

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев<sup>1</sup>

**НЕРАВНОВЕСНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ  
I. УСЛОВИЯ ЛОКАЛЬНОГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ**

Рассмотрены неравновесные космологические сценарии в предположении восстановления скейлинга взаимодействий частиц в области сверхвысоких энергий. Проводится анализ условий термодинамического равновесия на различных стадиях эволюции Вселенной, в том числе, и на инфляционной.

**Ключевые слова:** ранняя Вселенная, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скейлинг, космические лучи.

**PACS:** 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

**1 Идеология стандартного космологического сценария и ее последствия**

Рассмотрим основные черты стандартного космологического сценария (SCS), не затрагивая пока вопросы теории устойчивости Вселенной и связанные с ней проблемы образования крупномасштабной структуры.

*1.1. Пространственная однородность и изотропность*

Первым важным положением стандартного космологического сценария, как и подавляющего большинства космологических моделей, является предположение об однородности и изотропии трехмерного пространства, что приводит к метрике Фридмана:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) = dt^2 - a^2(t)dl^2, \tag{1.1}$$

где:

$$dl^2 = d\chi^2 + \rho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{1.2}$$

$$\rho(\chi) = \begin{cases} \text{sh}(\chi), & k = -1; \\ \chi, & k = 0; \\ \sin(\chi), & k = +1 \end{cases},$$

$k$  - индекс кривизны трехмерного пространства постоянной кривизны:  $k = 0$  для нулевой трехмерной кривизны,  $k = 1$  - для постоянной положительной трехмерной кривизны, и  $k = -1$  - для постоянной отрицательной трехмерной кривизны [1]. Как известно, метрика Фридмана допускает группу вращений  $O(3)$ , генерируемую тремя векторами Киллинга  $\xi^i$ :

$$O(3) : \begin{cases} \xi_1^i = \delta_\varphi^i; \\ \xi_2^i = \delta_\theta^i \sin \varphi + \delta_\varphi^i \cos \varphi \text{ctg} \theta; \\ \xi_3^i = \delta_\theta^i \cos \varphi - \delta_\varphi^i \sin \varphi \text{ctg} \theta, \end{cases} \tag{1.3}$$

лишь два из которых линейно независимы, таких что:

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 0. \tag{1.4}$$

Кроме того, метрика (1.2) допускает пространственноподобное тензорное поле Киллинга  $\xi_{ij}$ :

$$\xi_{ij} = a^2(\eta)(g_{44}\delta_i^4\delta_j^4 - g_{ij}) \tag{1.5}$$

такое что:

$$\xi_{(ij,k)} = 0, \tag{1.6}$$

---

<sup>1</sup>E-mail: ignatjev\_yu@rambler.ru

и времениподобный вектор конформного движения:

$$\xi = \delta_4^i, \quad (1.7)$$

такой что:

$$L_{\xi} g_{ij} = \xi_{(i,j)} = 2 \frac{a'}{a} g_{ij}. \quad (1.8)$$

Как известно, тензор энергии-импульса наследует симметрию пространства времени вследствие цепочки соотношений:

$$L_{\xi} g_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} R_{ijkl} = 0 \Rightarrow$$

и уравнений Эйнштейна:

$$L_{\xi} R_{ij} = 0 \Rightarrow L_{\xi} T_{ij} = 0.$$

Поэтому тензор энергии-импульса Вселенной Фридмана принимает алгебраическую структуру метрики Фридмана, т.е., структуру ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T^{ij} = (\varepsilon + p)u^i u^j - p g^{ij}, \quad (1.9)$$

где

$$u^i = 1/\sqrt{g_{44}}\delta_4^i \quad (1.10)$$

- вектор скорости материи,  $\varepsilon(\eta)$ ,  $p(\eta)$  - ее плотность энергии и давление.

Уравнения Эйнштейна при этом сводятся к двум независимым уравнениям (см., например, [1]):

$$\frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + k) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \quad (1.11)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0, \quad (1.12)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Если нам известно уравнение состояния, т.е., зависимость вида:

$$p = p(\varepsilon), \quad (1.13)$$

то уравнение (1.12) интегрируется в квадратурах:

$$a = a(\varepsilon). \quad (1.14)$$

Подставляя решение (1.14) в уравнение (1.11), получим замкнутое дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $\varepsilon(\eta)$ . В случае *баротропного* уравнения состояния:

$$p = \varrho\varepsilon \quad (1.15)$$

уравнения Эйнштейна легко интегрируются для ранней Вселенной ( $t \rightarrow 0$ ), как известно в этом случае поведение решений не зависит от индекса кривизны  $k$  (см., например, [1]) и не отличается от поведения решений для пространственно плоской Вселенной ( $k = 0$ ):

$$a = a_1 t^{2/3(\varrho+1)}; \quad \varepsilon = \frac{1}{6\pi(\varrho+1)^2 t^2}, \quad \varrho + 1 \neq 0 \quad (1.16)$$

и при  $\varrho = -1$  получаем инфляционное решение:

$$a = a_1 e^{\Lambda t}; \quad \varepsilon = \frac{3\Lambda^2}{8\pi} = \text{const}. \quad (1.17)$$

Усилия многих теоретиков направлены на создание таких полевых моделей, которые обеспечивают нужное управление уравнением состояния: инфляцию, вторичное ускорение, темную материю и т.п. Этим исчерпывается динамика геометрии Вселенной Фридмана, но не исчерпывается динамика материи в этой Вселенной.

## 1.2. ЛТР и алгебра взаимодействий

Вторым важным положением SCS является гипотеза об изначальном термодинамическом равновесии Вселенной, которая стала определяющим фактором в формировании теории горячей Вселенной. Стартуя с современного состояния Вселенной и оборачивая вспять ее историю с учетом решения Фридмана, описывающего однородное космологическое расширение, а также с учетом закона сохранения числа частиц и энергии, мы приходим к стадии рекомбинации водорода, раньше которой фотоны находились в состоянии ЛТР с электронами и ионами<sup>2</sup>. Таким образом, на ранних стадиях космологического расширения действуют законы равновесной термодинамики, которые полностью определяются локально-равновесными функциями распределения частиц.

Итак, пусть в плазме протекают реакции вида:

$$\sum_A \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_B \nu'_B a'_B \quad (1.18)$$

где  $a_A, a'_B$  - сорт частиц (имя),  $\nu_A, \nu'_B$  - их числа в этой реакции. Тогда локально-равновесные функции распределения имеют вид, (см., например, [3]):

$$f_a^0(x, p) = \left[ \exp\left(\frac{-\mu_a + (u, p)}{T}\right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (1.19)$$

где  $T(x)$  - температура а  $u_i(x)$  - единичный времениподобный вектор макроскопической скорости  $(u, u) = 1$ , одинаковые для всех сортов частиц  $a$ ;  $\mu_a(x)$  - химические потенциалы, которые определяются серией условий химического равновесия:

$$\sum_A \mu_A \nu_A = \sum_B \mu'_B \nu'_B, \quad (1.20)$$

представляющих систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $\mu_a$ . Если в  $k$ -ой реакции вида (1.18) сохраняются некоторые векторные токи, порождаемые соответствующими зарядами  $q_A$  и  $q'_B$ , то для таких реакций выполняется закон сохранения заряда:

$$\sum_A q_A \nu_A^K - \sum_B q'_B \nu'_B^K = 0. \quad (1.21)$$

Алгебра взаимодействий элементарных частиц, т.е., фактически, схемы разрешенных в той или иной теоретико-полевой модели взаимодействий частиц реакций частиц вида (1.18), приводит к законам сохранения некоторых обобщенных токов [2]. Действительно, алгебра взаимодействий элементарных частиц определяется целыми числами  $\nu_n^K$ , равных числу частиц сорта  $n$ , участвующих в  $K$ -той реакции, т.е., матрицей  $\|\nu_n^K\|$ . Пусть  $N$  - число типов фундаментальных частиц, включая и античастицы, в конкретной теоретико-полевой модели. Перепишем реакции (1.18) в единой форме:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K a_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (1.22)$$

где  $\nu_A^K$  теперь уже могут принимать любые целочисленные значения: положительные, отрицательные и нулевые. В любой замкнутой полевой теории должно быть:

$$\text{rank} \|\nu_A^K\| < N, \quad (1.23)$$

в противном случае найдется такая частица, которая не сможет быть получена из других ни в одной реакции (1.22), т.е., не будет взаимодействовать с другими, что сразу выводит ее за рамки данной полевой теории, делая последнюю незамкнутой. Вследствие (1.23) всегда можно выбрать  $N$  чисел  $G_A$ , одновременно не равных нулю, таких что:

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K G_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (1.24)$$

<sup>2</sup>В том смысле, о котором мы говорили выше.

Пусть для определенности

$$\text{rank}||\nu_A^K|| = r < N.$$

Тогда существует  $N - r$  линейно независимых решений (1.24), которые мы обозначим символами  $G_A^s$  ( $s = \overline{1, N}$ ) и называть обобщенными зарядами. Поскольку  $\nu_A^K$  - целые числа, то решение уравнений (1.24) всегда представимо в рациональных числах. Поэтому, умножая уравнения (1.24) на подходящие множители, их решения всегда можно выразить в целых числах, т.е., обобщенным зарядам можно придать целочисленные значения. Таким образом, в любой замкнутой полевой теории мы будем иметь и соответствующие законы сохранения обобщенных макроскопических токов [3]:

$$J_s^i = \sum_{A=1}^N G_A^s \int_{P(x)} p^i f_A dP_A. \quad (1.25)$$

Поскольку далее условия химического равновесия (1.20) принимают вид, формально ничем не отличающийся от уравнений (1.24):

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \mu_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots), \quad (1.26)$$

то и решения этих уравнений с точностью до множителя не отличается от решения уравнений (1.24):

$$\mu_A^s = \sigma G_A^s, \quad (1.27)$$

где  $\sigma$  - общий множитель для всех частиц. Отсюда, например, сразу следует, что если некоторые обобщенные токи сохраняются (например, электрический ток), то химические потенциалы безмассовых квантов такого поля равны нулю, а химические потенциалы соответствующих заряженных частиц и античастиц равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Далее, в однородной и изотропной Вселенной все термодинамические функции должны зависеть лишь от времени, а вектор макроскопической скорости должен быть направлен вдоль временной координаты, - (1.10). Тогда:

$$f_a^0(t, p) = \left[ \exp \left( -\lambda_a(t) + \frac{E_a(p)}{T(t)} \right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (1.28)$$

где:

$$E_a(p) = \sqrt{m_a^2 + p^2}, \quad (1.29)$$

- энергия частиц,

$$p^2 = -g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$$

- квадрат трехмерного импульса,

$$\lambda_a(t) = \frac{\mu_a(t)}{T(t)}, \quad (1.30)$$

- приведенные химические потенциалы, которые также удовлетворяют системе уравнений химического равновесия

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^K \lambda_A = 0; \quad (K = 1, 2, \dots). \quad (1.31)$$

Вследствие же однородности Вселенной и ее изотропии законы сохранения обобщенных токов (1.25) в метрике (1.1) принимают вид:

$$a^3(t) \sum_A G_A \Delta n_A(t) = \text{const}, \quad (1.32)$$

где  $\Delta n_A$  - разность плотностей частиц и античастиц сорта "A" с обобщенным зарядом  $G_A$ .

### 1.3. Высокая энтропия

Третьим важным положением SCS является положение о высокой величине удельной энтропии, приходящейся на один барион в современной Вселенной. Точнее говоря, речь идет об отношении количества фотонов к барионам. Удобно ввести обратную величину:

$$\delta_B = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1, \quad (1.33)$$

где  $n_B$ ,  $n_\gamma$  - плотности числа барионов и фотонов в современной Вселенной, соответственно.

Равновесные плотности числа частиц,  $\overset{0}{n}$ , энтропии,  $\overset{0}{s}$ , и энергии,  $\overset{0}{\varepsilon}$ , для газа безмассовых частиц равны (см., например, [4]):

$$\overset{0}{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3); \quad (1.34)$$

$$\overset{0}{s} = \frac{d}{dT} \frac{\rho}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{2\pi^2 \rho T^3}{45} g_e; \quad (1.35)$$

$$\overset{0}{\varepsilon} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T} \pm 1} = \frac{\rho \pi^2 T^4}{30} g_e, \quad (1.36)$$

где  $\rho$  - число независимых поляризацій (спина) частицы ( $\rho = 2$  - для фотонов и безмассовых нейтрино),  $g_a$  - статистический фактор:

$$g_n = g_e = 1 \quad \text{для бозонов}; \quad g_n = 3/4, \quad g_e = 7/8 \quad \text{для фермионов}. \quad (1.37)$$

знак “+” соответствует фермионам, “-” - бозонам,  $\zeta(x)$  -  $\zeta$  - функция Римана.

Суммарная плотность энергии безмассовых частиц равна:

$$\varepsilon = \sum_a \overset{0}{\varepsilon}_a = N \frac{\pi^2 T^4}{15}, \quad (1.38)$$

где

$$N = \frac{1}{2} \left[ \sum_B (2S + 1) + \frac{7}{8} \sum_F (2S + 1) \right] \quad (1.39)$$

- эффективное число типов частиц ( $S$  - спин частицы)<sup>3</sup>; суммирование идет по бозонам (B) и фермионам (F), соответственно. Введем далее для удобства два числа,  $N_B$  и  $N_F$ :

$$N_B = \frac{1}{2} \sum_B (2S + 1); \quad N_F = \frac{1}{2} \sum_F (2S + 1) \quad (1.40)$$

- числа типов бозонов и фермионов. Тогда:

$$N = N_B + \frac{7}{8} N_F. \quad (1.41)$$

Выражение для суммарной плотности энтропии принимает вид:

$$s = \sum_a \overset{0}{s}_a = N \frac{4\pi^2 T^3}{45} \quad (1.42)$$

Рассмотрим теперь ультрарелятивистские частицы (барионы, лептоны), находящихся в тепловом равновесии, масса покоя которых отлична от нуля. Поскольку химические потенциалы частиц и античастиц равны по величине и противоположны по знаку, получим выражение для разницы массивных барионов (лептонов) какого-то типа:

$$\Delta \overset{0}{n} = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{e^{-\lambda + E(p)/T} + 1} - \frac{1}{e^{\lambda + E(p)/T} + 1} \right] p^2 dp. \quad (1.43)$$

<sup>3</sup> В полевых моделях взаимодействий типа SU(5)  $\mathcal{N} \sim 100 \div 200$ .

Полагая:

$$\lambda_A = \frac{\mu_A}{T} \ll 1 \quad (1.44)$$

и переходя к пределу  $m \rightarrow 0$  в интегралах типа (1.43), получим, разлагая эти интегралы в ряд по малости  $\lambda$ :

$$\Delta n^0 \approx \lambda \frac{\rho}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{p/T}}{(e^{p/T} + 1)^2} dp = \lambda \frac{T^3}{3}, \quad (1.45)$$

где для определенности мы положили  $\rho = 2$  ( $S=1/2$ ).

Таким образом, используя формулы (1.34) и (1.45), получим выражение для равновесного отношения избытка барионов к числу фотонов:

$$\delta_B = \frac{\Delta n^0}{n_\gamma^0} = \lambda \frac{\pi^2}{6\zeta(3)} \quad (\approx 1, 369\lambda), \quad (1.46)$$

- равновесный относительный избыток барионов,  $\delta_B$ , практически совпадает с их приведенным химическим потенциалом:

$$\delta_B \sim \lambda. \quad (1.47)$$

Поскольку согласно (1.34) и (1.35) равновесная плотность энтропии ультрарелятивистских частиц пропорциональна равновесной плотности числа частиц -  $\frac{0}{s} \sim \frac{0}{n}$ , в стандартном космологическом сценарии делается вывод о малости химических потенциалов частиц на ультрарелятивистском этапе эволюции Вселенной, т.е., об удивительно высокой степени зарядовой симметрии Вселенной в начале эволюции:

$$\lambda \sim 10^{-10} \div 10^{-9} \ll 1. \quad (1.48)$$

#### 1.4. Далеко идущие последствия

Отсюда сразу напрашивается мысль, а не являлась ли Вселенная с самого начала полностью зарядово симметричной, а небольшой избыток барионов ( $\sim 10^{-10}$ ) возник вследствие каких-либо механизмов спонтанного нарушения симметрии, которые могли иметь место при сверхвысоких энергиях взаимодействующих частиц, далеко превышающих принципиальные экспериментальные возможности человечества. Такая идея и была высказана Сахаровым [5] (1967) и затем как теория бариогенезиса была развита на основе SU(5)-модели в работах [6] - [13]. Теория бариогенезиса наложила достаточно строгие условия на минимально возможные значения масс сверхмассивных X-бозонов (см., например, [10]):

$$m_X \geq 10^{16} \text{Gev}. \quad (1.49)$$

Позже в более строгих расчетах Автора этот предел был снижен на порядок ([14] - [17]):

$$m_X \geq 5 \cdot 10^{14} \text{Gev}, \quad (1.50)$$

однако, это не меняет сути дела - стандартный космологический сценарий устанавливает ограничения на параметры той или иной полевой теории фундаментальных взаимодействий. Можно напомнить целый ряд таких «космологических» ограничений на массы элементарных частиц (нейтрино, адронов, гравитино и т.п.) и прочие константы фундаментальных взаимодействий, полученных на основе стандартного космологического сценария (см., например, книгу [18, 19], а также статью [20], являющихся своеобразными энциклопедиями таких ограничений) и вызывавших прежде энтузиазм приверженцев горячей модели. В свою очередь, сочетание концепций термодинамического равновесия и сингулярного начального состояния Вселенной с классическими результатами Хокинга о рождении частиц сингулярностями привело к внешне заманчивой идее вакуумного начала Вселенной, тем самым сделав начальную фазу Вселенной совершенно жесткой и безальтернативной. Наблюдение за тенденциями современной космологии невольно вызывает вопрос, а не является ли идея вакуумного начала Вселенной той центральной сакраментальной идеей стандартного космологического сценария, справедливость которой он и призван подтвердить? Заметим, что и так называемый холодный космологический сценарий принципиально практически не отличается от горячего сценария, так как идея локального термодинамического равновесия в начале Вселенной

является центральной для обоих сценариев, а их отличие заключается лишь в разной величине относительного химического потенциала - малой для горячей модели и большой для холодной.

Заметим, что такая тенденция - получение «космологических» ограничений на параметры фундаментальных взаимодействий на основе выводов SCS является, хотя и весьма соблазнительной, но и чрезвычайно опасной для развития теории фундаментальных взаимодействий при высоких энергиях - теории фундаментальных взаимодействий оказываются заложницами феноменологической равновесной модели Вселенной!

## 2 Более детальный анализ условий ЛТР

### 2.1. Влияние сингулярности Вселенной на установление ЛТР

Первое отличие, которое бросается в глаза при сравнении космологического процесса установления ЛТР с обычным процессом - это наличие начала общей истории частиц и их взаимодействий в космологии по сравнению с обычной ситуацией, вызванное наличием космологической сингулярности в момент времени  $t = 0$ . Во-первых, вследствие принципа причинности ЛТР не может быть установлено на временах порядка и меньше планковских. Действительно, в сфере, образованной световым горизонтом какой-либо одной частицы, укладывается:

$$N_t = \frac{4\pi}{3} t^3 n(t) \quad (2.1)$$

других частиц, где  $n(t)$  - их числовая плотность. Если  $N_t < 1$ , взаимодействие между частицами не может иметь место, и ЛТР не установится. В горячей модели согласно (1.16) и (1.38) температура ультрарелятивистской плазмы изменяется по закону :

$$T_0(t) = \left( \frac{45}{32\pi^3 N} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.2)$$

поэтому при использовании равновесных концентраций (1.34) соотношение (2.1) принимает в случае стандартной модели SU(5) вид:

$$N_t \sim 0,33t^{\frac{3}{2}}. \quad (2.3)$$

Таким образом, даже при использовании равновесных концентраций горячей модели ЛТР не может быть установлено при  $t \lesssim t_{pl}$ . Но тогда начальные концентрации вовсе не обязаны быть равновесными, - они могут оказаться значительно ниже последних. Но в этом случае установление ЛТР отодвигается на более поздние, чем планковские, времена [21].

Во-вторых, более детальный динамический анализ корреляционных функций частиц также обнаруживает некоторые принципиальные отличия космологической ситуации от обычной. В качестве точно решаемой модельной задачи можно рассмотреть распад тяжелой электронейтральной покоящейся массивной частицы на две ультрарелятивистские заряженные античастицы.

Строгое решение этой задачи приведено в статье А.В. Смирнова [22] и сводится к замене ядра  $W_{ij}$  релятивистского интеграла кулоновских столкновений Беляева-Будкера [24] на ядро  $\bar{W}_{ij}$  по правилу:

$$\bar{W}_{ij} = W_{ij}\Theta(t),$$

где:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \lambda_{pl}; \\ \frac{1}{\Lambda} \ln \frac{t}{\lambda_{pl}}, & \lambda_{pl} < t < \lambda_D; \\ 1, & t > \lambda_D, \end{cases} \quad (2.4)$$

$\lambda_D$  - радиус Дебая-Хюккеля,  $\Lambda$  - кулоновский логарифм. Это решение строго показывает, что корреляция частиц до планковских времен отсутствует и лишь потом начинает логарифмически медленно расти до классических времен релаксации.

### 2.2. Условия установления ЛТР

Перечисленные в разделе 3 принципы SCS базируются на условии выполнения ЛТР в ранней Вселенной, - именно это условие и является главным догматом SCS. Поэтому в первую очередь как

раз и необходимо проверить выполнение этого условия в ранней Вселенной, используя современные представления о взаимодействии элементарных частиц в области сверхвысоких энергий.

Так как темп расширения Вселенной есть  $\dot{a}/a$ , то более строгое, чем (6.2.8) условие установления ЛТР имеет вид:

$$\tau_{eff} \frac{\dot{a}}{a} < 1. \quad (2.5)$$

Если числа частиц, участвующих в данной реакции сохраняются:

$$n(t) = \frac{n_1}{a^3(t)}, \quad (2.6)$$

где для определенности здесь и далее полагаем:

$$a(1) = 1 \quad (2.7)$$

( $t = 1$  соответствует планковскому моменту времени,  $n_1 = n(1)$  - плотность числа частиц на этот момент). Согласно (1.1) выбор такой нормировки масштабного фактора соответствует выбору планковских единиц длины на планковский момент времени. При этой нормировки в случае баротропного уравнения состояния (1.15) получаем из (1.16):

$$a = t^{2/3(\rho+1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2(\rho+1)}{3t}, \quad (\rho \neq 1), \quad (2.8)$$

и из (1.17):

$$a = e^{\Lambda(t-1)}; \quad \frac{\dot{a}}{a} = \Lambda, \quad (\rho = -1). \quad (2.9)$$

Для более строгого анализа условия ЛТР необходимо учесть зависимость сечения взаимодействия  $\sigma_{eff}$  ультрарелятивистских частиц от их кинетической энергии  $E_{cm}$  в системе центра масс. Поскольку эта энергия является функцией космологического времени, то эффективное сечение рассеяния также является функцией времени:  $\sigma_{eff} = \sigma_{eff}(t)$ . Поэтому условие ЛТР (2.5) принимает вид:

$$\frac{\dot{a}a^2}{n_1\sigma_{eff}(1)} \frac{\sigma_{eff}(1)}{\sigma_{eff}(t)} < 1. \quad (2.10)$$

Для выяснения зависимости от времени эффективного сечения взаимодействия необходимо более подробно рассмотреть кинематику четырехчастичных реакций.

### 2.3. Кинематика четырехчастичных реакций и полное сечение рассеяния

Четырехчастичные реакции типа:

$$a + b \rightarrow c + d \quad (2.11)$$

полностью описываются двумя кинематическими инвариантами,  $s$  и  $t$ , которые имеют следующий смысл:  $\sqrt{s}$ - энергия сталкивающихся частиц в центре масс (СЦМ):

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2, \quad (2.12)$$

а  $t$ -релятивистский квадрат переданного импульса:<sup>4</sup>

$$t = (p_c - p_a)^2 = (p_b - p_d)^2, \quad (2.13)$$

где квадраты импульсов понимаются как скалярные четырехмерные квадраты:

$$p_a^2 = (p_a, p_a) = (p^4)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = m_a^2,$$

и т.д. Так, например:

$$(p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a p_b) + p_b^2 = m_a^2 + 2(p_a, p_b) + m_b^2.$$

<sup>4</sup>Автор надеется, что читателя не смутит совпадение обозначений:  $t$  - время в метрике Фридмана,  $s$  - ее интервал, одновременно  $t$ ,  $s$  - кинематические инварианты. Кроме того с помощью  $s$  мы обозначаем и плотность энтропии. Эти обозначения являются стандартными и мы не сочли необходимым их менять.



При этом инвариантные амплитуды рассеяния  $F(s, t)$ , определяемые как результат усреднения инвариантной амплитуды рассеяния по состояниям частиц,  $c$  и  $d$ , оказываются зависящими лишь от этих двух инвариантов (см., например, [25]):

$$\sum |M_{FJ}|^2 = \frac{|F(s, t)|^2}{(2S_c + 1)(2S_d + 1)}, \quad (2.14)$$

где  $S_i$  - спины. С помощью инвариантной амплитуды  $F(s, t)$  определяется полное сечение реакции (2.11) (см. [25]):

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{16\pi\lambda(s, m_a^2, m_b^2)} \int_{t_{min}}^{t_{max}} dt |F(s, t)|^2, \quad (2.15)$$

где  $\lambda$  - функция треугольника:

$$\lambda^2(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc, \quad (2.16)$$

и

$$t_{min}^{max} = (4s^{-1})[(m_c^2 - m_a^2 + m_b^2 - m_d^2)^2 - \lambda - \lambda' \pm 2(\lambda\lambda')^{1/2}]. \quad (2.17)$$

где для сокращения приняты обозначения:

$$\lambda = \lambda(s, m_a^2, m_b^2); \quad \lambda' = \lambda(s, m_c^2, m_d^2).$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i} \rightarrow \infty \quad (2.18)$$

имеем:

$$s \rightarrow 2(p_a, p_b); \quad t \rightarrow -2(p_a, p_b), \quad (2.19)$$

$$t_{min} \rightarrow -s; \quad t_{max} \rightarrow 0. \quad (2.20)$$

$$\frac{s}{m_i^2} \rightarrow \infty; \quad \lambda \rightarrow s^2, \quad (2.21)$$

и формула (2.15) значительно упрощается введением безразмерной переменной:

$$x = -\frac{t}{s}; \quad (2.22)$$

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(s, x)|^2. \quad (2.23)$$

Таким образом, полное сечение рассеяния зависит лишь от кинематического инварианта  $s$  - квадрата энергии сталкивающихся частиц в системе центра масс:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}(s).$$

Именно эта зависимость и будет управлять установлением локального термодинамического равновесия в ранней Вселенной.

#### 2.4. Влияние зависимости сечения взаимодействия от кинематического инварианта $s$ на установление ЛТР

Полагая в дальнейшем эффективное сечение взаимодействия равным полному, исследуем зависимость установления ЛТР от вида функции  $\sigma_{tot}(s)$ . Предположим для ультрарелятивистских частиц степенную зависимость полного сечения рассеяния от кинематического инварианта (см. [21]):

$$\sigma_{tot}(s) \sim s^\alpha, \quad \alpha = \text{Const}. \quad (2.24)$$

Поскольку в изотропной расширяющейся Вселенной интегралом движения является модуль *конформного импульса* частицы  $\mathbb{P}$ :

$$a(t)p = \mathcal{P} = \text{Const}, \quad (2.25)$$

то в ультрарелятивистском пределе (2.18) согласно (2.19) и (2.25) асимптотическое поведение кинематического инварианта описывается выражением:

$$\frac{p}{m} \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow \frac{s_1}{a^2(t)}, \quad (2.26)$$

где  $s_1 = s(1)$ . Таким образом, согласно (2.24) получим:

$$\sigma_{tot}(t) = \sigma_{tot}(1)a^{-2\alpha}(t). \quad (2.27)$$

Подставляя эту зависимость в условие ЛТР (2.10), получим явную зависимость условия ЛТР от масштабного фактора:

$$\dot{a}a^{2(1-\alpha)} < n_1\sigma_{tot}(1). \quad (2.28)$$

Таким образом, используя решения уравнений Эйнштейна для ранней Вселенной в случае баротропного уравнения состояния ( $\rho \neq -1$ ), (2.8), получим из (2.28) условие ЛТР в ранней Вселенной:

$$t^{\frac{4\alpha+3(1-\rho)}{1+\rho}} < n_1\sigma_{tot}(1), \quad (2.29)$$

откуда следует, что при выполнении условия:

$$4\alpha + 3(1 - \rho) > 0, \quad (2.30)$$

ЛТР поддерживается на ранних стадиях расширения, а на поздних нарушается, т.е., при:

$$\alpha > -\frac{3}{4}(1 - \rho) \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (2.31)$$

а при выполнении обратного к (2.31) условия ЛТР нарушается на ранних стадиях и восстанавливается на поздних. В случае ультрарелятивистского уравнения состояния  $\rho = 1/3$  получим из (2.31) условие существования ЛТР на ранних стадиях [21]:

$$\alpha > -\frac{1}{2} \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad p = \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2.32)$$

В случае предельно жесткого уравнения состояния  $\rho = 1$  условие поддержания ЛТР на ранних стадиях и нарушения на поздних эквивалентно условию:

$$\alpha > 0 \Rightarrow LTE : t < t_0, \quad (p = \varepsilon). \quad (2.33)$$

В частности, при  $\alpha = 0$  (сечение взаимодействия постоянно) в случае предельно жесткого уравнения состояния время вообще выпадает из условия ЛТР [21], - на этой стадии расширения во Вселенной ЛТР либо во все времена, либо вообще отсутствует.

*Таким образом, зависимость полного сечения взаимодействия частиц от кинематического инварианта в области сверхвысоких значений энергий частиц играет решающую роль при выяснении вопроса о существовании ЛТР в ранней Вселенной.*

## 2.5. Влияние инфляционных стадий на установление ЛТР

Вясним теперь, каким образом существование инфляционных стадий в ходе расширения Вселенной может повлиять на существование ЛТР<sup>5</sup>? В случае инфляции  $\rho = -1$  условие ЛТР (2.29) необходимо заменить следующим:

$$e^{\Lambda(3+2\alpha)(t-1)} < n_1\sigma_{tot}(1), \quad (2.34)$$

поэтому при:

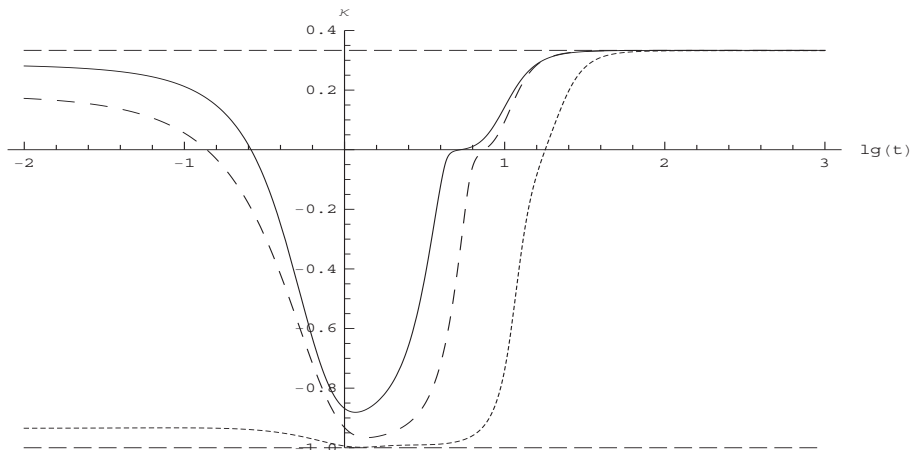
$$\alpha > -\frac{3}{2} \quad (2.35)$$

<sup>5</sup>Этот вопрос задал Автору В.Н. Мельников на конференции Gracos-07, которому Автор благодарен за фактически интересную постановку задачи. Благодаря обнаружению современного ускорения Вселенной от этого вопроса теперь уже нельзя отмахнуться.

ЛТР поддерживается на ранних стадиях и нарушается на поздних. Последнее, разумеется, верно при наличии сохраняющегося числа частиц на инфляционной стадии эволюции. Для стадии поздней инфляции, таким образом, этот вопрос не существен: если ЛТР нарушено уже в момент начала поздней стадии ускорения, то в дальнейшем оно уже никогда не восстановится.

Таким образом, принципиальное значение имеет лишь вопрос о возможности нарушения ЛТР на этапе ранней инфляции. Более точно этот вопрос можно перефразировать так: с какого состояния «стартовала» Вселенная: с сингулярного или де-ситтеровского? Ответ на этот вопрос у подавляющего большинства космологов «на современном этапе расширения Вселенной»<sup>6</sup> звучит однозначно: «с де-ситтеровской!». Однако, этот ответ, опять-таки, не подкреплён фактами, а лишь базируется на все той же центральной сакраментальной идее СКС – «Вселенная должна стартовать из вакуумного состояния». Оставим пока в стороне эту, без сомнения, красивую идею и выясним, каким же образом расширяется ранняя Вселенная, состоящая из двух компонентов: скалярного поля и идеальной жидкости. Задача в такой постановке для минимальной связи жидкости с достаточно произвольным уравнением состояния и скалярного поля решалась в работах В.М. Журавлева [26, 27], а для скалярно заряженной жидкости в работах Ю.Г. Игнатъева и Р.Ф. Мифтахова [28, 29]. Эволюция двухкомпонентной системы определяется относительным вкладом жидкости и скалярного поля в суммарную плотность энергии, а также уравнением состояния жидкости. Учет скалярного заряда жидкости, в основном, приводит к демпфированию колебаний системы. Возможны как «квазивакуумные старты», так и классические, сингулярные. На Рис. 1 показаны результаты численного моделирования такой системы, относящиеся, в частности, к старту с ультрарелятивистского уравнения состояния  $p = \varepsilon/3 \Rightarrow \kappa = 1/3$ . Напомним, что инвариантное ускорение Вселенной,  $\Omega = \ddot{a}/\dot{a}^2$  связано с эффективным коэффициентом баротропы соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa). \quad (2.36)$$



**Рис. 1.** Эволюция эффективного коэффициента баротропы  $\kappa = p/\varepsilon$  в двухкомпонентной космологической системе, состоящей из вырожденных скалярно заряженных фермионов и скалярного поля, в зависимости от первоначального импульса Ферми. По оси абсцисс отложены значения логарифма космологического времени. Частая пунктирная линия:  $p_f = 0.1$ , пунктирная линия:  $p_f = 0.3$ , сплошная линия:  $p_f = 0.5$ , сплошная жирная линия:  $p_f = 1$ . Всюду масса фермионов  $m = 1$ , масса скалярных бозонов  $\mu = 0.3$ , заряд фермионов  $q = 0.3$ ; значения всех величин даны в универсальной системе единиц. По результатам работ [28, 29].

Поэтому система на Рис. 1 стартует с ультрарелятивистского уравнения состояния ( $\kappa = 1/3, \Omega = -1$ ), затем переходит на инфляционную стадию ( $\kappa = -1, \Omega = +1$ ), на которой она пребывает примерно 10 планковских времен, затем снова возвращается на ультрарелятивистскую стадию. Заметим, что длительности этих стадий, как и порядок их чередования определяется параметрами модели, в частности, и начальными условиями. Длительности этих стадий могут быть изменены на несколько порядков, как в одну, так и в другую сторону.

<sup>6</sup> Т.е., в конце 2012 года.

### 3 Скейлинг взаимодействия релятивистских частиц

#### 3.1. Ограничения аксиоматической теории $S$ -матрицы на асимптотическое поведение сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий

Возникает вопрос, а какова зависимость  $\sigma_{tot}(s)$  на самом деле? Для исследования кинетики процессов в ранней Вселенной необходимо знать асимптотическое поведение инвариантных амплитуд  $F(s, t)$  в пределе (2.18). Современные экспериментальные возможности ограничены значениями  $\sqrt{s}$  порядка нескольких сотен Гэв. Было бы неосторожным опираться на ту или иную полевую модель взаимодействия для прогнозирования асимптотического поведения сечения рассеяния в области сверхвысоких энергий. Более разумно в современных условиях опираться на выводы аксиоматической теории  $S$ -матрицы, полученные на основе фундаментальных законов унитарности, причинности, масштабной инвариантности и т.п. Унитарность  $S$ -матрицы приводит к известному асимптотическому соотношению (см., например, [30]):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{s \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{s^2} \quad (3.1)$$

при значениях  $s$  выше унитарного предела, т.е., при условии (2.18), если под  $m_i$  понимать массы всех промежуточных частиц. Но тогда из (2.23) следует:

$$F(s, 1)|_{s \rightarrow \infty} \sim \text{Const.} \quad (3.2)$$

Понятие унитарного предела впервые было введено Ландау применительно к векторным мезонам [31]. Следуя этой работе, под энергией унитарного предела в дальнейшем будем понимать такую критическую энергию, выше которой прекращается рост эффективного сечения взаимодействия и поведение сечения взаимодействия подчиняется условию унитарности. Для стандартного  $\nu e$ -рассеяния энергия унитарного предела составляет  $\sqrt{s} = \sqrt{\sqrt{2}\pi/G} \approx 600$  Gev, где  $G$  - константа электрослабого взаимодействия.

На основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы в 60-е годы XX-го столетия были получены строгие ограничения на асимптотическое поведение полных сечений и инвариантных амплитуд рассеяния:

$$\frac{C_1}{s^2 \ln s} < \sigma_{tot}(s) < C_2 \ln^2 s, \quad (3.3)$$

где  $C_1, C_2$  - неизвестные константы. Верхний предел (3.3) был установлен в работах М. Froissart, А. Martin, нижний - в работах Y.S. Jin, А. Martin, М. Sugawara (см. обзор в книге [35]). Отметим также ограничения на инвариантные амплитуды рассеяния (см., например, [35]):

$$|F(s, t)| \leq |F(s, 0)|; \quad (3.4)$$

$$C'_1 < |F(s, 0)| < C'_2 s \ln^2 s. \quad (3.5)$$

Поэтому инвариантные амплитуды рассеяния в пределе (2.18) должны быть функциями лишь переменной  $x = -t/s$ , т.е.:

$$|F(s, t)| = |F(x)|, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (3.6)$$

Но тогда вследствие (2.23)

$$\sigma_{tot}(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 dx |F(x)|^2 = \frac{\text{Const}}{s}, - \quad (3.7)$$

полное сечение ведет себя также, как и сечение электромагнитных взаимодействий, т.е., при сверхвысоких энергиях восстанавливается скейлинг.

Скейлинговая асимптотика сечения (3.7) лежит строго посередине между возможными крайними асимптотиками полного сечения рассеяния (3.3). Кроме того при выполнении (3.7) автоматически выполняются и соотношения, полученные на основе аксиоматической теории  $S$ -матрицы (3.1) и (3.2).

Далее, как мы отмечали выше, для чисто электромагнитных взаимодействий вследствие их масштабной инвариантности скейлинг всегда существует. В качестве примера приведем сечение

аннигиляции ультрарелятивистских электронно-позитронной пары ([23]), которое может быть переписано с помощью кинематического инварианта  $s$  в явно скейлинговой форме:

$$\sigma_{ee^+ \rightarrow \gamma\gamma} = \pi \frac{\alpha^2}{s} \left( \ln \frac{2s}{m} - 1 \right). \quad (3.8)$$

Для лептон-адронного взаимодействия предположение о существовании скейлинга было выдвинуто в работах [36], [37]. В частности, для полного сечения реакции

$$e + e^+ \rightarrow \text{адроны}$$

было получено выражение:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum e_i^2,$$

где  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры,  $e_i$  - заряды фундаментальных фермионных полей. Данные, полученные на Стэнфордском накопителе, подтвердили наличие скейлинга для этих взаимодействий. Для гравитационных взаимодействий скейлинг, по-видимому, также должен восстанавливаться при сверхвысоких энергиях вследствие масштабной инвариантности гравитационных взаимодействий в ВКБ-приближении. Можно привести большое количество аналогичных примеров, являющихся надежно установленными фактами.

### 3.2. Асимптотическая конформная инвариантность релятивистской кинетической теории

Возникает вопрос, а какие выводы об установлении термодинамического равновесия в ранней Вселенной дает строгая релятивистская кинетическая теория? Релятивистские кинетические уравнения относительно макроскопической функции распределения  $f_a(x^i, p^k)$  частиц сорта  $a$  [3], [?]-[38]:

$$p^i \tilde{\nabla}_i f_a(x, p) = \sum_{b,c,d} J_{ab \rightleftharpoons cd}(x, p), \quad (3.9)$$

где  $\tilde{\nabla}$  - оператор ковариантного дифференцирования Картана в фазовом пространстве  $X \times P$ :

$$\tilde{\nabla} = \nabla_i + \Gamma_{ik}^j p^k \frac{\partial}{\partial p^j}. \quad (3.10)$$

С помощью функции распределения  $f_a(x, p)$  определены макроскопические моменты:

$$n_a^i(x) = \int_{P(x)} f_a(x, p) p^i dP, \quad (3.11)$$

- вектор плотности потока числа частиц сорта  $a$  и

$$T_a^{ik}(x) = \int_{P(x)} p^i p^k f_a(x, p) dP, \quad (3.12)$$

- тензор энергии-импульса частиц сорта  $a$ , где

$$dP = \sqrt{-g} d^3 p / p^4 \quad (3.13)$$

- инвариантный элемент объема импульсного пространства. Сворачивая формулу (3.12) с помощью метрического тензора  $g_{ik}$ , вследствие соотношения нормировки 4-импульса:

$$(p, p) = m_a^2, \quad (3.14)$$

получим:

$$T_S^a(x) = m_a^2 \int_{P(x)} f_a(x, p) dP, \quad (3.15)$$

где  $T_S^a(x)$  - след тензора энергии-импульса частиц сорта  $a$ .

В работе [38] доказана теорема: *В ультрарелятивистском пределе при условии конформной инвариантности негравитационных макроскопических полевых уравнений и масштабной инвариантности матричных элементов взаимодействия кинетические уравнения конформно инвариантны.*

Сказанное означает буквально следующее:

- Рассмотрим две конформно соответствующие метрики в общей координатной системе:

$$ds^2 = \sigma^2 \tilde{s}^2. \quad (3.16)$$

- Предположим, что при таком преобразовании потенциалы скалярных и векторных полей преобразуются по правилу:

$$\Phi = \sigma \tilde{\Phi}; \quad A_i = \tilde{A}_i + \partial_i \varphi, \quad (3.17)$$

где  $\varphi(x)$  - скалярная функция, выбранная таким образом, чтобы при конформном преобразовании не изменялось калибровочное условие, налагаемое на векторный потенциал.

При этом контрвариантные компоненты кинематического импульса,  $p^i = \partial H / \partial P_i$ , [?] преобразуются по закону:

$$p^i = \frac{\tilde{p}^i}{\sigma^2}. \quad (3.18)$$

- Предположим, что при конформном преобразовании в ультрарелятивистском пределе, когда характерные масштабы системы меньше комптоновских размеров частиц, все полевые уравнения для негравитационных взаимодействий асимптотически конформно инвариантны<sup>7</sup> а с ними конформно инвариантны и инвариантные амплитуды рассеяния<sup>8</sup>:

$$|\tilde{M}(\tilde{p}, \tilde{q} | \tilde{p}', \tilde{q}')|^2 = |M(p, q | p', q')|^2 \quad (3.19)$$

- Тогда в ультрарелятивистском пределе интеграл парных столкновений в кинетических уравнениях преобразуется по закону:

$$I_{ab \leftrightarrow cd}(P_a) = \sigma^{-2} \tilde{I}_{ab \leftrightarrow cd}(\tilde{P}_a); \quad (3.20)$$

- При этом левая часть кинетических уравнений (3.9) с точностью до членов  $O(p^2/m^2)$  преобразуется по закону:

$$\mathcal{K}(x, P) = \sigma^{-2} \tilde{\mathcal{K}}(x, \tilde{P}), \quad (3.21)$$

где  $\mathcal{K}(x, P)$  - оператор в левой части кинетических уравнений.

- Таким образом, если  $f(x, \tilde{P})$  - решение кинетического уравнения в метрике  $\tilde{g}_{ij}$ , то в ультрарелятивистском пределе  $f(x, P)$  будет являться решением кинетического уравнения в конформно соответствующей метрике.

Воспользовавшись конформной инвариантностью кинетических уравнений и тем, что, во-первых, Вселенная Фрийдмана (1.1) является конформно-плоской с конформным множителем  $\sigma = a(\eta)$  при  $k = 0$ , и, во-вторых, что на ранних стадиях космологического расширения, когда  $\eta \rightarrow 0$ , метрика Фрийдмана асимптотически стремится к пространственно-плоской независимо от значения индекса кривизны трехмерного пространства,  $k$ . Поэтому согласно вышеприведенной теореме решение кинетических уравнений в метрике (1.1) будут совпадать с решениями соответствующих кинетических уравнений в плоском пространстве,  $f_a(\eta, P_a)$ , причем в соответствующих кинетических уравнениях необходимо произвести также замену кинематических инвариантов  $s, t$  на  $\tilde{s}, \tilde{t}$  по правилу:

$$s = \frac{1}{a^2(\eta)} \tilde{s}, \quad t = \frac{1}{a^2(\eta)} \tilde{t},$$

т.е.,  $\tilde{\sigma}_{tot} = \text{Const}$ . Но тогда и  $\tilde{\tau}_{eff} = \text{Const}$ , и мы приходим к известному результату стандартной кинетической теории: ЛТР восстанавливается в плазме при

$$\eta \geq \tilde{\tau}_{eff}.$$

Таким образом, строгие выводы релятивистской кинетической теории относительно восстановления ЛТР в ультрарелятивистской плазме находятся в полном соответствии с качественным выводом, приведенным в предыдущем разделе.

<sup>7</sup>Что соответствует ВКВ-приближению.

<sup>8</sup>Заметим, что конформная инвариантность амплитуд рассеяния в ультрарелятивистском пределе не является строгой, соотношение (3.19) на самом деле может быть подправлено медленно меняющимся логарифмическим фактором.

Отметим, что в ультрарелятивистском пределе макроскопические моменты (3.11), (3.12) и (3.15) функции распределения при конформном отображении (3.16)-(3.17) с конформным множителем  $\sigma = a(\eta)$  преобразуются по следующим асимптотическим законам:

$$n^i \simeq \frac{1}{a^4} \tilde{n}^i; \quad T^{ik} \simeq \frac{1}{a^6} \tilde{T}^{ik}; \quad T_S \simeq \frac{1}{a^4} \tilde{T}_S. \quad (3.22)$$

### 3.3. Универсальное асимптотическое сечение рассеяния

Будем в дальнейшем предполагать наличие скейлинга при энергиях выше унитарного предела  $s \rightarrow \infty$ . Возникает вопрос о значении константы в формуле (3.7) а также о логарифмическом уточнении этой константы. Это значение можно оценить из следующих простых соображений. Во-первых, пусть  $m$  - масса покоя сталкивающихся частиц. Поскольку  $\sqrt{s}$  - энергия взаимодействующих частиц в системе центра масс, то минимальное значение  $\sqrt{s}$  для четырехчастичных реакций с частицами массы  $m$  равно:

$$\sqrt{s_{\min}} = 2m \Rightarrow s_{\min} = 4m^2. \quad (3.23)$$

Далее, если верна идея объединения всех взаимодействий на планковских масштабах энергии  $E_{pl} = m_{pl} = 1$ , то при  $s \sim 1$  все четырехчастичные взаимодействия должны описываться единым сечением рассеяния, образованным из трех фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ , т.е., в выбранной нами системе единиц должно быть:

$$\sigma|_{s \sim 1} = 2\pi l_{pl}^2 \Rightarrow \sigma(4) = \frac{8\pi}{s_{pl}} \quad (= 2\pi), \quad (3.24)$$

где:

$$s_{pl} = 4m_{pl}^2 = 4 \quad (3.25)$$

- планковское значение кинематического инварианта  $s$ , соответствующее двум сталкивающимся планкеонам массой  $m_{pl}$  и комптоновского масштаба  $l_{pl}$ :

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (= 1), \quad l_{pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \quad (= 1). \quad (3.26)$$

Однако для того, чтобы на планковских масштабах энергии сечение рассеяния падало до такой величины, стартуя со значений порядка  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/3m_e^2$  ( $m_e$  - масса электрона,  $\sigma_T$  - томпсоновское сечение рассеяния) для электромагнитных взаимодействий, т.е., при  $s \sim 4m_e^2$ , оно должно падать обратно пропорционально  $s$ , т.е., опять-таки по закону скейлинга. Заметим, что этот факт является еще одним независимым доводом в пользу существования скейлинга в области высоких энергий. Логарифмически уточняя эту зависимость, введем *универсальное асимптотическое сечение рассеяния* (UACS), впервые предложенного в работах [32], [33]:

$$\sigma_0(s) = \frac{8\pi}{s\Lambda(s)}, \quad (3.27)$$

где  $\Lambda(s)$  - логарифмический фактор:

$$\Lambda(s) = \ln^2 \left( 1 + \frac{s_0}{s} \right) > 0, \quad (3.28)$$

являющийся монотонно убывающей функцией кинематического инварианта  $s$ , а  $s_0 = 4$  - квадрат полной энергии двух сталкивающихся планковских масс, так что на планковских масштабах энергии:

$$\Lambda(s_0) \simeq 1, \quad (3.29)$$

- при этом на комптоновских масштабах энергии, т.е., при  $s = 4m_e^2$ :

$$\frac{1}{\Lambda(m_e^2)} \approx \left( \frac{1}{102} \right)^2 \simeq \alpha^2 \approx \left( \frac{1}{137} \right)^2, \quad (3.30)$$

где  $m_e$  - масса покоя электрона,  $\alpha = 1/137$  - постоянная тонкой структуры. Заметим, что числовой коэффициент введенного здесь универсального сечения рассеяния,  $8\pi$ , ровно в 4 раза больше аналогичного коэффициента в уже цитированных работах [32], [33]:

$$\sigma_0(s) = \frac{2\pi}{s(1 + \ln^2 s_0/s)}.$$

Причиной такого пересмотра величины сечения рассеяния заключается, во-первых, в том, что в цитированных работах не была учтена точная связь кинематического инварианта  $s$  с полной энергией сталкивающихся частиц в системе центра масс,  $\varepsilon_0$ , [25]:

$$s = 4\varepsilon_0^2.$$

Именно этот фактор, 4, и не был учтен в цитированных работах. Дополнительные причины пересмотра значения этого коэффициента рассмотрены в разделе 3.5. Во-вторых, в данной работе мы несколько подправили логарифмический фактор,  $\Lambda(s)$ , поскольку логарифмический фактор, введенный в работах [32], [33], имел минимум при планковской энергии сталкивающихся частиц, а при дальнейшем росте энергии возрастал, что не имеет разумного обоснования. Заметим, что уточнение формулы универсального сечения, сделанное в данной статье, не изменяет сколь-нибудь существенно результатов предыдущих статей, посвященных неравновесной космологической модели при наличии скейлинга, а лишь несколько уточняет некоторые детали процесса восстановления равновесия.

Соотношение (3.30) позволяет рассматривать величину:

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda(s)}} \simeq \alpha \quad (3.31)$$

как логарифмически медленно меняющуюся эффективную константу взаимодействия.

Введенное формулой (3.27), сечение рассеяния  $\sigma_0$ , UACS, обладает рядом замечательных свойств:

1. UACS образовано лишь из фундаментальных констант  $G, \hbar, c$ ;
2. UACS ведет себя так, что его значения лежат строго посередине между возможными крайними пределами асимптотического поведения сечения (3.3), установленных с помощью асимптотической теории  $S$ -матрицы;
3. UACS с логарифмической точностью является скейлинговым сечением рассеяния;
4. Для реакции рассеяния фотона на нерелятивистском электроном ( $E = 2m_e$ ) формула (3.27) дает  $\sigma_0 = 1,356\sigma_T \sim \sigma_T$  (томпсоновское сечение рассеяния);
5. Для электрослабых взаимодействий ( $E = 2m_W$ , где  $m_W$  - масса промежуточного  $W$ -бозона) при  $\sin \theta_W = 0,22$  (см., например, [?]) получим из (3.27)  $\sigma_0 = 0,586\sigma_W$ , где  $\sigma_W = G_F^2 m_W^2 / \pi$  - сечение  $\nu e$  - рассеяния с учетом промежуточного  $W$ -бозона;
6. При планковских значениях энергии  $\sigma_0(4m_{pl}^2) \approx \sigma_{pl}$ .

Эти замечательные качества UACS и удивительное совпадение его значений с сечениями известных процессов на огромном диапазоне значений энергии (от  $m_e$  до  $10^{22}m_e$ ) вряд-ли могут быть случайными, что позволяет нам в дальнейшем применять UACS в качестве надежной формулы для асимптотического значения сечений рассеяния для всех взаимодействий.

Отметим также следующие полезные соотношения, следующие из сравнения определения полного сечения рассеяния (2.23) с формулой для асимптотического сечения рассеяния (3.27) а асимптотическими ограничениями на инвариантные амплитуды рассеяния (3.3), (3.4):

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \frac{128\pi^2}{\Lambda(s)}, \quad (3.32)$$

где

$$\overline{|F_0(s)|^2} = \int_0^1 |F_0(s, x)|^2 dx \quad (3.33)$$



- среднее значение асимптотической амплитуды рассеяния, соответствующей универсальному асимптотическому сечению рассеяния (3.27), так что:

$$\sigma_0(s) = \frac{1}{16\pi s} \int_0^1 |F_0(s, x)|^2 dx, \quad (3.34)$$

причем справедливо неравенство:

$$|F_0(s)| \leq |F(s, 0)|; \quad (3.35)$$

Заметим, что введение логарифмического фактора в выражение для асимптотического сечения рассеяния (3.27) эквивалентно слабому (логарифмическому) нарушению точной конформной инвариантности амплитуд рассеяния в ультрарелятивистском пределе (3.19) (см. замечание 8 на стр. 92):

$$\Lambda(\tilde{s}) \overline{|F(\tilde{s}, \tilde{t})|^2} \approx \Lambda(s) |F(s, t)|^2 \quad (3.36)$$

### 3.4. Возможное влияние резонансов

Заметим, что совпадение крупномасштабного поведения сечений взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий с UACS не означает, что такое же совпадение сохранится и на мелких масштабах энергий. Локальные отклонения сечений от UACS обязательно будут иметь место, например, в виде так называемых резонансов (см. раздел 3.5).

Однако, влияние таких резонансов на общую эволюцию космологической плазмы будет исчезать по мере повышения энергии частиц [34]. Действительно, массы промежуточных частиц, создающих резонанс, порядка энергии резонанса, которая, в свою очередь, равна кинетической энергии взаимодействующих частиц:

$$M \sim E \approx \sqrt{s}.$$

Поэтому с увеличением кинематического инварианта  $s$  растут и массы промежуточных частиц, определяющих резонансы. Но, как известно, между полушириной резонанса и массой промежуточной частицы имеется соотношение<sup>9</sup>:

$$\Gamma \sim M^{-1}.$$

Поэтому с ростом энергии резонансы становятся все более узкими:

$$\Gamma \sim \frac{1}{\sqrt{s}},$$

так что их вклад в кинетику установления ЛТР становится все более слабым.

### 3.5. Сравнение асимптотического сечения рассеяния с сечениями рассеяния электромагнитных взаимодействий

В качестве конкретных примеров сравнения реальных сечений рассеяния частиц с асимптотическим сечением рассеяния рассмотрим строгие выражения для сечений четырехчастичных электромагнитных взаимодействий: двухфотонной аннигиляции (??), электронно-позитронной пары в результате столкновения двух фотонов и сечение комптоновского рассеяния в системе центра масс (см. [23, 25]), усредненные по поляризациям конечных состояний:

$$\sigma_{ee+\rightarrow\gamma\gamma} = \frac{\pi\alpha^2}{4p^2} \left[ (3 - \beta^4) \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2\beta(2 - \beta^2) \right], \quad (3.37)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow ee+} = \frac{\pi\alpha^2}{2\omega_0^2} \left[ \left( 2 + \frac{2m^2}{\omega_0^2} - \frac{m^4}{\omega_0^4} \right) \ln \left( \frac{\omega_0}{m} + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{m^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega_0^2}} \left( 1 + \frac{m^2}{\omega_0^2} \right) \right], \quad (3.38)$$

где  $\beta = p/E$ , а  $p$  и  $E$  - импульс и энергия электрона,  $\omega_0$  - энергия фотонов в системе центра масс:

$$\omega_0 = E = \frac{1}{2}\sqrt{s}; \quad p = \sqrt{E^2 - m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m^2}. \quad (3.39)$$

<sup>9</sup>Это соотношение следует из соотношения неопределенности Гейзенберга.

В ультрарелятивистском пределе эти сечения совпадают:

$$\sigma_{ee+\rightarrow\gamma\gamma} = \sigma_{\gamma\gamma\rightarrow ee+} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \ln \frac{s}{m^2} - 1 \right), \quad (s \rightarrow \infty). \quad (3.40)$$

Рассмотрим теперь сечение комптоновского рассеяния (см., например, [23]):

$$\sigma_{e\gamma\rightarrow e\gamma} = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left[ \frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right] + \frac{\ln(1+2\gamma)}{2\gamma} - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\}, \quad (3.41)$$

где  $r_0 = \alpha/m$  - классический радиус электрона, а относительная энергия фотона в системе покоя электрона,  $\gamma$ , в терминах кинематических инвариантов равна:

$$\gamma = \frac{s - m^2}{2m^2}. \quad (3.42)$$

В ультрарелятивистском пределе сечение (3.41) имеет асимптотику:

$$\sigma_{e\gamma\rightarrow e\gamma} = \frac{2\pi\alpha^2}{s} \left( \ln \frac{s}{m^2} + \frac{1}{2} \right), \quad (s \rightarrow \infty). \quad (3.43)$$

Таким образом, в крайнем ультрарелятивистском пределе имеет место соотношение:

$$\sigma_{\gamma\gamma\rightarrow ee+} \approx \sigma_{e\gamma\rightarrow e\gamma} \approx \sigma_{ee+\rightarrow\gamma\gamma}. \quad (3.44)$$

В [2] показано, что все указанные сечения имеют явно скейлинговое поведение в области  $s \gg m^2$ , т.е., с логарифмической точностью значение  $s\sigma(s) \approx \text{Const}$ . Значительные отклонения от скейлингового поведения возникают лишь в области низких энергий  $\varepsilon \sim m_e$ , т.е., в области порядка и ниже унитарного предела для электромагнитных взаимодействий.

Таким образом, подводя итоги этого раздела, можно сделать следующие выводы:

- Существование ЛТР на ранних стадиях эволюции Вселенной определяется зависимостью сечений взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий от кинематического инварианта,  $s$ , - энергии взаимодействующих частиц в системе центра масс;
- В случае ультрарелятивистского уравнения состояния космологической плазмы и степенной зависимости сечения взаимодействия от кинематического  $\sigma \sim s^\alpha$  ЛТР отсутствует на ранних стадиях расширения Вселенной при  $\alpha < -1/2$ ;
- Квантовая теория поля предсказывает восстановление скейлинга взаимодействий при сверхвысоких энергиях частиц вследствие конформной инвариантности в ультрарелятивистском пределе фундаментальных полевых уравнений. При этом сечения взаимодействий элементарных частиц в области сверхвысоких энергий обратно пропорциональны кинематическому инварианту  $s$ ;
- В условиях скейлинга взаимодействий ЛТР должно нарушаться в ранней Вселенной и восстанавливаться на поздних;
- Поскольку ЛТР отсутствует на ранних стадиях Вселенной, первоначальное распределение частиц может быть произвольным и значительно отличаться от равновесного;
- Поскольку взаимодействия всех частиц при сверхвысоких энергиях унифицируются, взаимодействия всех частиц в этой области можно качественно правильно описать с помощью универсального асимптотического сечения рассеяния, UACS, имеющего скейлинговый характер.

### Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
2. Игнат'ев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиантъ, 2010. 508 с.
3. Игнат'ев Ю.Г. Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц, Известия Вузов, Физика. 1983. Т. 26. № 12. С. 9-14.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М: Наука, 1964. 566 с.
5. Сахаров А.Д. Нарушение CP-инвариантности, C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 5. С. 32–33.
6. Кузьмин В.А. CP-неинвариантность и барионная асимметрия Вселенной // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 335 – 337.
7. Ignat'ev A.Yu., Krasnikov N.V., Kusmin V.A., Tavhelidze A.N. Baryon Production in the symmetrical Universe // Phys. Lett. 1976. vol. 76B. pp. 436 – 439.
8. Yoshimura H. Unified Gauge Theories and the Baryon Number of the Universe // Phys. Rev. Lett., 1978, vol. 41, pp. 281-284.
9. Weinberg S. Cosmological Production of Baryons // Phys. Rev. Lett. 1979. vol. 42. pp. 850 – 853.
10. Weinberg S. Beyond the first Three Minuts // Physics Scripta. 1981. vol. 2. pp. 773 – 791.
11. Fry J.M. , Olive K.A., Turner M.S. Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of gauge bosons. // Phys. Rev.D. 1980. vol. 22. pp. 2953 – 2976.
12. Fry J.M. , Olive K.A., Turner M.S. Evolution of cosmological baryon asymmetries. I. The role of Higgs bosons. // Phys. Rev.D. 1980. vol. 22. pp. 2953 – 2976.
13. Fry J.M. , Olive K.A., Turner M.S. Hierarchy of cosmological Baryon Generation // Phys. Rev. Lett. 1980. vol. 45. pp. 2074 – 2077.
14. Игнат'ев Ю.Г. Релятивистская кинетика бариогенезиса в горячей Вселенной // Астроном. ж. 1985. Т. 62. С. 633 – 638.
15. Игнат'ев Ю.Г. Кинетическая модель бариогенезиса в симметричной горячей Вселенной // В сб. «Классические и квантостатистические проблемы релятивистской теории гравитации». 1991. Казань: Изд-во КГПИ. С. 6 – 21.
16. Ignatyev Yu.G., Alsmadi K. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. I. Exact model. // Gravitation & Cosmology. 2005. vol. 11. No 3. pp. 252-258.
17. Ignatyev Yu.G., Alsmadi K. A complete relativistic kinetic model of symmetry violation in isotropic expanding plasma. II. Numerical model. // Gravitation & Cosmology. 2005. vol. 11. No 4. pp. 363-368.
18. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М: Наука, 1975. 736 с.
19. Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D. Relativistic Astrophysics, 2: The Structure and Evolution of the Universe. USA: University Of Chicago Press Date Published, 1983, 732 p.
20. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б. Космология и элементарные частицы // Успехи физических наук. 1980. Т. 130. С. 559-614.
21. Игнат'ев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. 1988. Казань: Изд-во КГПИ. С. 62 – 84.
22. Смирнов В.А. Горизонт событий и столкновение частиц в ранней Вселенной // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. 1988. Казань: Изд-во КГПИ. С. 59 – 62.
23. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. Москва: Наука, 1969. 624 с.
24. Беляев С.Г., Будкер Г.И. Релятивистское кинетическое уравнение // Доклады АН СССР. 1956. Т. 107. С. 807 – 810.
25. Пилькун Х. Физика релятивистских частиц. 1983. Москва: Мир. 544 с.; Pilkuhn H.M. Relativistic Particle Physics. 1979. New-York: Springer-Verlag. 544 p.
26. Журавлев В.М. Двухкомпонентные космологические модели с переменным уравнением состояния вещества и тепловым равновесием компонент // ЖЭТФ. - 2001. - т. 120. - No 5. - с. 1043-1061.
27. Zhuravlev V. M. and Abbyazov R. R. Thermodynamics of Cosmological Models with a Variable Matter Equation of State // Grav. and Cosmol. – 2010. – Vol.16. – No 1. – с. 55-60.

28. Игнат'ев Ю.Г., Мифтахов Р.Ф. Математическое моделирование космологической эволюции вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием частиц в СКМ Mathematica // Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» и Российского семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации». – Казань: Изд-во «Фолиант». 2010. – 216 с.
29. Ignatyev Yu.G. and Miftakhov R.F. Cosmological evolutions of a completely degenerate fermi system with scalar interactions between particles // Gravitation and Cosmology. 2011, vol. 17, No. 2, pp. 190-193.
30. L.V.Okun L.B., Ja.V.Zeldovich, *Comments on Nucl. and Part. Physics* **6**, 69 (1976).
31. Ландау Л.Д. О «радиусе» элементарных частиц // ЖЭТФ. 1940. Т. 10. С. 718 – 720.
32. Игнат'ев Ю.Г. Нарушение термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Тезисы докл. Всесоюз. конф. «Соврем. теорет. и exper. проблемы теории относительности и гравитации». 1984. Москва: Изд-во МГПУ. с. 19 – 21.
33. Игнат'ев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Известия ВУЗов, Физика. 1986. Т. 29. No 2. С. 27 – 32.
34. Шуликовский В.Ю. Влияние процессов множественного рождения частиц на эволюцию неравновесной Вселенной // В сб. «Классические и квантостатистические проблемы релятивистской теории гравитации». 1991. Казань: Изд-во КГПИ. С. 39 – 45.
35. Eden R.I. High Energy Collisions of Elementary Particles. 1967. USA: Cambridge At the University Press. 424 p.
36. Bjorken J.D., Paschos E.A. Inelastic Electron-Proto and - Proton Scattering and the structure of the Nucleon // Phys. Rev. 1969. vol. 185. pp. 1975 – 1982.
37. Feynman R.P. Very high-energy collisions of hadrons // Phys. Rev. Lett. 1969. vol. 23. pp. 1415 – 1419.
38. Игнат'ев Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория и конформные преобразования // Известия ВУЗов, Физика. 1982. Т. 25. No 4. С. 92 – 96.

Поступила в редакцию 10.12.2012

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.  
E-mail: ignat'ev\_yu@rambler.ru

*Yu. G. Ignat'ev*

#### **Nonequilibrium Kinetics Universe Models. I. Local Thermodynamics Conditions**

*Keywords:* Early Universe, Local Thermodynamic Equilibrium, Relativistic Kinetics, Scaling, Cosmic Rays.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cy, 96.50.S 52.27.Ny

Nonequilibrium cosmological scenarios in the restoration assumption scaling interactions of particles in the field of ultrahigh energies are considered. The analysis of conditions of thermodynamic balance at various stages of evolution of the Universe, including, and on the inflationary is carried out.

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.  
E-mail: ignat'ev\_yu@rambler.ru