Бонди, используя метод массовой функции.

Метрика, описывающая распределение пылевидной материи, имеет вид (2.2). Решение Шварцшильда является частным случаем решения Толмена-Бонди при $m(R) = r_g$. Решение Фридмана также является частным случаем решения Толмена-Бонди при определенном выборе $m(R)$, $f(R)$ и $t_0(R)$.

Поэтому решения, описывающие шварцшильдову черную дыру в пространстве-времени Толмена-Бонди (заполненном пылевидной материей) – это решения Толмена-Бонди, где массовая функция выбирается в виде

$$m(R) \to r_g + m(R). \tag{4.5}$$

Например, решение, описывающее мир Фридмана для случая плоского пространства, совместно с шварцшильдовой черной дырой имеет вид

$$r(R,t) = \left[\pm\frac{3}{2}\sqrt{r_g + a_0 R^3}(t - t_0(R))\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{4.6}$$

Заметим, что (4.6) описывает не мир Фридмана, а мир Толмена-Бонди, в котором массовая функция выбрана такой же, как и в решении Фридмана, поскольку в решении Шварцшильда для плоского пространства $t_0(R)$ не может быть равным нулю (в отличие от Фридмана, где $t_0(R) = 0$).

В решении, полученном в работе [23],

$$r(R,t) = \left[\frac{3}{2}\left(\sqrt{a_0 R^3} + \sqrt{r_g}\right)t + R^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{4.7}$$

Выражение в круглых скобках в (4.7) представляет собой сумму двух соответствующих выражений – для пространства Шварцшильда и для пространства Фридмана, где выбрано $t_0(R) = -R^{3/2}a_0$. Массовая функция для решения (4.7) имеет вид

$$m(R) = a_0 R^3 + r_g + 2\sqrt{a_0 r_g}R^{3/2}. \tag{4.8}$$

И, таким образом, решение (4.7) представляет собой черную дыру в некотором специальном пространстве-времени с массовой функцией (4.8).

Рассмотрим решение (2.4). Положим, $f(R) = \cos R$ как и в решении Фридмана. Пусть $m(R) = r_g + a_0 \sin^3 R$, тогда

$$\begin{aligned} r(R,t) &= \tfrac{r_g + a_0\sin^3 R}{\sin^2 R}\sin^2\tfrac{\alpha}{2}; \\ t - t_0(R) &= \tfrac{r_g + a_0\sin^3 R}{2\sin^3 R}(\alpha - \sin\alpha). \end{aligned} \tag{4.9}$$

И аналогично, для решения (2.3) выбирая $f(R) = \cosh R$ и $m(R) = r_g + a_0\sinh^3 R$, получим

$$\begin{aligned} r(R,t) &= \tfrac{r_g + a_0\sinh^3 R}{\sinh^2 R}\sinh^2\tfrac{\alpha}{2}; \\ t - t_0(R) &= \tfrac{r_g + a_0\sinh^3 R}{2\sinh^3 R}(\sinh\alpha - \alpha). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Таким образом, с помощью метода массовой функции построена модель шварцшильдовой черной дыры во вселенной с пылевидной материей, которая описывается точными решениями (4.7), (4.9), (4.10) для случаев плоского, закрытого и открытого пространства, соответственно.

5. Выводы

В данной работе показано, как использование метода массовой функции упрощает получение точных решений уравнений Эйнштейна.

Для пустого пространства рассмотрены как известные решения, так и получены новые, например, решение в Гауссовой системе координат (1.5), а также обобщенное решение Крускала-Шекереса (1.14).

Показано, что значительно упрощается получение решений Толмена-Бонди. Методом массовой функции получены точные решения фридмановского типа при наличии давления (2.13 – 2.15).

Получены решения для черных дыр шварцшильдова типа, показано, что в таких черных дырах всегда присутствует небарионная материя. Получены точные решения, описывающие черную дыру на фоне пылевидного вещества (4.7 – 4.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Точные решения уравнений Эйнштейна. – М.: Энергоиздат. – 1982, 416 с.

2. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. – М.: Изд-во иностр. л-ры. – 1963, 342 с.

3. Narlikar V. V., Karmarkar K. R. The scalar invariants of a general gravitational metric // Proceedings of the Indian Academy of Sciences. – 1949, Section A, 29 (2). P. 91-97.

4. Misner C. W., Sharp D. H. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse // Phys. Rev. B. 1964. 136. 571.

5. Hernández Jr., Misner C. W. Observer Time as a Coordinate in Relativistic Spherical Hydrodynamics // Astrophys. J. 1966. 143, 452-464.

6. Cahill M. E., McVittie G. C. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. II: Particular cases // J. Math. Phys. 1970. Vol. 11, p. 1382-1401.

7. Zannias T. Spacetimes admitting a three-parameter group of isometries and quasilocal gravitational mass // Phys. Rev. D. 1990. Vol. 41. P. 3252-3254.

8. Tolman R.C. Relativity Thermodynamics and Cosmology. - Oxford: Clarendon Press. - 1969, 501 p.

9. De Sitter W. On Einstein's theory of gravitation and its astronomicalconsequences. // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 1917. Vol. 78. P. 3-12.

10. Kottler F. The physical basics of Einstein's theory of gravitation. // Ann.Phys. (Leipzig) 1918. Vol. 56. P. 401-462.

11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973, 504 с.

12. Mannheim P. Alternatives to dark matter and dark energy // Prog. Part. Nucl. Phys. 2006. Vol. 56. P. 340-445.

13. Grumiller D. Model for Gravity at Large Distances // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105: 211303.

14. Hristu Culetu. Rindler-type geometry inside a black hole.// arXiv:1103.2645v2 [gr-qc].

15. Hristu Culetu. Time dependent embedding of spherically symmetric Rindler spacetime.// arXiv:1202.4296v2 [gr-qc].

16. Fernando Sh. Schwarzschild black hole surrounded by quintessence: Null geodesic.// Gen. Rel. Grav. 2012. Vol 44. P. 1857-1879.

17. McVittie G. C. The mass-particle in an expanding universe // Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 1933. Vol. 93. P. 325-339.

18. Nolan B. C. A point mass in an isotropic universe: Existence, uniqueness, and basic properties // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 58, 064006.

19. McClure M. L. and Dyer C. C. Asymptotically Einstein de Sitter cosmological black holes and the problem of energy conditions // Class. Quantum Grav. 2006. Vol. 23, p. 1971-1987; McClure M. L. and Dyer C. C. Matching radiation-dominated and matter-dominated Einstein-de Sitter universes and an application for primordial black holes in evolving cosmological backgrounds // Gen. Rel. Gravit. 2006. Vol. 38, p. 1347-1354.

20. Faraoni V. and Jacques A. Cosmological expansion and local physics // Phys. Rev. D. 2007. Vol. 76, 063510.

21. Thakurta S. N. G. Kerr metric in an expanding universe // Indian J. Phys. Part B. 1981. Vol. 55B. P. 304-310.

22. Sultana J. and Dyer C. C. Cosmological black holes: A black hole in the Einstein-de Sitter universe // Gen. Rel. Grav. 2005. Vol. 37. P. 1347-1370.

23. Changjun Gao et al. Black Holes in the Universe: Generalized Lemaître-Tolman-Bondi Solutions // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 84, 104047.

Поступила в редакцию 15.07.2012

Коркина Мария Петровна, профессор кафедры теоретической физики факультета физики, электроники и компьютерных систем Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара, г. Днепропетровск, Украина.
E-mail: 958korkin@rambler.ru

Коптева Елена Михайловна, доцент кафедры теоретической физики факультета физики, электроники и компьютерных систем Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара, г. Днепропетровск, Украина.
E-mail: kopteva-L@yandex.ru

M. P. Korkina, E. M. Kopteva
The mass function method for obtaining the exact solutions of Einstein equations in general relativity

Keywords: exact solutions, Einstein equations, mass function, black hole embedded into dust

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv, 04.20.Jb

In this work it is shown that rewriting the Einstein equations in terms of mass function, which is one of four algebraic invariants for spherically symmetric metrics, it is possible to obtain the exact solutions of these equations in tangibly more simple way. The mass function method was applied for obtaining known exact solutions for the empty space as well as new solutions were obtained, for example, the solution in Gaussian coordinate system and Kruskal-Szekeres generalized solution. It is shown that with the mass function method it is much simpler to obtain Tolman-Bondi solutions, and new exact Friedman-like solution were obtained for the case of nonzero pressure. Besides the solutions for Schwarzschild black holes were considered and it was shown that it such black holes necessarily contain non-baryonic matter. The exact solutions for the black hole embedded into the dust matter universe were obtained.

REFERENCES

1 Exact solutions for Einstein equations, M.: Energoizdat, 1982. 416 p. [in Russian]
2 Synge J.L., *Relativity: the General Theory*, M.: Izd-vo inostr. l-ry, 1963. 342 p. [in Russian]
3 Narlikar V. V., Karmarkar K. R., *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 1949, Section A, no.29(2), pp.91-97.
4 Misner C. W., Sharp D. H., *Phys. Rev. B.*, 1964, vol.136, p. 571.
5 Hernandez Jr., Misner C. W., *Astrophys. J.*, 1966, no.143, pp.452-464.
6 Cahill M. E., McVittie G. C., *J. Math. Phys.*, 1970, vol.11, pp.1382-1401.
7 Zannias T., *Phys. Rev. D.*, 1990, vol.41, pp.3252-3254.
8 Tolman R.C., *Relativity Thermodynamics and Cosmology* - Oxford: Clarendon Press, 1969. 501 p.
9 De Sitter W., *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 1917, vol.78, pp.3-12.
10 Kottler F. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 1918, vol.56, pp. 401-462.
11 Landau L.D., Lifshits Ye.M., *Field Theory*, M.: Nauka, 1973. 504 p. [in Russian]
12 Mannheim P., *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 2006, vol.56, pp.340-445.
13 Grumiller D., *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol.105, id. 211303.
14 Hristu Culetu. Rindler-type geometry inside a black hole.// arXiv:1103.2645v2 [gr-qc].
15 Hristu Culetu. Time dependent embedding of spherically symmetric Rindler spacetime.// arXiv:1202.4296v2 [gr-qc].
16 Fernando Sh., *Gen. Rel. Grav.*, 2012, vol.44, pp.1857-1879.
17 McVittie G. C., *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 1933, vol.93., pp.325-339.
18 Nolan B. C., *Phys. Rev. D.*, 1998, vol.58, id.064006.
19 McClure M. L. and Dyer C. C., *Class. Quantum Grav.*, 2006, vol.23, pp.1971-1987; McClure M. L. and Dyer C. C., *Gen. Rel. Gravit.*, 2006, vol.38, pp.1347-1354.
20 Faraoni V. and Jacques A., *Phys. Rev. D.*, 2007, vol.76, id.063510.
21 Thakurta S. N. G., *Indian J. Phys. Part B.*, 1981, vol.55B, pp.304-310.
22 Sultana J. and Dyer C. C., *Gen. Rel. Grav.*, 2005, vol.37, pp.1347-1370.
23 Changjun Gao et al., *Phys. Rev. D.*, 2011, vol.84, id.104047.

Received 15.07.2012

Korkina Maria Petrovna, Professor, Dep. of Theoretical Physics, Oles Honchar Dnepropetrovsk National University, 72 Haharin Av., Dnepropetrovsk, 49050, Ukraine.
E-mail: 958korkin@rambler.ru

Kopteva Elena Mikhailovna, Associate Professor, Dep. of Theoretical Physics, Oles Honchar Dnepropetrovsk National University, 72 Haharin Av., Dnepropetrovsk, 49050, Ukraine.
E-mail: kopteva-L@yandex.ru