УДК 530.12; 531.51

В.Д. Гладуш[1], *А. И. Петрусенко*[2]

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ, ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Радиально-временная часть уравнений Эйнштейна для сферически-симметричных конфигураций представлена в терминах собственных векторов тензора энергии-импульса. Вводятся дуальные переменных и показывается, что сферически-симметричные конфигурации обладают скрытой дополнительной симметрией. Следствием этой унимодулярной симметрии является существование массовой функции. Рассматриваются различные адаптированные базисы и строятся общие представления метрик для сферически-симметричных конфигураций. В качестве приложения рассматриваются сферически-симметричные конфигурации заряженной пыли. Строятся локальные и интегральные законы сохранения, получен полный набор интегралов движения и находятся точные решения. Для пространств электровакуума вектор унимодулярной симметрии сводится к вектору Киллинга, а сама унимодулярная симметрия к изометрии.

Ключевые слова: сферически-симметричные конфигурации, дополнительная симметрия, массовая функция, заряженная пыль.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv, 04.20.Jb, 04.40.-b

Введение

Сферически-симметричные (СС) модели широко применяются для описания большого класса релятивистских объектов (см. например [1]- [3]). Уравнения ОТО в этих случаях часто интегрируются полностью, что позволяет строить соответствующие модели в законченном виде. Несмотря на это, здесь есть ряд вопросов. Так в теории СС конфигураций широко применяется метод массовой функции [4]- [10], однако теория массовой функции недостаточно развита, а истоки её происхождения неясны. В связи с этим возникает задача построения последовательной теории массовой функции. Далее, в большинстве моделей используются ортогональные системы координат (СК). Однако многие решения в замкнутой форме могут быть получены только в соответствующих неортогональных СК. Таким образом, в теории СС конфигураций возникает задача последовательного развития и применение аппарата адаптированных неортогональных СК. Под ними понимаем такие СК, которые вытекают из постановки задачи и могут быть определены инвариантным образом. Оказывается также, что СС пространства ОТО допускают дополнительную унимодулярную симметрию, которая в частных случаях совпадает с изометрией. Существование этой симметрии позволяет понять истоки появление массовой функции, развить инвариантные методы её применения и разработать способы построения общих представлений СС метрик для разных моделей.

1. Диадное представление и дуальные переменные в теории СС конфигураций

1. Введем в СС пространстве-времени $M^{(4)}$ радиально-временные x^a $(a, b = 0, 1)$ и угловые x^i $(i, j = 2, 3\,;\, x^2 = \theta,\, x^3 = \alpha)$ координаты, причём $x^\mu = \{x^a,\, x^i\}$. Тогда гравитационное поле будет описываться метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = {}^{(2)}ds^2 - R^2 d\sigma^2\,, \tag{1.1}$$

где ${}^{(2)}ds^2 \equiv \gamma_{ab} dx^a dx^b$, $d\sigma^2 \equiv \sigma_{ij} dx^i dx^j = d\theta^2 + \sin^2\theta d\alpha^2$, $\gamma_{ab} = \gamma_{ab}(x^a)$ и $R = R(x^a)$.

Любой тензор совместный со сферической симметрией имеет 2+2 структуру, аналогичную метрики (1.1). Так, например, для тензора энергии-импульса (ТЭИ) имеем:

$$T = T_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = T_{ab} dx^a dx^b + p_\perp R^2 d\sigma^2\,, \tag{1.2}$$

где T_{ab} - радиально-временные компоненты ТЭИ, $T_{ij} = p_\perp R^2 \sigma_{ij}$ - угловые компоненты, $p_\perp$ – «поперечное»’ давление, причём $T_{\alpha\alpha} = \sin^2\theta\, T_{\theta\theta} = p_\perp R^2 \sin^2\theta$. Тензор Эйнштейна для метрики

[1] E-mail: vgladush@gmail.com
[2] E-mail: iftifn@gmail.com

(1.1) имеет аналогичную 2+2 структуру: $G = G_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = G_{ab}dx^a dx^b + G_\perp R^2 d\sigma^2$. Его компоненты имеют вид

$$G_{aj} \equiv 0\,,$$
$$G_{ab} = -\frac{2}{R}R_{\,;\,a;\,b} + \frac{1}{R^2}\left(2R\Delta R + (\nabla R)^2 + 1\right)\gamma_{ab}\,, \tag{1.3}$$
$$G_{ij} = G_\perp R^2 \sigma_{ij} = \frac{R}{2}\left(R\,{}^{(2)}\!R - 2\Delta R\right)\sigma_{ij}\,, \tag{1.4}$$

где $\Delta R = \nabla^a \nabla_a R = \gamma^{ab}R_{\,;\,a;\,b}$, $(\nabla R)^2 = \gamma^{ab}R_{,\,a}R_{,\,b}$, $\nabla_a \equiv$ « $_{;\,a}$» и ${}^{(2)}R$ — ковариантная производная и двухмерная скалярная кривизна относительно γ_{ab}, соответственно.

Таким образом, система уравнений Эйнштейна $G_{\mu\nu} = (8\pi\kappa/c^4)\,T_{\mu\nu}$ распадается на радиально-временную и поперечную (угловую) подсистемы

$$G_{ab} = \frac{8\pi\kappa}{c^4}T_{ab}, \qquad G_\perp = \frac{8\pi\kappa}{c^4}\,p_\perp.$$

Учитывая соотношения (1.3) и (1.4), отсюда находим

$$-2RR_{\,;\,a;\,b} + \left(2R\Delta R + (\nabla R)^2 + 1\right)\gamma_{ab} = \frac{8\pi\kappa}{c^4}R^2\,T_{ab}\,, \tag{1.5}$$

$$R\,{}^{(2)}\!R - 2\Delta R = \frac{16\pi\kappa}{c^4}R\,p_\perp\,. \tag{1.6}$$

2. Известно, что ТЭИ имеет четыре канонические формы [1]. ТЭИ, согласованный со сферической симметрией, имеет только два канонических типа — I и II. Для ТЭИ типа I тензор T_{ab} разлагается по собственным не изотропным векторам:

$$T_{ab} = \varepsilon u_a u_b + p_\parallel n_a n_b\,. \tag{1.7}$$

Здесь ε – плотность энергии, $p_\parallel$ – «радиальное»' давление. Векторы $\{u^a\,, n^a\}$ образуют собственный базис ТЭИ, удовлетворяющие соотношениям

$$u_a u^a = -n_a n^a = 1\,, \quad u_a n^a = 0\,,$$
$$\gamma_{ab} = u_a u_b - n_a n_b, \quad \delta^a_b = u^a u_b - n^a n_b. \tag{1.8}$$

В инвариантной форме имеем векторную и ковекторную (1-формы) диады

$$\{\vec{u} = u^a\partial/\partial x^a,\ \vec{n} = n^a\partial/\partial x^a\}\,,$$
$$\{\omega = u_a dx^a, \varpi = -n_a dx^a\}\,, \tag{1.9}$$

удовлетворяющие условиям нормировки и взаимности $(\vec{u}\cdot\vec{u}) = -(\vec{n}\cdot\vec{n}) = 1$, $\omega(\vec{u}) = \varpi(\vec{n}) = 1$ и $\omega(\vec{n}) = \varpi(\vec{u}) = 0$. Систему отсчёта (СО), связанную с диадой $\{\vec{u},\vec{n}\}$, назовем собственной СО. При этом $\vec{u} = u^a\partial/\partial x^a$ — вектор касательный к мировым линиям частиц среды ($u^a = dx^a/ds$). Случай ТЭИ типа II, когда тензор T_{ab} имеет изотропный собственный вектор, здесь не рассматривается.

Из соотношений $T^\nu_{\mu;\,\nu} = 0$ вытекают уравнения движения

$$(R^2 T^b_a)_{;\,b} + 2p_\perp RR_{,\,a} = 0. \tag{1.10}$$

где « $_{,\,a}$» – частные производные по x^a. В диадном базисе $\{\vec{u},\vec{n}\}$, они распадаются на "уравнения эволюции" плотности энергии и "уравнения баланса" сил

$$\vec{u}\varepsilon + (\varepsilon + p_\parallel)u^a_{;a} + 2(\varepsilon + p_\perp)\vec{u}(\ln R) = 0, \tag{1.11}$$
$$\vec{n}p_\parallel + (\varepsilon + p_\parallel)n^a_{;a} + 2(p_\parallel - p_\perp)\vec{n}(\ln R) = 0\,. \tag{1.12}$$

Напомним, что $\vec{u}\varphi = u^\mu\partial\varphi/\partial x^\mu = d\varphi/ds$ и $\omega(\vec{A}) = u_a A^a$. Радиально-временные компоненты уравнений Эйнштейна () в диадном базисе можно записать в виде

$$R_{;a;b} = F_{tot}\gamma_{ab} + G_{tot}u_a u_b, \tag{1.13}$$

где

$$F_{tot} = F_0 + \frac{4\kappa\pi}{c^4}\,p_{\|}R\,, \tag{1.14}$$

$$G_{tot} = -\frac{4\kappa\pi}{c^4}\,(\varepsilon + p_{\|})R\,, \tag{1.15}$$

$$2RF_0 = 2R\Delta R + (\nabla R)^2 + 1\,. \tag{1.16}$$

Отсюда видно, что уравнения Эйнштейна (), (1.6) сводятся к следующей системе

$$R_{;\,a;\,b} = \left(F_0 - \frac{4\kappa\pi\varepsilon}{4}R\right)u_a u_b - \left(F_0 + \frac{4\kappa\pi p_{\|}}{c^4}R\right)n_a n_b\,, \tag{1.17}$$

$${}^{(2)}R = \frac{4}{R}F_0 - \frac{8\kappa\pi}{c^4}(\varepsilon - p_{\|} - 2p_{\perp})\,. \tag{1.18}$$

3. Введем 2-форму объёма и двумерный антисимметричный единичный тензор

$${}^{(2)}\Omega \equiv \sqrt{-\gamma}dx^0 \wedge dx^1 = \frac{1}{2}\,e_{ab}dx^a \wedge dx^b\,, \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered} e_{ab} = -e_{ba} = (-\gamma)^{1/2}\epsilon_{ab}, \\ e^{ab} = -(-\gamma)^{-1/2}\epsilon^{ab}\,, \end{gathered} \tag{1.20}$$

где $\gamma = \det|\gamma_{ab}|$, ϵ_{ab} — двумерный символ Леви-Чивита: $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$, $\epsilon_{01} = \epsilon^{01} = 1$, $\epsilon_{ab}\epsilon^{bc} = -\delta^c_a$. Тензоры e_{ab} и e^{ab} удовлетворяют соотношениям $n_a = e_{ab}u^b$, $u_a = e_{ab}n^b$ и

$$\begin{gathered} e_{ab}e^{bc} = \delta^c_a, \\ \gamma_{ab}e^{ac}e^{bd} = -\gamma^{cd}\,, \\ e_{ab}e_{dc} = \gamma_{ac}\gamma_{bd} - \gamma_{ad}\gamma_{bc}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Введем теперь новый касательный вектор $\vec\eta = \eta^a\partial_a$ дуальный 1-форме dR:

$$\vec\eta = -(\vec u \wedge \vec n)(dR, \cdot) = -e^{ab}R_{,b}\partial_a. \tag{1.22}$$

Тогда $(dR)(\vec\eta) = \vec\eta R = \eta^a R_{,\,a} = 0$. Переменные η^a и R в дальнейшем будем называть дуальными переменными. Вектор $\vec\eta$ удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\eta^a_{;a} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left(\sqrt{-\gamma}\eta^a\right)_{,a} = 0 \text{ или } \mathcal{L}_{\vec\eta}\ {}^{(2)}\Omega = 0\,, \tag{1.23}$$

где $\mathcal{L}_{\vec\eta}$ — производная Ли относительно $\vec\eta$. Компоненты η_a удовлетворяют уравнениям

$$\eta_{a;\,b} = -\left(F_0 - \frac{4\kappa\pi\varepsilon}{c^4}R\right)n_a u_b + \left(F_0 + \frac{4\kappa\pi p_{\|}}{c^4}R\right)u_a n_b \tag{1.24}$$

вытекающим из (1.17) и соотношений $\eta^a = -e^{ab}R_{,\,b}$, $\eta_{a;b} = -e_a R_{,\,c;\,b}$. Последние вместе с (1.24) эквивалентны радиально-временным уравнениям Эйнштейна (1.17). Для симметричной части $\eta_{a;b}$ из (1.24) получаем

$$\mathcal{L}_{\vec\eta}\gamma_{ab} = \eta_{a;\,b} + \eta_{b;\,a} = -G_{tot}(n_a u_b + n_b u_a). \tag{1.25}$$

Антисимметричная часть $\eta_{a;b}$ даёт $e^{ab}\eta_{a;b} = \triangle R$. Учитывая (1.17), получаем

$$e^{ab}\eta_{a;b} = 2F_0 + \frac{4\kappa\pi}{c^4}(p_{\|} - \varepsilon)R\,. \tag{1.26}$$

Оказывается, что СС гравитационные поля, в силу уравнений Эйнштейна, допускают скрытую дополнительную симметрию. Действительно, рассмотрим семейство кривых, удовлетворяющих уравнению $dx^a/d\lambda = \eta^a(x^b)$. Его решения $x^a = x^a(\lambda\,, x^b_0)$ определяют однопараметрическую группу преобразований $M^{(2)}$. Здесь λ – параметр и $x^a = x^a(0\,, x^b_0) = x^a_0$. Вследствие (1.23), векторное поле $\vec\eta$ порождает диффеоморфизмы $M^{(2)}$, подобные потоку несжимаемой жидкости. При этом, уравнения (1.25) описывают сдвиговую деформацию пространства $M^{(2)}$ с метрикой γ_{ab}. Малый сдвиг $x^a = x^a_0 + \lambda\eta^a$ $(\lambda \ll 1)$ приводит к якобиану преобразования $J = \det|\partial x^a/\partial x^a_0| =$

$\sqrt{\gamma_0/\gamma} = 1 + \lambda\, \eta^a_{;\,a} = 1$, где $\gamma_0 = \det|\gamma_{ab}(x^a_0)|$. Преобразования с $J = 1$ сохраняют объём и образуют группу унимодулярных преобразований. В дальнейшем, соотношения (1.25) назовем уравнениями унимодулярной (или динамической) симметрии системы, а $\vec{\eta}$ — вектором этой симметрии. Если $\varepsilon + p_{\|} = 0$, то $G_{tot} = 0$ и (1.25) сводятся к уравнениям Киллинга. Тогда унимодулярная симметрия становится изометрией, что приводит к обобщённой теореме Биркгоффа [3].

Итак, если γ_{ab} допускает вектор унимодулярной симметрии $\vec{\eta}$, удовлетворяющий уравнениям (1.25) и (1.26), то метрика γ_{ab} удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (1.17). Диадные компоненты уравнений унимодулярной симметрии (1.25) имеют вид

$$\eta_{a;b}u^a u^b = 0, \qquad \eta_{a;b}n^a n^b = 0, \tag{1.27}$$

$$\eta_{a;b}(u^a n^b + n^a u^b) = G_{tot}. \tag{1.28}$$

Поскольку $\eta^a_{;a} = \eta_{a;b}u^a u^b - \eta_{a;b}n^a n^b = 0$, то можно ограничиться одним из уравнений (1.27).

Для разложений дуальных величин $\{\vec{\eta}, dR\}$ по базисам $\{\vec{u}, \vec{n}\}$ и $\{\omega, \varpi\}$ имеем

$$\vec{\eta} = \varepsilon_u \vec{u} - \varepsilon_n \vec{n}, \quad dR = \varepsilon_n \omega + \varepsilon_u \varpi\,. \tag{1.29}$$

Здесь

$$\varepsilon_u = \eta_a u^a = n^b R_{,b} = \vec{n}R = dR/dv\,, \tag{1.30}$$

$$\varepsilon_n = \eta_a n^a = u^b R_{,b} = \vec{u}R = dR/ds \tag{1.31}$$

диадные компоненты вектора $\vec{\eta}$ и ковектора dR, связанные соотношением

$$\varepsilon_u^2 - \varepsilon_n^2 = -(\nabla R)^2 = \gamma^{ab}\eta_a\eta_b = (\vec{\eta})^2 \equiv F, \tag{1.32}$$

где F — некоторая функция координат x^a, s и v — натуральные параметры кривых $x^a = x^a_1(s)$ и $x^a = x^a_2(v)$ с касательными векторами $\vec{u} = d/ds$ и $\vec{n} = d/dv$. Если $F > 0$, то $\vec{\eta}$ времениподобен, и ε_u имеет смысл энергии частицы (отнесённой к единице массы) с касательным векторным $\vec{u}$ в СО, связанной с векторным полем $\vec{\eta}$.

Учитывая (1.29), уравнения симметрии (1.27) и (1.28) можно переписать в виде

$$\vec{u}\varepsilon_u = \eta_a u^a_{;\,b}u^b = \varepsilon_n n^a_{;a},$$

$$\vec{n}\varepsilon_n = \eta_a n^a_{;\,b}n^b = \varepsilon_u u^a_{;a}, \tag{1.33}$$

$$\vec{n}\varepsilon_u + \vec{u}\varepsilon_n = G_{tot} + \varepsilon_n u^a_{;\,a} + \varepsilon_u n^a_{;\,a}. \tag{1.34}$$

Соотношение (1.26) для антисимметричной части $\eta_{a;\,b}$ теперь принимает вид

$$e^{ab}\eta_{a;b} = \vec{u}\varepsilon_n - \vec{n}\varepsilon_u + \varepsilon_n u^b_{;\,b} - \varepsilon_u n^b_{;\,b} = 2F_0 + \frac{4\kappa\pi}{c^4}(p_{\|} - \varepsilon)R\,. \tag{1.35}$$

Отсюда, учитывая (1.34), находим

$$\vec{u}\varepsilon_n = \varepsilon_u n^b_{;\,b} + F_0 - \frac{4\kappa\pi}{c^4}\varepsilon R\,,$$

$$\vec{n}\varepsilon_u = \varepsilon_n u^b_{;\,b} - F_0 - \frac{4\kappa\pi}{c^4}p_{\|}R\,, \tag{1.36}$$

что вместе с (1.33) даёт полный набор диадных производных величин ε_u и ε_n.

Из соотношений (1.34), используя (1.33), (1.32) и (1.29), находим соотношение

$$\vec{\eta}F = -2\varepsilon_u\varepsilon_n G_{tot}\,, \tag{1.37}$$

которое вместе с одним из уравнений (1.33) эквивалентно уравнениям симметрии.

Согласно (1.33), эволюция ε_u вдоль кривой $x^a = x^a_1(s)$, определяется уравнением $d\varepsilon_u/ds = \eta_a u^a_{;\,b}u^b$. Поэтому, для пыли, когда $p_{\|} = p_{\perp} = 0$ и $Du^a/ds = u^a_{;\,b}u^b = 0$, энергия частиц сохраняется. Вводя лагранжеву координату r, для которой $dr/ds = 0$, имеем закон сохранения $\varepsilon_u = \varepsilon_u(r)$, являющийся следствием унимодулярной симметрии.

В общем случае, уравнение эволюции плотности энергии (1.11) и баланса сил (1.12), используя (1.30), (1.31) и (1.33), можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon_u \frac{d\varepsilon}{ds} + (\varepsilon + p_{\|})(\vec{n}\varepsilon_n) + \frac{2\varepsilon_u\varepsilon_n}{R}(\varepsilon + p_{\perp}) = 0, \tag{1.38}$$

$$\varepsilon_n \frac{dp_{\|}}{dv} + (\varepsilon + p_{\|})(\vec{u}\varepsilon_u) + \frac{2\varepsilon_u\varepsilon_n}{R}(p_{\|} - p_{\perp}) = 0. \tag{1.39}$$

Они связывают эволюцию собственных значений ε и $p_{\|}$ ТЭИ с компонентами ε_u и ε_n.

2. Массовая функция и представления метрик

1. Наличие дополнительной унимодулярной симметрии приводит к интегральному закону сохранения, который выполняется в силу уравнений Эйнштейна. Действительно, в силу тождеств Бианки $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ и уравнений Эйнштейна (1.3)-(1.4), из уравнений унимодулярной симметрии (1.25) вытекает уравнение непрерывности

$$\sqrt{-\gamma}P^a_{;a} = \left(\sqrt{-\gamma}P^a\right)_{,\,a} = 0, \tag{2.1}$$

для вектора плотности потока вещества через сферу радиуса R:

$$2\kappa P^a = \frac{8\pi\kappa}{c^2}R^2 T^a_b \eta^b = -c^2 R^2 G^a_b e^{bc} R_{,\,c}. \tag{2.2}$$

Учитывая уравнения Эйнштейна и ТЭИ (1.7), вектор P^a запишем в виде

$$\vec{P} = P^a\partial_a = 4\pi R^2 c^{-2}\left(\varepsilon\varepsilon_u\vec{u} + p_{\|}\varepsilon_n\vec{n}\right). \tag{2.3}$$

Ищем решение уравнения (2.1) в виде антисимметричного градиента

$$P^a = -e^{ab}\mathbf{M}_{,b}, \tag{2.4}$$

некоторого «потенциала» $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x^a)$. Используя (1.9) находим

$$d\mathbf{M} = (\vec{u}\mathbf{M})\omega + (\vec{n}\mathbf{M})\varpi = (\vec{n}\mathbf{M})(\varpi - \mathcal{U}\omega), \tag{2.5}$$

$$\vec{P} = (\vec{n}\mathbf{M})\vec{u} - (\vec{u}\mathbf{M})\vec{n} = (\vec{n}\mathbf{M})(\vec{u} + \mathcal{U}\vec{n}), \tag{2.6}$$

$$(d\mathbf{M})(\vec{P}) = \vec{P}\mathbf{M} == 4\pi c^{-2}R^2(\varepsilon\varepsilon_u(\vec{u}\,\mathbf{M}) + p_{\|}\varepsilon_n(\vec{n}\mathbf{M})) = 0, \tag{2.7}$$

где $\mathcal{U} = -(\vec{u}\mathbf{M})/(\vec{n}\mathbf{M}) = p_{\|}\varepsilon_n/\varepsilon\varepsilon_u$. Таким образом, вектор $\vec{P}$ касается поверхности уровня $\mathbf{M} = const$ так, что функция $\mathbf{M}$ постоянна вдоль $\vec{P}$. В направлении ковектора $d\mathbf{M}$ её изменение максимально. Далее, находим

$$\vec{P}^2 = (\vec{P},\vec{P}) = -\langle d\mathbf{M}, d\mathbf{M}\rangle = \frac{16\pi^2}{c^4}R^4(\varepsilon^2\varepsilon_u^2 - p_{\|}^2\varepsilon_n^2) = \frac{16\pi^2}{c^4}R^4\varepsilon^2\varepsilon_u^2(1-\mathcal{U}^2)\,, \tag{2.8}$$

где $(\vec{A},\vec{B})$ и $\langle\alpha,\beta\rangle$ – скалярное произведение векторов и ковекторов относительно γ_{ab} и и γ^{ab}, соответственно. Если $(\vec{P})^2 > 0$, то $|\mathcal{U}| < 1$, ковектор $d\mathbf{M}$ пространственноподобный, и мы имеем перенос вещества в собственной СО. При этом, вещество с плотностью массы $(\vec{n}\mathbf{M}) = 4\pi R^2\varepsilon\varepsilon_u c^{-2}$ пересекает сферу радиуса R со скоростью $\mathcal{U} = p_{\|}\varepsilon_n/\varepsilon\varepsilon_u$. Если $(\vec{P})^2 < 0$, то ковектор $d\mathbf{M}$ времениподобен, что соответствует эволюции $\mathbf{M}$ со временем. Случай $(\vec{P})^2 = 0$ соответствует световой скорости переноса: $|\mathcal{U}| = 1$, т.е. излучению. Далее, из (2.4) следует

$$\mathbf{M}_{,\,a} = -e_{ab}P^b. \tag{2.9}$$

Используя (2.2) и (1.21), получаем связь между G^b_a и градиентом функции $\mathbf{M}(x^a)$:

$$\mathbf{M}_{,\,a} = \frac{c^2}{2\kappa}R^2 e_{ab}e^{dc}G^b_d R_{,\,c} = \frac{c^2}{2\kappa}R^2(G^b_b R_{,\,a} - G^b_a R_{,\,b}). \tag{2.10}$$

Наконец, учитывая (1.3), получаем $\mathbf{M}_{,a} = (c^2/2\kappa)(R + R(\nabla R)^2)_{,a}$. Отсюда вытекает известное выражение для массовой функции [4]- [10] СС конфигураций

$$\mathbf{M} = \frac{c^2}{2\kappa}R(1 + (\nabla R)^2)\,. \tag{2.11}$$

Условия интегрируемости соотношений (2.9) выполняются в силу уравнения непрерывности (2.1). Поэтому значение величины

$$\mathbf{M}(B) - \mathbf{M}(A) = \int\limits_A^B d\mathbf{M} = -\int\limits_A^B e_{ab}P^b dx^b \tag{2.12}$$

не зависит от пути интегрирования, а только от точек A и B. Поэтому, разность (2.12) является относительной характеристикой поля между A и B. Из (2.10) и уравнений Эйнштейна следует связь между ТЭИ и массовой функцией [6], [8]- [10]

$$\mathbf{M}_{,b} = \frac{4\pi}{c^2}R^2\left(T_a^a R_{,b} - T_b^a R_{,a}\right). \tag{2.13}$$

Учитывая (1.7), (1.30), (1.31) и (1.9), находим разложение 1-формы

$$d\mathbf{M} = \frac{4\pi}{c^2}R^2\left(\varepsilon\varepsilon_u\varpi - p_{\|}\varepsilon_n\omega\right) \tag{2.14}$$

и производные массовой функции по направлениям векторов $\vec{u}$, $\vec{n}$ и $\vec{\eta}$:

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} = (\vec{u}\mathbf{M}) = -\frac{4\pi}{c^2}p_{\|}\varepsilon_n R^2, \tag{2.15}$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dv} = (\vec{n}\mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c^2}\varepsilon\varepsilon_u R^2, \tag{2.16}$$

$$(\vec{\eta}\mathbf{M}) = -\frac{4\pi}{c^2}R^2\varepsilon_u\varepsilon_n(\varepsilon + p_{\|}) = \frac{c^2}{\kappa}\varepsilon_u\varepsilon_n R G_{tot}. \tag{2.17}$$

Согласно (1.32) и (2.11) для квадрата вектора унимодулярной симметрии находим

$$(\vec{\eta})^2 = -(\nabla R)^2 = F = 1 - \frac{2\kappa\mathbf{M}}{c^2 R}. \tag{2.18}$$

Полученные соотношения позволяют построить уравнения, описывающие динамику СС конфигурации через массовую функцию и диадные компоненты вектора унимодулярной симметрии. Так, дифференцируя (1.31) по s и учитывая (1.32), (2.18), (2.15), (1.39), получаем уравнение движения сферических слоев вещества (динамический аналог уравнения Оппенгеймера-Волкова [11])

$$\frac{d^2R}{ds^2} = -\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon + p_{\|}}\frac{dp_{\|}}{dv} - \left(\frac{p_{\|} - p_{\perp}}{\varepsilon + p_{\|}}\right)\frac{2\varepsilon_u^2}{R} - \frac{4\pi\kappa}{c^4}p_{\|}R - \frac{\kappa\mathbf{M}}{c^2R^2}\,. \tag{2.19}$$

Причём

$$\frac{dR}{ds} \equiv \vec{u}R = \varepsilon_n = \sqrt{\varepsilon_u^2 + 1 - \frac{2\kappa\mathbf{M}}{c^2R}}\,. \tag{2.20}$$

2. Рассмотрим представления метрик, связанные с дуальными переменными и собственным базисом ТЭИ. Введем сначала СО, задаваемую вектором унимодулярной симметрии $\vec{\eta}$ (1.22). Пусть $x^1 = R$, тогда временная координата определяется с точностью до преобразования $x^0 = x^0(\tilde{x}^0, R)$. Множество этих преобразований определяет хронометрически-инвариантное (ХИ) расщепление пространства-времени [12, 13] и хронометрическую параметризацию [14] метрики. В этой СК вектор унимодулярной симметрии (1.22) и дуальный ему ковектор имеют вид

$$\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^0} = D\partial_0\,, \quad dR = dx^1\,, \tag{2.21}$$

где $\sqrt{-\gamma} = 1/D$. Взаимные к ним ковектор и вектор определяются с точностью до произвольной функции B

$$\theta = \frac{1}{D}\left(dx^0 + BdR\right), \quad \vec{e}_R = \partial_R - B\partial_0\,. \tag{2.22}$$

Диады векторов $\{\vec{\eta}, \vec{e}_R\}$ и ковекторов $\{\theta, dR\}$ удовлетворяют условиям взаимности $\theta(\vec{\eta}) = 1$, $\theta(\vec{e}_R) = 0$, $dR(\vec{\eta}) = 0$, $dR(\vec{e}_R) = 1$ и в дальнейшем называются дуальными базисами. Отметим, что вектор $\vec{e}_R$ соответствует ХИ радиальной производной $\partial^*_R = \vec{e}_R$.

Выберем B так, чтобы базис 1-форм $\{\theta, dR\}$ был ортогональным. Тогда, учитывая (2.18), (2.22) получаем

$$^{(2)}ds^2 = \frac{F}{D^2}(dx^0 + BdR)^2 - \frac{dR^2}{F}\,. \tag{2.23}$$

При этом $(\vec{\eta}, \vec{e}_R) = 0$, $(\vec{e}_R)^2 = -F^{-1}$ и $^{(2)}\Omega = D^{-1}\,dx^0 \wedge dR = \theta \wedge dR$. Формула (2.23) даёт общую ХИ параметризацию СС метрик ОТО.

Вследствие условий ортонормированности и взаимности, разложение собственного базиса ТЭИ по дуальному базису имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \varepsilon_u F^{-1}\,\vec{\eta} + \varepsilon_n \vec{e}_R\,,\\ \vec{n} &= \varepsilon_u \vec{e}_R + \varepsilon_n F^{-1}\,\vec{\eta}\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} \omega &= \varepsilon_u \theta - \varepsilon_n F^{-1}\,dR\,,\\ \varpi &= \varepsilon_u F^{-1}\,dR - \varepsilon_n \theta\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Выпишем формулы обратного перехода от собственного к дуальному базисам:

$$dR = \varepsilon_n \omega + \varepsilon_u \varpi\,, \quad \theta = F^{-1}(\varepsilon_u \omega + \varepsilon_n \varpi)\,, \tag{2.26}$$

$$\vec{e}_R = F^{-1}(\varepsilon_u \vec{n} - \varepsilon_n \vec{u})\,, \quad \vec{\eta} = \varepsilon_u \vec{u} - \varepsilon_n \vec{n}\,. \tag{2.27}$$

В базисе собственных ковекторов (2.25) метрика (2.23) имеет вид

$$^{(2)}ds^2 = \omega^2 - \varpi^2 = \left(\varepsilon_u \theta - \frac{\varepsilon_n}{F}\,dR\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_u}{F}\,dR - \varepsilon_n \theta\right)^2\,. \tag{2.28}$$

Разложение 1-формы массовой функции (2.14) в дуальном базисе 1-форм имеет вид

$$d\mathbf{M} = \frac{4\pi}{c^2}\,R^2\{F^{-1}[\varepsilon\varepsilon_u^2 + p_\parallel \varepsilon_n^2]dR - \varepsilon_u \varepsilon_n(\varepsilon + p_\parallel)\theta\}\,. \tag{2.29}$$

Отсюда находим производные массовой функции

$$\partial_0 \mathbf{M} = -\frac{4\pi}{Dc^2}\,\varepsilon_u \varepsilon_n(\varepsilon + p_\parallel)R^2\,, \tag{2.30}$$

$$\vec{e}_R \mathbf{M} = \partial^*_R \mathbf{M} = \frac{4\pi R^2}{c^2 F}\left(\varepsilon\varepsilon_u^2 + p_\parallel \varepsilon_n^2\right)\,, \tag{2.31}$$

$$\partial_R \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c^2}R^2\left[\varepsilon_u(\varepsilon + p_\parallel)\left(\frac{\varepsilon_u}{F} - \varepsilon_n \frac{B}{D}\right) - p_\parallel\right]. \tag{2.32}$$

Для постановки задачи Коши и построения канонического формализма удобным является кинеметрически-инвариантный (КИ) метод [12, 13] и соответствующая ему АДМ параметризация [14] метрики

$$^{(2)}ds^2 = N^2(dx^0)^2 - L^2(dR - V dx^0)^2\,, \tag{2.33}$$

где N, L, V — некоторые функции. Согласно теореме Фробениуса [15], 1-форму ω в (2.25) на $M^{(2)}$ можно записать в виде $\omega = Nd\chi$, где N, χ — некоторые функции. Выбирая калибровочное условие $\chi = x^0$ и учитывая (2.22), получаем соотношение

$$\omega = \frac{\varepsilon_u}{D}\,dx^0 + \left(\frac{\varepsilon_u B}{D} - \frac{\varepsilon_n}{F}\right)dR = Ndx^0\,. \tag{2.34}$$

Отсюда $D = \varepsilon_u N^{-1}$, $B = \varepsilon_n F^{-1} N^{-1}$, что приводит к следующей параметризации:

$$\omega = Ndx^0\,,\ \varpi = \frac{1}{\varepsilon_u}\,(dR - N\varepsilon_n\,dx^0)\,, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \equiv d/ds = N^{-1}d/dx^0 &= N^{-1}\,\partial_0 + \varepsilon_n\,\partial_R\,,\\ \vec{n} &= \varepsilon_u \partial_R\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$ds^2 = N^2c^2dt^2 - \frac{1}{\varepsilon_u^2}\,(dR - N\sqrt{\varepsilon_u^2 - F}dx^0)^2 - R^2d\sigma^2\,. \tag{2.37}$$

При этом

$$L = \varepsilon_u^{-1}\,,\ V = N\varepsilon_n = N\sqrt{\varepsilon_u^2 - F}\,. \tag{2.38}$$

Метрика (2.37) является аналогом АДМ представления СС метрик ОТО и содержит величины, имеющие непосредственный физический смысл. Производные массовой функции (2.15) – (2.17) в базисе (2.36) имеют вид:

$$(\partial_0 + V\partial_R)\mathbf{M} = -4\pi c^{-2}\,p_\parallel R^2 V\,, \tag{2.39}$$

$$\partial_R\mathbf{M} = 4\pi c^{-2}\,\varepsilon R^2\,, \tag{2.40}$$

$$\partial_0\mathbf{M} = -4\pi c^{-2}R^2V\,(\varepsilon + p_\parallel)\,. \tag{2.41}$$

В случае ортогональных координат, отсюда вытекают простые уравнения, используемые в методе массовой функции [16] при интегрирования уравнений ОТО.

Интересные случаи параметризации сферически-симметричных метрик связаны с лагранжевой координатой r, для которой $(\vec{u}\,r) = dr/ds = 0$. Введем СК, связанную с координатами $\{R, r\}$, и пару $\{\partial_R\,, dr\}$, в качестве исходных взаимных величин. Поскольку r постоянна вдоль траекторий частиц, а R меняется вдоль них, то можно положить

$$\vec{u} = \tilde{S}^{-1}\partial_R\,, \quad \varpi = \tilde{G}dr\,, \tag{2.42}$$

где $\tilde{G}\,, \tilde{S}$ — нормировочные функции. Тогда взаимные ковектор и вектор собственной диады определены с точностью до произвольной функции W:

$$\begin{aligned}\omega &= \tilde{S}(dR - Wdr)\,,\\ \vec{n} &= \tilde{G}^{-1}(\partial_r + W\partial_R)\,.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Выберем W из условия ортогональности базиса 1-форм $\{\omega\,, \varpi\}$. В новой СК для вектора унимодулярной симметрии (1.22) находим

$$\vec{\eta} = -Z^{-1}\partial_r\,, \tag{2.44}$$

где $Z = \tilde{S}\tilde{G}$. Из (1.30) и (1.31) вытекает

$$\varepsilon_u = \frac{W}{\tilde{G}}\,, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\tilde{S}}\,, \quad Z = \frac{W}{\varepsilon_u\varepsilon_n}\,. \tag{2.45}$$

В итоге, для векторного и ковекторного базисов, а также метрики $M^{(4)}$ получаем

$$\vec{u} = \varepsilon_n\partial_R\,, \quad \vec{n} = \varepsilon_n^{-1}Z^{-1}\,(\partial_r + \varepsilon_u\varepsilon_n Z\,\partial_R)\,, \tag{2.46}$$

$$\omega = \varepsilon_n^{-1}\,(dR - \varepsilon_u\varepsilon_n Zdr)\,, \qquad \varpi = \varepsilon_n Z\,dr\,. \tag{2.47}$$

$$ds^2 = \varepsilon_n^{-2}(dR - \varepsilon_u\varepsilon_n Zdr)^2 - \varepsilon_n^2 Z^2\,dr^2 - R^2d\sigma^2\,, \tag{2.48}$$

или

$$ds^2 = F\left(Zdr - \varepsilon_u\varepsilon_n^{-1}F^{-1}\,dR\right)^2 - F^{-1}dR^2 - R^2d\sigma^2\,. \tag{2.49}$$

Здесь координаты $\{R\,, r\}$ пространственные и допустимы в области, где $\gamma = -Z < 0$. Для функции Z, с помощью формул (1.33) и (2.45)-(2.47), получаем уравнение

$$Z_{,\,R} = \varepsilon_{n,\,r}/\varepsilon_u\varepsilon_n^2\,. \tag{2.50}$$

Формальное решение этого уравнения даёт

$$Z(r,\,R) = Z_0(r) - \int \varepsilon_u^{-1}\,\partial_r(\varepsilon_n^{-1})dR\,, \tag{2.51}$$

где $Z_0(r)$ — произвольная функция r.

Другое важное представление СС метрик связано с использованием сопутствующего времени τ и лагранжевой координаты r. Выберем пару $\{\partial_\tau\,, dr\}$ в качестве взаимных величин и преобразуем метрику (2.48) к координатам $\{\tau,\, r\}$. Согласно (1.31) имеем

$$\tau = \tau(r,\, R) = \tau_0(r) + c^{-1}\int \varepsilon_n^{-1} dR \equiv \tau_0(r) + \Phi(r,\, R)\,. \tag{2.52}$$

Отсюда следует $dR = c\varepsilon_n d\tau - c\varepsilon_n \tau_{,\,r} dr$. Подставляя это выражение в (2.47), получаем

$$\omega = cd\tau - I dr\,, \quad \varpi = \varepsilon_n Z\, dr\,, \tag{2.53}$$

$$I = I(r,\, R) = c\tau_{,\,r} + \varepsilon_u Z\,. \tag{2.54}$$

Соответствующий векторный базис (2.46) и метрика (2.48) принимают вид

$$\vec{u} = c^{-1}\partial_\tau\,,$$
$$\vec{n} = \varepsilon_n^{-1} Z^{-1}\,(\partial_r + I\,\partial_\tau)\,, \tag{2.55}$$

$$ds^2 = (cd\tau - I(r,\, R)dr)^2 - \varepsilon_n^2 Z^2\, dr^2 - R^2 d\sigma^2\,. \tag{2.56}$$

Приведённые варианты параметризации СС метрик и базисов расщепления имеют свои особенности, а их выбор определяется постановкой задачи и соображениями удобства. Формулы (2.48),(2.49), (2.51) и (2.56),(2.54), (2.52) определяют общие представления СС метрик ОТО. Координаты $\{R\,, r\}$ и $\{\tau,\, r\}$ можно понимать, как аналоги «разделяющихся» переменных.

3. СС конфигурации заряженной пыли

В качестве приложения рассмотрим СС конфигурацию заряженной пыли. Полная система уравнений включает уравнение Эйнштейна с ТЭИ

$$T_{ab} = \rho c^2 u_a u_b + \frac{1}{4\pi}(-\mathcal{F}_{ac}\mathcal{F}_b{}^c + \frac{1}{4}\,\mathcal{F}_{cd}\mathcal{F}^{cd}\,\gamma_{ab})\,,$$
$$T_{ik} = -\frac{R^2}{16\pi}\mathcal{F}_{ab}\mathcal{F}^{bc}\,\sigma_{ik}\,, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{F}_{ab} = A_{b,\,a} - A_{a,\,b} = E\epsilon_{ab}$, $\mathcal{F}_{ai} = 0$, $\mathcal{F}_{ik} = 0$, $E = \mathcal{F}_{01} = A_{1,\,0} - A_{0,1}$. Сюда следует добавить уравнение непрерывности пыли и заряда

$$(R^2\,\rho u^a)_{;\,a} = 0\,, \quad (R^2\,\rho_e u^a)_{;\,a} = 0\,, \tag{3.2}$$

где ρ и ρ_e — плотность пыли и заряда, $\{u^a = dx^a/ds\,,\ u^i = 0\}$ — 4-скорость пыли. Уравнения Максвелла и уравнения движения пыли имеют вид

$$(R^2 E e^{ba})_{,\,a} = -4\pi R^2\sqrt{-\gamma}\,\rho_e u^b\,, \tag{3.3}$$

$$\rho c^2 u_{a;\,b} u^b = \rho_e \mathcal{F}_{ab} u^b = -\rho_e \frac{E}{\sqrt{-\gamma}}\, e_{ab} u^b = \rho_e \frac{E}{\sqrt{-\gamma}}\, n_a\,. \tag{3.4}$$

Решение уравнений непрерывности (3.2) берем в виде

$$4\pi R^2 \rho u^b = -\,e^{ba}\,\mathcal{M}_{,\,a}\,,$$
$$4\pi R^2 \rho_e u^b = -\,e^{ba}\,Q_{,\,a}\,, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{M}$ и Q — некоторые функции. Отсюда вытекает

$$d\mathcal{M} = 4\pi\rho R^2\varpi\,, \qquad dQ = 4\pi\rho_e R^2\varpi\,, \tag{3.6}$$

$$(\vec{u}\,\mathcal{M}) = 0\,, \quad (\vec{u}Q) = 0\,,$$
$$(\vec{n}\,\mathcal{M}) = 4\pi R^2\rho\,, \quad (\vec{n}Q) = 4\pi R^2\rho_e\,. \tag{3.7}$$

Итак, собственная масса $\mathcal{M}(r)$ и заряд $Q(r)$ сферы являются интегралами движений и зависят только от её лагранжевого радиуса r. Далее, из уравнений (3.3) получаем $\mathcal{F}_{01} = E = \sqrt{-\gamma}\, Q(r)/R^2$, что даёт $T_{ak} = 0$ и

$$T_{ab} = \rho c^2 u_a u_b + \frac{Q^2(r)}{8\pi R^4}\, \gamma_{ab}\,,$$
$$T_{ik} = \frac{Q^2(r)}{8\pi R^2}\, \sigma_{ik}\,. \tag{3.8}$$

Сравнивая полученный результат с (1.7) и (1.15), приходим к выводу, что

$$\varepsilon = \rho c^2 + \frac{Q^2(r)}{8\pi R^4}\,,\; p_{\|} = -p_{\perp} = -\frac{Q^2(r)}{8\pi R^4}\,, \tag{3.9}$$
$$F_{tot} = F_0 - \frac{\kappa Q^2(r)}{2c^4 R^3}\,,\; G_{tot} = -\frac{4\pi\kappa}{c^2}\rho R\,. \tag{3.10}$$

Уравнения движения (3.4) теперь можно переписать следующим образом

$$\rho c^2 \frac{Du_a}{ds} = \rho_e \frac{Q(r)}{R^2}\, n_a\,. \tag{3.11}$$

Используя (1.33), отсюда получаем соотношение

$$\rho c^2 \frac{d\varepsilon_u}{ds} + \rho_e \frac{d}{ds}\left(\frac{Q(r)}{R}\right) = 0\,. \tag{3.12}$$

Вместе с уравнениями непрерывности (3.2) оно даёт локальный закон сохранения

$$(4\pi R^2 \sqrt{-\gamma}\, \varepsilon_{tot} u^a)_{,\, a} = 0 \tag{3.13}$$

для плотности полной энергии заряженного пыли.

$$\varepsilon_{tot} = \rho c^2 \varepsilon_u + \rho_e Q(r)/R\,, \tag{3.14}$$

Решение уравнения непрерывности (3.13) берем в виде $4\pi R^2 \varepsilon_{tot} u^a = -c^2 e^{ab}\, M_{tot,\, b}$, откуда

$$M_{tot}(r) = M_{tot}(r_0) + \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_{r_0}^{r} R^2 \varepsilon_{tot} \varpi\,, \tag{3.15}$$

$$(\vec{u} M_{tot}) = \frac{dM_{tot}}{ds} = 0\,,$$
$$(\vec{n} M_{tot}) = \frac{4\pi}{c^2} R^2 \varepsilon_{tot} = 4\pi R^2 \left(\rho\varepsilon_u + \rho_e \frac{Q(r)}{Rc^2}\right)\,. \tag{3.16}$$

Отсюда видно, что $M_{tot} = M_{tot}(r)$ – интеграл движения, а разность $M_{tot}(r) - M_{tot}(r_0)$ определяет полную массу заряженного пылевого сферического облака. Кроме того, имеем

$$dM_{tot} = \varepsilon_u\, d\mathcal{M} + \frac{Q(r)}{Rc^2}\, dQ(r)\,. \tag{3.17}$$

Для массовой функции, согласно (2.14), (3.9), (1.29) и (3.6), аналогично получаем

$$d\mathbf{M} = \varepsilon_u\, d\mathcal{M} + \frac{Q^2(r)}{2c^2 R^2}\, dR\,. \tag{3.18}$$

Вычитая почленно равенства (3.17) и (3.18) находим

$$dM_{tot}(r) - d\mathbf{M} = d\left(\frac{Q^2(r)}{2c^2 R}\right)\,. \tag{3.19}$$

Отсюда находим массовую функцию

$$\mathbf{M} = m + M_{tot}(r) - \frac{Q^2(r)}{2c^2 R}\,. \tag{3.20}$$

Полагая $m=0$, из (2.18) получаем

$$F = 1 - \frac{2\kappa M_{tot}(r)}{c^2 R} + \frac{\kappa Q^2(r)}{c^4 R^2}\,. \tag{3.21}$$

Введем локальные сохраняющиеся величины

$$\alpha(r) = \frac{\rho_e}{\rho c^2} = \frac{dQ(r)}{c^2 d\mathcal{M}(r)}\,, \tag{3.22}$$

$$\mathcal{H}(r) = \frac{\varepsilon_{tot}}{\rho c^2} = \frac{dM_{tot}(r)}{d\mathcal{M}(r)}\,. \tag{3.23}$$

Здесь $\alpha(r)$ и $\mathcal{H}(r)$ — удельные заряд и энергия пыли. Эти величины позволяют выразить ε_u через интегралы движения

$$\varepsilon_u = \frac{\varepsilon_{tot}}{\rho c^2} - \frac{\rho_e}{\rho c^2}\frac{Q(r)}{R} = \mathcal{H}(r) - \alpha(r)\frac{Q(r)}{R}\,. \tag{3.24}$$

Введем также величину

$$R_e(r) = \frac{Q(r)dQ(r)}{c^2 dM_{tot}(r)} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_{tot}}\,Q(r)\,. \tag{3.25}$$

Тогда, из (3.24), с помощью (3.22), (3.23) и (3.25) находим:

$$\varepsilon_u = \frac{dM_{tot}(r)}{d\mathcal{M}(r)} - \frac{Q(r)}{c^2 R}\,\frac{dQ(r)}{d\mathcal{M}(r)} = \mathcal{H}(r)\left(1 - \frac{R_e(r)}{R}\right)\,. \tag{3.26}$$

Введённые локальные $\alpha(r)\,, \mathcal{H}(r)\,, R_e(r)$ и интегральные $\mathcal{M}(r)$, $Q(r)$, $M_{tot}(r)$ сохраняющиеся величины позволяют построить классификацию систем и получить точные решения для заряженной пылевой конфигурации.

В качестве примера, рассмотрим случай координат $\{r,\, R\}$ и метрику (2.48) (или (2.49)), для которой сразу получаем общее решение в квадратурах. Действительно, используя (2.18), (3.21) и (3.24) интеграл (2.51) можно записать в виде

$$Z = Z_0 + \int \left(R\frac{d\mathcal{H}}{dr} + \frac{\kappa}{c^2\varepsilon_u}\frac{dM_{tot}}{dr} - \frac{\kappa Q}{c^4 \varepsilon_u R}\frac{dQ}{dr} - \frac{d}{dr}(\alpha Q)\right)\frac{dR}{\varepsilon_n^3 R}\,. \tag{3.27}$$

Или, учитывая (3.22), (3.23) перепишем его следующим образом

$$Z(r,\, R) = Z_0(r) + \int \frac{1}{\varepsilon_n^3(r,\, R)}\left(\frac{d\mathcal{H}}{dr} + \frac{\kappa - \alpha^2 c^4}{c^2 \mathcal{H} R}\;\frac{dM_{tot}}{dr} - \frac{Q}{R}\frac{d\alpha}{dr}\right)dR, \tag{3.28}$$

где $Z_0(r)$ — произвольная функция r, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r)\,,\ M_{tot} = M_{tot}(r)\,, \alpha = \alpha(r)$. Это выражение вместе с метриками (2.48), (2.49) даёт общее внутреннее решение для заряженной пылевой конфигурации. Отсюда, положив $r = M_{tot}$, приходим к решению Ори [17]. Совершая преобразований к координатам $\{\tau,\, r\}$ получим метрику вида (2.56). При этом из (2.54), с помощью (2.52), находим

$$I = c\tau_{0,\,r} + \varepsilon_u Z_0(r) + \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)dR - \varepsilon_u \int \frac{1}{\varepsilon_u}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)dR\,. \tag{3.29}$$

где $\tau_{0,\,r} = \partial\tau_0/\partial r$. Далее, интегрируя по частям и учитывая (3.26), получаем

$$I = c\tau_{0,\,r} + \left(1 - \frac{R_e}{R}\right)Z_0(r)\mathcal{H}(r) - R_e\left(1 - \frac{R_e}{R}\right)\int\left(\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\varepsilon_n}\right)dR\right)\frac{dR}{(R-R_e)^2}\,. \tag{3.30}$$

Отсюда, используя (2.52), имеем

$$I(r,\, R) = \left(1 - \frac{R_e}{R}\right)\left(c\tau_{0,\,r} + Z_0(r)\mathcal{H}(r) - cR_e\int\frac{\tau_{,\,r}dR}{(R-R_e)^2}\right)\,. \tag{3.31}$$

В результате метрика (2.56) для заряженной пылевой конфигурации принимает вид

$$ds^2 = (cd\tau - I(r,\, R)dr)^2 - \frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_u^2}(I(r,\, R) - c\tau_{,\,r})^2\,dr^2 - R^2 d\sigma^2\,, \tag{3.32}$$

где функции $I(r, R)$, $\tau(R, r)$, ε_n и ε_u определены формулами (3.31), (2.52), (2.20) и (3.24). Построенное решение с точностью до обозначений совпадает с решением, полученным Н.В. Павловым [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Том 1. М.: Мир, 1977. 474 с.
3. Frolov V.P., Novikov I.D. Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998. 770 p.
4. Misner C.W., Sharp D.H. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse // Physical Review B. 1964. V. 136. № 2. P. 571-576.
5. Hernandes W.C., Misner G.C. Observer time as a coordinate in relativistic spherical hydrodynamics // Astrophysics Journal. 1966. V. 143. № 2. P. 452-464.
6. Cahill M.E., McVittie G.C. Spherical symmetry and mass-energy in general relativity. I General Theory // Journal Mathematical Physics. 1970. V. 11. № 4. P.1382-1387.
7. Martinez E.A., York J.W.Jr. Additivity of the entropies of black holes and matter in equilibrium // Physical Review D. 1989. V. 40. № 6. P. 2124-2127.
8. Hayward S.A. Gravitational energy in spherical symmetry // Physical Review D. 1996 V. 53. № 4. P. 1938-1949.
9. Березин В.А., Кузьмин В.А., Ткачев И.И. О глобальной геометрии сферически-симметричной Вселенной // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1987. Т. 93. № 4(10). С. 1159-1167.
10. Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I. Dynamics of bubble in general relativity // Physical Review D. 1987. V. 36. № 10. P. 2919-2944.
11. Оппенгеймер Ю.Р., Волков Г.М. О массивных нейтронных сердцевинах [Пер. с англ.] // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 337-352.
12. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. М.: Наука, 1989. 240 с.
13. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
14. Gladush V.D., Konoplya R.A. Split structures in general relativity and the Kaluza-Klein theories. // Journal Mathematical Physics. 1999 V. 40. № 2. P. 955-979.
15. Точные решения уравнений Эйнштейна / Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. [Под ред. Э. Шмутцер] М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.
16. Burlikov V.V., Boots S.V., Korkina M.P. Model of a fluid sphere with the ultrarelativistic equation of state at the centre // Gravitation & Cosmology. 1996. V. 2. № 2(6). P. 167-173.
17. Ori A. The general solution for spherical charged dust // Classical and Quantum Gravity. 1990. V. 7. P. 985–998.
18. Павлов Н.В. Заряженные пылевые шары в общей теории относительности. I. Квадратуры уравнений Эйнштейна // Изв. вузов, Физика. 1976 V. 4. С. 107-113.

Поступила в редакцию 15.07.2012

Гладуш В.Д., Днепропетровский национальный университет (Украина), 2012.
E-mail: vgladush@gmail.com

Петрусенко А.И., Днепропетровский национальный университет (Украина), 2012.
E-mail: iftifn@gmail.com

V. D. Gladush, A. I. Petrusenko

Additional symmetry of the spherically symmetric configurations, the conservation laws and their application

Keywords: spherically symmetric configuration, additional symmetry, mass function, charged dust

PACS: 04.20.-q, 04.20.Cv, 04.20.Jb, 04.40.-b

We construct a 2 +2 decomposition of the Einstein equations and the energy-momentum tensor for a spherically symmetric configurations, induced by the spherical symmetry. In this case, the canonical expansion of the energy-momentum tensor is reduced to the expansion of the radial-time component of the tensor in the radial-time or isotropic bases. We confine ourselves to the case of a radial-time basis. Radial-time part of the Einstein equations is presented in terms of proper radial-time vectors of energy-momentum tensor. We introduce the dual variables, and it is shown that spherically symmetric configurations in general relativity have additional hidden unimodular symmetry. The consequence of this symmetry is the existence of local and integral conservation laws, and in particular, the mass function. Thus, the existence of this additional symmetry indicates the origins of the existence of the mass function. This allows us to construct general formal representations of the metrics for spherically symmetric configurations in terms of the mass function and the corresponding adapted basis. We introduce some simple canonical bases consistent with spherical symmetry. It turns out that to obtain exact solutions it is convenient to use a variety of non-orthogonal coordinate systems. Among these bases we discuss the basis of spatial coordinates (r, R), where r is the radial Lagrangian coordinate, R is the radial coordinate of the curvatures coordinate system and the coordinate basis (τ, R), where τ is the proper time. As an application we consider the spherically symmetric configurations of the charged dust. We construct local and integral conservation laws, as a consequences of the unimodular symmetry. We obtain the complete set of integrals of motion and exact solutions are found. Note that in the particular case of electrovacuum spaces unimodular symmetry vector is reduced to the Killing vector, and unimodular symmetry itself – to the isometry, which leads to a generalized Birkhoff theorem. We obtain general internal solution for the charged dust configurations. In the special case of spatial coordinates (r, R), with appropriate simplifications, it is reduced to the Ori solution. In the case of the coordinate basis (τ, R), the constructed solution coincides with the Pavlov solution up to notation.

REFERENCES

1 Landau L.D., Lifshitz E.M., *Classical Field Theory*. Pergamon Press, London, 1961.

2 Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler, J.A., *Gravitation*. Freeman, San Francisco, 1973.

3 Frolov V.P., Novikov I.D., *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic, 1998. 770 p.

4 Misner C.W., Sharp D.H., *Physical Review B*, 1964, vol.136, no.2, pp.571-576.

5 Hernandes W.C., Misner G.C., *Astrophysics Journal*, 1966, vol.143, no.2, pp.452-464.

6 Cahill M.E., McVittie G.C., *Journal Mathematical Physics*, 1970, vol.11, no.4, pp.1382-1387.

7 Martinez E.A., York J.W.Jr., *Physical Review D*, 1989, vol.40, no.6, pp.2124-2127.

8 Hayward S.A., *Physical Review D*, 1996, vol.53, no.4, pp.1938-1949.

9 Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I., *Zhurnal Eksperimental'noy i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1987, vol.93, no.4(10), pp.1159-1167. (in Russian)

10 Berezin V.A., Kuzmin V.A., Tkachev I.I., *Physical Review D*, 1987, vol.36, no.10, pp.2919-2944.

11 Oppenheimer J.R., Volkoff G.M., *Physical Review*, 1939, vol.55, p.374-381

12 Zel'manov A.L., Agakov V.G., *Elementy obshchey teorii otnositel'nosti* [Elements of General Relativity], Moscow: Nauka, 1989. 240 p. (in Russian)

13 Vladimirov Yu.S., *Sistemy otscheta v teorii gravitatsii* [Frames of reference in gravitation theory], Moscow: Energoizdat, 1982. 256 p. (in Russian)

14 Gladush V.D., Konoplya R.A., *Journal Mathematical Physics*, 1999, vol.40, no.2, pp.955-979.

15 Kramer D., Stefani H., McCallum M., Herlt E., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, London, 1980.

16 Burlikov V.V., Boots S.V., Korkina M.P., *Gravitation & Cosmology*, 1996, vol. 2, no.2(6), pp.167-173.

17 Ori A., *Classical and Quantum Gravity*, 1990, vol.7, pp.985–998.

18 Pavlov N.V., *Kvadratury uravneniy Eynshteyna // Zaryazhennye pylevye shary v obshchey teorii otnositel'nosti.* [Quadratures of the Einstein equations // Charged dust balls in General Relativity], Izvestiya vuzov, Fizika [News of Universities, Physics]. 1976, no.4. pp.107-113. (in Russian)

Received 15.07.2012

Gladush Valentin D., Dep. of Theoretical Physics,Dnepropetrovsk State University, 72 Gagarin Av., Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine
E-mail: vgladush@gmail.com

Petrusenko Alexander I., Dep. of Theoretical Physics,Dnepropetrovsk State University, 72 Gagarin Av., Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine
E-mail: iftifn@gmail.com