УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

НЕРАВНОВЕСНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ II. МОДЕЛЬ ЭНЕРГОБАЛАНСА

Рассмотрены неравновесные космологические сценарии в предположении восстановления скейлинга взаимодействий частиц в области сверхвысоких энергий. Строится модель энергобаланса и обсуждаются условия ее применимости. Рассматривается влияние инфляционных стадий расширения Вселенной на процесс установления термодинамического равновесия.

Ключевые слова: ранняя Вселенная, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скейлинг, космические лучи, позднее ускорение.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Кинетические уравнения для сверхтепловых частиц

1.1. Упрощение релятивистского интеграла столкновений

Рассмотрим однородные изотропные распределения частиц в метрике Фридмана (1.1)[2]:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2) = dt^2 - a^2(t)dl^2, \tag{1.1}$$

$$f_a(x^i, p^k) = f_a(t, p), \tag{1.2}$$

где:

$$p^2 = -g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta, \quad (\alpha, \beta = \overline{1..3}) \tag{1.3}$$

– квадрат физического импульса. Релятивистские кинетические уравнения [1](3.9) относительно однородных изотропных распределений (1.2) принимают вид (подробности см. в [2], [3], [4]):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}p\frac{\partial f_a}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{m_a^2 + p^2}}\sum_{b,c,d} J_{ab\leftrightarrows cd}(t, p), \tag{1.4}$$

где $a(t)$ – масштабный фактор метрики Фридмана (1.1), $J_{ab\leftrightarrows cd}(t, p)$ – интеграл четырехчастичных реакций [5], [6]:

$$\begin{aligned} J_{ab}(t, p) &= (2\pi)^4 \int d\pi_b d\pi_c d\pi_d \delta^{(4)}(P_a + P_b - P_c - P_d) \\ &\times [(1 \pm f_a)(1 \pm f_b)|f_c f_d \overline{|M_{cd\to ab}|^2} - (1 \pm f_c)(1 \pm f_d) f_a f_b \overline{|M_{ab\to cd}|^2}], \end{aligned} \tag{1.5}$$

знаки $\pm$ соответствуют бозонам $(+)$ и фермионам $(-)$, $M_{i\to f}$ – инвариантные амплитуды рассеяния (черта означает усреднение по состояниям поляризации частиц), $d\pi_a$ – нормированный элемент объема импульсного пространства a-той частицы:

$$d\pi_a = \sqrt{-g}\frac{\rho_a dp^1 dp^2 dp^3}{(2\pi)^3 p_4}, \tag{1.6}$$

ρ_a – фактор вырождения.

---

[1]E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2]Подробности см. в предыдущей статье Автора [1]. Автор приносит извинения Читателю за ряд неточностей, допущенных при подготовке предыдущей статьи и связанных с отсутствием ссылок на некоторые источники. На стр. 91 3-я строка в подразделе 3.2. опущенную ссылку следует читать: Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения для неупруго взаимодействующих частиц в гравитационном поле // Известия ВУЗов, Физика. 1983. Т. 26. №.8. с. 19–23; на стр. 92, 8 строка сверху ссылку следует читать: Игнатьев Ю. Г. Релятивистский канонический формализм и инвариантная одночастичная функция распределения // Известия ВУЗов, Физика. 1983. Т. 26. №.8. с. 15–19; на стр. 94, 12 строка снизу ссылку следует читать: Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. М: Наука. 1981. – 304 с.

Упростим интеграл четырехчастичных взаимодействий (1.6), используя свойства изотропии распределений $f_a(t,p)$. Для выполнения двух внутренних интегрирований по импульсным переменным перейдем в локальную систему центра масс, в которой интегрирование проводится элементарно. После обратного преобразования Лоренца и перехода к сферической системе координат в импульсном пространстве найдем ([7]):

$$J_{ab}(p) - \frac{2S_b+1}{(2\pi)^3 p}\int\limits_0^\infty \frac{qdq}{\sqrt{m_b^2+q^2}}\int\limits_{s_-}^{s_+}\frac{ds}{1+\left(\frac{m_a^2-m_b^2}{s}\right)^2}\cdot\frac{1}{16\pi\lambda}\int\limits_{-\lambda^2/s}^{0} dt\overline{|M(s,t)|^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,\times$$

$$\{f_a(p_4)f_b(q_4)[1\pm f_c(p_4-\Delta)][1\pm f_d(q_4+\Delta)] - f_c(p_4-\Delta)f_d(q_4+\Delta)[1\pm f_a(p_4)][1\pm f_b(q_4)]\},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta \;&=\; -\frac{ts}{\lambda^2}\left[p_4-q_4-(p_4+q_4)\frac{m_a^2-m_b^2}{s}\right]-\cos\varphi\sqrt{-\frac{ts}{\lambda^2}\left(1+\frac{ts}{\lambda^2}\right)}\\ &\times\;\left[4p_4q_4\left(1-\frac{m_a^2+m_b^2}{s}\right)-\frac{\lambda^2+4m_b^2p_4^2+4m_a^2q_4^2}{s}\right]^{1/2},\end{aligned}$$

$\lambda(x,y,z)$ – функция треугольника (2.16); s,t - кинематические инварианты [1] (2.12), (2.13); p_4,q_4 – реперные компоненты 4-импульса;

$$s_\pm = m_a^2+m_b^2+2(p_4q_4\pm pq).$$

При этом необходимо иметь ввиду определение полного сечения взаимодействия [1] (2.15).

В ультрарелятивистском пределе:

$$\frac{p_i}{m_i}\to\infty\Rightarrow\frac{s}{m_i^2}\to\infty;\quad \lambda\to s^2, \tag{1.7}$$

вышеприведенные выражения значительно упрощаются, и интеграл столкновений принимает вид:

$$J_{ab}(p) = -\frac{2S_b+1}{(2\pi)^3 p}\int\limits_0^\infty dq\int\limits_0^{4pq}\frac{ds}{16\pi}\int\limits_0^1 dx|F(x,s)|^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\times \tag{1.8}$$

$$\{f_a(p)f_b(q)[1\pm f_c(p-\Delta)][1\pm f_d(q+\Delta)] - f_c(p-\Delta)f_d(q+\Delta)[1\pm f_a(p)][1\pm f_b(q)]\}, \tag{1.9}$$

где $x=-t/s$ безразмерная переменная [1] (2.22),

$$|F(t,s)|^2 = \overline{|M(t,s)|^2} \tag{1.10}$$

и

$$\Delta = x(p-q)-\cos\varphi\sqrt{x(1-x)(4pq-s)}. \tag{1.11}$$

1.2. Релятивистские кинетические уравнения в терминах конформно соответствующего пространства

Учитывая тот факт, что переменная:

$$\tilde p = a(t)p, \tag{1.12}$$

является интегралом движения в метрике Фридмана (см. [2]) и при этом для любой функции $\Psi(t,p)$ имеет место соотношение:

$$\frac{\partial\Psi(t,p)}{\partial t}-\frac{\dot a}{a}p\frac{\partial\Psi(t,p)}{\partial p} = \frac{\partial\Psi(t,\tilde p)}{\partial t}, \tag{1.13}$$

преобразуем кинетические уравнения для однородных изотропных распределений к виду:

$$\frac{\partial f_a}{\partial\eta} = \frac{a}{\sqrt{m_a^2+p^2}}\sum_{b,c,d}J_{ab\leftrightarrows cd}(\eta,p), \tag{1.14}$$

куда необходимо подставить $p=\tilde p/a$.

Заметим, что с другой стороны переход к переменной (1.12), $\tilde{p}$, фактически является конформным преобразованием (см. [4])

$$\bar{P}_i = P_i - \partial_i\varphi; \qquad \bar{A}_i = A_i + \partial_i\varphi. \tag{1.15}$$

к однородному статическому пространству

$$ds^2 = d\eta^2 - dl^2$$

(см. (1.1), (1.2)), при котором физическая компонента импульса, p, (1.3) преобразуется по закону:

$$p = \frac{\tilde{p}}{a}. \tag{1.16}$$

Таким образом, импульсная переменная (1.12), $\tilde{p}$, есть абсолютная величина физического импульса в конформно соответствующем статическом пространстве постоянной кривизны, а η – временная переменная в этом пространстве.

Плотности частиц, $n(\eta)$, и их энергии, $\varepsilon(\eta)$, относительно изотропного распределения частиц, $f(\eta,p)$ определяются формулами (см. формулы [1] (3.11) и [1] (3.12)):

$$\begin{aligned} n(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty p^2 f(\eta,p)dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3}\int\limits_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta,\tilde{p})d\tilde{p}; && (1.17)\\ \varepsilon(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \sqrt{m^2+p^2}p^2 f(\eta,p)dp = \frac{\rho}{2\pi^2 a^3}\int\limits_0^\infty \tilde{p}^2\sqrt{m^2+\tilde{p}^2/a^2}f(\eta,\tilde{p})d\tilde{p}. && (1.18)\end{aligned}$$

В связи с этим удобно ввести конформные плотности числа частиц, $\tilde{n}(\eta)$, а для ультрарелятивистских частиц – и плотности их энергии, $\tilde{\varepsilon}(\eta)$:

$$\begin{aligned} \tilde{n}(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \tilde{p}^2 f(\eta,\tilde{p})d\tilde{p}; && (1.19)\\ \tilde{\varepsilon}(\eta) &= \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \sqrt{m^2+p^2}p^2 f(\eta,p)dp \approx \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \tilde{p}^3 f(\eta,\tilde{p})d\tilde{p}. && (1.20)\end{aligned}$$

Тогда имеют место два соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{n}(\eta) &= n(\eta)a^3(\eta); && (1.21)\\ \tilde{\varepsilon}(\eta) &\approx \varepsilon(\eta)a^4(\eta); \qquad (p/m\to\infty), && (1.22)\end{aligned}$$

из которых первое выполняется строго, а второе, – асимптотически, в ультрарелятивистском пределе.

1.3. Интеграл столкновений для слабого отклонения распределений от равновесия

Исследуем сначала слабое нарушение термодинамического равновесия в горячей модели, когда основная часть частиц, $n_0(t)$, находится в состоянии теплового равновесия, и лишь для небольшой доли частиц, $n_1(t)$ тепловое равновесие нарушено:

$$n_1(t) \ll n_0(t). \tag{1.23}$$

В дальнейшем будем полагать, что функции распределения мало отличаются от равновесных в области малых значений энергии, меньших некоторого унитарного предела[3], $p=p_0$ (или $T=T_0$), ниже которого отсутствует скейлинг, и может сильно нарушаться при энергиях, выше унитарного предела:

$$f_a(p) \approx \begin{cases} f_a^0 = \dfrac{1}{\exp(\frac{-\mu_a+E_a(p)}{T})\pm 1}, & p<p_0;\\ \Delta f_a(p); \quad f_a^0(p) \ll \Delta f_a(p) \ll 1, & p>p_0. \end{cases} \tag{1.24}$$

[3] см. предыдущую статью [1].

где $\mu_a(t)$ – химические потенциалы, $T(t)$ – температура равновесной компоненты плазмы. Таким образом, в области $p > p_0$ может наблюдаться аномально большое число частиц по сравнению с равновесным значением, но при этом малое (см. (1.23)) по сравнению с полным числом равновесных частиц.

Исследуем процесс релаксации распределения $f_a(p)$ к равновесному $f_a^0(p)$. Задача в такой постановке для частного случая первоначального распределения $f(t=0,p)$ решалась ранее в [8], [9]. В работах [10, 11] дано общее решение этой задачи. Как показано в этих работах, космологическую плазму формально можно рассматривать как двухкомпонентную систему: 1). равновесную компоненту с распределением $f_a^0(t,p)$, и 2). неравновесную, *сверхтепловую*, компоненту с распределением $\Delta f_a(t,p)$, причем число частиц в неравновесной компоненте мало, но плотность ее энергии, вообще говоря, произвольна. Следует отметить, что в неравновесной компоненте импульсы всех частиц лежат выше унитарного предела, – как только импульс частиц становится ниже унитарного предела, эта частица вследствие сильно возросшего сечения взаимодействия должна немедленно термализоваться и, таким образом, перейти в равновесную компоненту, передавая ей свою энергию. Заметим, что физический процесс установления равновесия в космологической плазме более адекватно описывают конформные плотности числа частиц, $\tilde{n}$, и энергии $\tilde{\varepsilon}$, (1.19), (1.20), чем соответствующие им обычные скалярные плотности, так как *конформные плотности пропорциональны полному числу частиц и полной энергии*[4] сопутствующего элемента объема.

Исследуем интеграл столкновений (1.9) в области

$$p \geq p_0 \gg T. \tag{1.25}$$

Вследствие неравенства (1.24) в этой области можно пренебречь столкновениями сверхтепловых частиц между собой, ограничиваясь учетом рассеяния сверхтепловых частиц на равновесных. Поэтому в интеграле столкновений значение одного из импульсов, $P' = p - \Delta$, либо $q' = q + \Delta$ должно лежать в тепловой области, второго – в сверхтепловой, за унитарным пределом. Вне этой области подинтегральное значение интеграла столкновений чрезвычайно мало. Вследствие этого обстоятельства вторым членом в фигурных скобках (1.9) можно пренебречь, так как он может конкурировать с первым в асимптотически малых областях изменения переменных x и φ: $x(1-x) \lesssim T/p \to 0$. Статистические факторы вида $[1 \pm f_a(p')]$ в первом члене интеграла (1.9) могут заметно отличаться от единицы опять-таки лишь в области тепловых значений импульсов. В результате в исследуемой нами области значений импульсов интеграл столкновений (1.9) можно записать в виде:

$$J_{ab\leftrightarrow cd}(p)|_{p\geq p_0} = \frac{(2S_b+1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int\limits_0^\infty \frac{q f_b^0(q)dq}{\sqrt{m_b^2+q^2}} \int\limits_{2p(q^4-q)}^{2p(q^4+q)} \frac{ds}{16\pi} \int\limits_0^1 dx|F(x,s)|^2. \tag{1.26}$$

Используя здесь определение полного сечения рассеяния [1] (2.23), получим из (1.26):

$$J_{ab\leftrightarrow cd}(p)|_{p\geq p_0} = \frac{(2S_b+1)\Delta f_a(p)}{(2\pi)^3 p} \int\limits_0^\infty \frac{q f_b^0(q)dq}{\sqrt{m_b^2+q^2}} \int\limits_{2p(q^4-q)}^{2p(q^4+q)} \sigma_{tot} s(s) ds. \tag{1.27}$$

Подставляя, наконец, во внутренний интеграл выражение для σ_{tot} в форме UACS, [1] (3.27) – (3.28), проводя интегрирование с логарифмической точностью и суммируя полученное выражение по всем каналам реакций, найдем окончательно:

$$J_a(p)|_{p\geq p_0} = -\frac{4}{\pi}\Delta f_a(p)\sum_b (2S_b+1)\nu_{ab} \int\limits_0^\infty \frac{q^2 f_b^0(q)}{\sqrt{m_b^2+q^2}} \frac{dq}{\Lambda(\bar{s})}, \tag{1.28}$$

где

$$\bar{s} = \frac{1}{2}pq,$$

ν_{ab} – число каналов реакций, в которых может участвовать частица сорта a.

Вычислим значения интеграла (1.28) в предельных случаях.

[4] для ультрарелятивистской плазмы

1.4. Рассеяние на нерелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта b нерелятивистские, т.е., $q \ll m_b$, то интеграл (1.28) сводится к выражению:

$$J_a(p)|_{p\geq p_0} = -32\pi^2 \Delta f_a(p) \sum_b \frac{n_b^0(t)}{m_b} \frac{\nu_{ab}}{1+\ln^2 pm_b/2}, \quad (m_b > T). \tag{1.29}$$

1.5. Рассеяние на ультрарелятивистских частицах

Если равновесные частицы сорта b являются ультрарелятивистскими, т.е., $m_b \ll T$, причем их химический потенциал мал, – $\mu_b \ll T$, то вычисляя интеграл (1.28) относительно равновесного распределения (1.24), найдем:

$$J_a(p)|_{p\geq p_0} = -\frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{N}T^2(t)}{1+\ln^2 Tp/2} \Delta f_a(p), \quad (m_b \ll T,\ \mu_b \ll T), \tag{1.30}$$

где

$$\tilde{N} = \frac{1}{2}\left[\sum_B (2S+1) + \frac{1}{2}\sum_F (2S+1)\right] = N_B + \frac{1}{2}N_F;$$

N_B – число сортов равновесных бозонов, F – фермионов.

Чтобы оценить вклады в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских частиц в равновесной компоненте, вычислим сначала их концентрации. Концентрация ультрарелятивистских частиц в горячей модели получается из выражения (1.24) для функции распределения равновесной компоненты подстановкой

$$E(p) = p; \quad \mu_a = 0 \tag{1.31}$$

в формулу для определения плотности числа частиц (см. [4]):

$$n_a(t) = \frac{2S_a+1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty f_a(t,p)p^2 dp. \tag{1.32}$$

Таким образом найдем (см. [1] (1.34)):

$$n_a(t) = \frac{(2S_a+1)T^3}{\pi^2} g_n \zeta(3), \tag{1.33}$$

где g_n определяется соотношениями (1.37). Концентрация нерелятивистских равновесных частиц *при условии сохранения их числа* изменяется пропорционально $a^{-3}(t)$. Поэтому в условиях слабого нарушения равновесия отношение плотности нерелятивистских частиц к плотности реликтовых фотонов примерно постоянно (так как $T \sim a(t)^{-1}$:

$$\frac{n_0(t)}{n_\gamma(t)} \approx \mathrm{Const} = \delta \sim 10^{-10} \div 10^{-9}. \tag{1.34}$$

Вычисляя отношение вкладов в интеграл столкновений нерелятивистских и ультрарелятивистских равновесных частиц, получим:

$$J_{non}/J_{ultra} \sim \frac{24\pi n_b^0}{m_b T^2} = \zeta(3)\delta \frac{64T(t)}{\pi m_b} \sim 10^{-9}\frac{T}{m_b}, \tag{1.35}$$

– отношение вкладов мало при $T \ll 10^9 m_b$ и уменьшается со временем. Поэтому в дальнейшем вкладом нерелятивистских частиц в интеграл столкновений будем пренебрегать.

2. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах

2.1. Релаксация сверхтепловых частиц на ультрарелятивистской стадии Вселенной

Подставляя полученное выражение (1.30) для интеграла столкновений в кинетические уравнения (1.14), получим кинетическое уравнение, описывающее эволюцию ультрарелятивистской сверхтепловой компоненты в равновесной космологической плазме:

$$\frac{\tilde{p}}{a}\frac{\partial \Delta f_a}{\partial t} = -\frac{4\pi\tilde{N}}{3}\frac{T^2(t)}{\Lambda(\tilde{p}T/2a)}\Delta f_a. \tag{2.1}$$

Кинетическое уравнение (2.1) легко интегрируется в квадратурах. Для удобства в дальнейшем несколько уточним нормировку переменной $\tilde{p}$. При этом возникает необходимость соотнесения величин, используемых в неравновесной модели, с соответствующими величинами стандартного космологического сценария, поскольку все наблюдаемые космологические параметры интерпретированы уже в терминах SCS. При этом мы должны иметь перед глазами две *синхронные* модели Вселенной: реальную – неравновесную модель $\mathcal{M}$ с макроскопическими параметрами $P(t)$ и идеальную – равновесную модель $\mathcal{M}_0$, имеющую на данный момент времени t некоторые макроскопические параметры $P_0(t)$.

Рассмотрим Вселенную с ультрарелятивистским уравнением состояния (показатель баротропы $\rho = 1/3$)[5]:

$$\varepsilon = 3p. \tag{2.2}$$

Тогда согласно уравнениям Эйнштейна плотность энергии Вселенной на ультрарелятивистской стадии расширения изменяется по закону:

$$\varepsilon a^4 = \mathrm{Const}; \qquad \varepsilon = \frac{1}{32\pi t^2}, \tag{2.3}$$

а масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{1/2}. \tag{2.4}$$

С другой стороны, плотность энергии равновесной плазмы определяется через ее температуру соотношением [1] (1.38):

$$\varepsilon_0 = N\frac{\pi^2 T^4}{15}. \tag{2.5}$$

Поэтому, если бы Вселенная была заполнена *только* равновесной плазмой, ее температура $T_0(t)$ изменялась бы по закону (см. [4]):

$$N^{1/4}T_0(t) = \left(\frac{45}{32\pi^3}\right)^{1/4} t^{-1/2} \quad (\sim a^{-1}), \tag{2.6}$$

– здесь мы учитываем возможную слабую зависимость эффективного числа равновесных типов частиц от времени, $N(t)$. Итак, уточним формулу (1.12) следующим образом:

$$p = \tilde{p}N^{1/4}T_0(t). \tag{2.7}$$

Согласно этой формуле смысл импульсной переменной $\tilde{p}$ таков: *с точностью до числового множителя порядка единицы $\tilde{p}$ есть отношение энергии частиц к их средней энергии на этот же момент времени в локально-равновесной ультрарелятивистской Вселенной.*

Таким образом, решая кинетическое уравнение (2.1) с учетом соотношений (1.13) и (2.7), найдем его решение:

$$\Delta f_a(t,\tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp\left[-\frac{\xi(t,\tilde{p})}{\tilde{p}}\int\limits_0^t \frac{y^2(t')dt'}{\sqrt{t'}}\right], \tag{2.8}$$

---

[5] Заметим, что давление и импульс имеют одинаковые обозначения.

где:

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) = \Delta f_a(0,\tilde{p}),$$

– начальное отклонение от равновесия, введена безразмерная функция:

$$y(t) = \frac{T(t)}{T_0(t)} \tag{2.9}$$

и параметр, слабо зависящий от переменных $t, \tilde{p}$:

$$\xi(t,\tilde{p}) = \frac{4\pi\tilde{N}}{3\sqrt{N}}\left(\frac{45}{32\pi^3}\right)^{1/4}\frac{1}{\Lambda(\tilde{p}TT_0/2)}. \tag{2.10}$$

Приближению $p \gg p_T \approx T(t)$ соответствуют значения $\tilde{p} \gg 1$.

Поскольку $T(t)$ – температура равновесной компоненты плазмы, а $T_0(t)$ – температура на данный момент времени полностью равновесной Вселенной, всегда выполняется условие:

$$y(t) \leq 1. \tag{2.11}$$

Для того, чтобы быть правильным решением кинетических уравнений, функция $\Delta f_a(t,\tilde{p})$ во все времена должна удовлетворять интегральному условию (1.23). Поскольку согласно решению (2.7) отклонение от равновесия функции распределения $\Delta f_a(t,\tilde{p})$ строго убывает со временем, для справедливости решения (2.7) достаточно, чтобы функция $\Delta f_a(t,\tilde{p})$ удовлетворяла условию (1.23) в начальный момент времени. Это дает:

$$\int\limits_0^\infty \Delta f_a^0(\tilde{p})\tilde{p}^2 d\tilde{p} \gg \frac{2}{N^{3/4}} y_0^3, \tag{2.12}$$

где $y_0 = y(0) \leq 1$.

2.2. Релаксация сверхтепловых частиц на нерелятивистской стадии Вселенной

Рассмотрим теперь Вселенную на нерелятивистском этапе расширения. В этом случае уравнение состояния есть

$$p = 0 \tag{2.13}$$

и масштабный фактор изменяется по закону:

$$a(t) \sim t^{2/3}. \tag{2.14}$$

При этом будем рассматривать рассеяние сверхтепловых частиц на равновесных безмассовых реликтовых частицах, которых в SCS примерно в 10^9 больше нерелятивистских частиц. Пусть t_0 – момент смены ультрарелятивистского уравнения состояния нерелятивистским в неравновесной Вселенной и $T_\gamma^0(t)$ - температура реликтовых фотонов в равновесной Вселенной. Тогда:

$$T_\gamma^0(t) = \left(\frac{45}{32\pi^3 N}\right)^{1/4}\frac{t_0^{1/6}}{t^{2/3}}. \tag{2.15}$$

Интегрируя кинетическое уравнение (2.1), найдем в этом случае:

$$\Delta f_a(t,\tilde{p}) = \Delta f_a(t_0,\tilde{p}) \exp\left[-\frac{\chi(t,\tilde{p})}{\tilde{p}}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{y^2(t')dt'}{t'^{2/3}}\right], \tag{2.16}$$

где $\Delta f_a(t_0,\tilde{p})$ определяется решением (2.8), а

$$\chi(t,\tilde{p}) = \frac{4\pi\tilde{N}T_\gamma^0(t_0)t_0^{2/3}}{\Lambda(\frac{1}{2}\tilde{p}T_\gamma^0(t))} \tag{2.17}$$

– медленно меняющийся параметр, $\tilde{N}$ определяется для безмассовых реликтовых частиц.

2.3. Релаксация сверхтепловых частиц в ультрарелятивистской плазме на инфляционной стадии Вселенной

Рассмотрим теперь инфляционную стадию расширения Вселенной, полагая плотность энергии плазмы малой по сравнению с плотностью энергии скалярного поля. Таким образом, масштабный фактор Вселенной изменяется по закону [1] (1.17)[6]:

$$a = a_1 \mathrm{e}^{\Xi t}; \quad \varepsilon_S = \frac{3\Xi^2}{8\pi} = \mathrm{Const}, \tag{2.18}$$

а температура равновесной компоненты изменяется по закону изменения физического импульса частиц $T \sim a^{-1}$. Предположим, что инфляционной стадии предшествовала ультрарелятивистская стадия, причем смена режима расширения произошла в момент времени t_1. Тогда на инфляционной стадии $T = T_1 \exp(-\Xi(t-t_1))$. Интегрируя кинетическое уравнение (2.1) на инфляционной стадии, получим:

$$\Delta f_a(t,\tilde{p}) = \Delta f_a(t_1,\tilde{p}) \exp\left[-\frac{4\pi\tilde{N}}{3\tilde{p}}\frac{T_1^2 a_1}{\Xi\overline{\Lambda}}\left(1-\mathrm{e}^{-\Xi(t-t_1)}\right)\right] \tag{2.19}$$

При больших временах инфляции $\Xi t \gg 1$ экспоненциально затухающим членом в (2.19) можно пренебречь, и мы получим:

$$\frac{\Delta f_a(t,\tilde{p})}{\Delta f_a(t_1,\tilde{p})} \approx \exp\left[-\frac{4\pi\tilde{N}}{3\tilde{p}}\frac{T_1^2 a_1}{\Xi\overline{\Lambda}}\right] = \exp\left[-\frac{4\pi\tilde{N}T_1^2}{3p_1\Xi\overline{\Lambda}}\right], \tag{2.20}$$

где p_1 – физический импульс на момент времени t_1. Таким образом, *на инфляционной стадии отклонение функции распределения от равновесия практически не зависит от времени, совпадая при больших импульсах с распределением на момент смены режима расширения.*

2.4. Границы применимости квазиклассического приближения

Исследуем границы применимости рассматриваемой кинетической модели (см. [12]). Напомним, что космологическое время t вычисляется в планковских единицах. Поэтому возникает естественный вопрос, а можно ли пользоваться методами классической (неквантовой) механики на временах порядка планковских? Условием применимости квазиклассического описания частиц в космологической ситуации является соотношение, вытекающее из соотношения неопределенности Гейзенберга:

$$Et \gg 1. \tag{2.21}$$

В расширяющейся Вселенной кинетическая энергия частиц изменяется обратно пропорционально масштабному фактору. Таким образом, параметр квазиклассичности, $\phi = Et$, равен:

$$Et = \gamma\frac{a_1 t}{a(t)t_1} = \gamma\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1+3\varrho}{3(1+\varrho)}}, \tag{2.22}$$

где $\gamma = E_1 t_1$. Отсюда следует, что при показателе баротропы $\varrho > -1$ величина параметра квазиклассичности растет со временем, т.е., частицы становятся все более классическими, а на малых временах квазиклассичность может быть нарушена. В частности, для ультрарелятивистской Вселенной согласно (2.6) и (2.7):

$$E = p = \tilde{p}\left(\frac{45}{32\pi^3}\right)^{1/4} t^{-1/2}. \tag{2.23}$$

Поэтому условие применимости квазиклассического описания частиц (2.21) в случае ультрарелятивистской Вселенной принимает вид:

$$t\tilde{p}^2 \gg \sqrt{\frac{32\pi^3}{45}} \approx 4.70. \tag{2.24}$$

[6] Мы заменили в этой части статьи значение космологической постоянной Λ на Ξ, поскольку символ Λ у нас уже занят под обозначение логарифмического фактора сечения.

При $t \sim 1$ (планковское время) такое рассмотрение оправдано для достаточно больших значений конформного импульса $\tilde{p} \gg 1$, которые как раз и соответствуют сверхтепловым частицам. Таким образом, *квазиклассическое описание частиц применимо на планковских временах эволюции Вселенной с тем большей достоверностью, чем больше энергия частиц тепловой энергии.* Таким образом, описание эволюции сверхтепловой (неравновесной) компоненты не требует квантового рассмотрения на временах порядка планковских и даже меньших их.

2.5. Применимость статистического описания систем частиц в ранней Вселенной

Возникает и второй вопрос, насколько применимы методы статистического описания ансамбля частиц в ранней Вселенной? Строго говоря, для того, чтобы пользоваться понятиями функции распределения в классическом смысле, необходимо, чтобы внутри светового горизонта содержалось достаточно большое число частиц (см. [13]):

$$N_a(t) = \frac{4\pi}{3} n_a(t) * t^3 \gg 1. \tag{2.25}$$

Для тепловых частиц получим отсюда (см. [13]):

$$\frac{0,3\sqrt{t}}{N} > 1. \tag{2.26}$$

Т.е., строгое применение статистического подхода к системе частиц, находящихся в тепловом равновесии с нулевым химическим потенциалом, возможно при временах, больших планковских. Для сверхтепловых частиц $n \sim \overset{0}{n}_a(t)/\mathcal{P}_0^3$. Поэтому в этом случае условие (2.25) принимает вид:

$$\frac{0,3\sqrt{t}}{N\mathcal{P}_0} > 1 \tag{2.27}$$

и, очевидно, вследствие условия $\mathcal{P}_0 \gg 1$ может выполняться лишь во времена, гораздо больших планковских: $t \gg 1$. Однако, это формально правильное в общем случае рассуждение нуждается в существенном уточнении при рассмотрении космологических задач. Из квантовой теории поля следует, что условием применимости понятия матрицы плотности, сечения взаимодействия, вероятности взаимодействия является малость комптоновских размеров взаимодействующих частиц $\lambda_k = 1/E$ по сравнению с характерным масштабом неоднородности системы. Применительно к космологической ситуации это опять-таки приводит к условию (2.21). Поскольку кинетическая энергия частиц изменяется со временем обратно пропорционально масштабному фактору, условие Таким образом, внутри светового горизонта даже при временах гораздо меньших планковских сверхтепловые взаимодействующие частицы локализованы в гораздо меньших, чем световые, объемах, поэтому для них внутри светового горизонта сохраняются понятия начального и конечного состояний, следовательно, и их вероятности находиться в этих состояниях можно вычислять обычным образом[7]. Вопрос, следовательно, заключается в том, насколько эти вероятности, реализованные в шарах, с радиусами порядка планковских, отличаются между собой, т.е., насколько достоверно на них можно сконструировать вероятность для макрообъемов, вмещающих большое число планковских шаров? Ясно, что понятие макроскопического наблюдателя в космологической ситуации корректно лишь при временах, гораздо больших планковских, причем объем прибора такого наблюдателя должен быть, во-первых, гораздо больше планковского, во-вторых, не больше объема светового горизонта и, в-третьих, - вмещать себя достаточно большое число частиц. Таким образом, время макроскопического наблюдения, когда удается провести статистические измерения с достаточной достоверностью, должно удовлетворять условию (2.27). Тем не менее, полученное на этот момент времени статистическое распределение пригодно и для более ранних времен, если у нас есть гарантии того, что это распределение сохраняется в среднем достаточно однородным, т.е., если характерный размер неоднородности системы, $\lambda_1 = \lambda(t_1)$, на момент измерения t_1 гораздо больше светового горизонта:

$$\lambda_1 \gg t_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{\lambda_1}{t_1} \gg 1. \tag{2.28}$$

[7]Если только энергии в этих состояниях оказываются не меньше тепловых.

Но все масштабы расширяющейся Вселенной изменяются пропорционально масштабному фактору $a(t)$, поэтому текущее значение параметра однородности, $h(t) = \lambda(t)/t$, равно:

$$h(t) = h_1 \left(\frac{t_1}{t}\right)^{\frac{1+3\varrho}{3(1+\varrho)}}. \tag{2.29}$$

Поэтому при значении коэффициента баротропы $\varrho > -1$ в уравнении состояния на более ранних временах $t < t_1$ сохраняется отношение $h(t) > h_1 \gg 1$, – т.е., сфера внутри светового горизонта на ранних временах является более однородной чем на более поздних временах – результат, хорошо известный из теории возмущений изотропного мира Лифшица-Халатникова (см., например, [14]). Но это означает, что макроскопическое значение плотности вероятности, полученное усреднением локальных вероятностей внутри световых шаров в более ранние, чем t_1, моменты времени правильно описывает макроскопическую функцию распределения. Этот важный для статистики результат обеспечивается однородностью мира Фридмана и локальной однородностью распределения частиц. Заметим, что при достижении параметра неоднородности значения h_1 мы имеем полное право рассматривать неоднородности системы в рамках макроскопической статистической модели, поэтому соотношение (2.29) на временах, больших t_1, теряет смысл. Заметим также, что параметры квазиклассичности и однородности меняются со временем обратно пропорционально друг другу.

2.6. Достаточность учета четырехчастичных столкновений для описания взаимодействий сверхтепловых частиц

Может также возникнуть вопрос, насколько обоснованной является модель четырехчастичных взаимодействий для сверхтепловых частиц в условиях $\tilde{p} \gg 1$ и малого числа сверхтепловых частиц по сравнению с тепловыми. Помимо четырехчастичных реакций вида [1] (2.11) можно рассмотреть n-частичные реакции типа:

$$a \rightleftarrows b + c, \quad (n = 3); \tag{2.30}$$

$$a + b + c \rightleftarrows d + e, \quad (n = 5); \tag{2.31}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad (\cdots).$$

Рассмотрим сначала 3-х частичные реакции. Такие реакции возможны либо для нестабильных частиц «а», например, промежуточных W-бозонов в электрослабых взаимодействиях SU(2)×U(1), хиггсовых бозонов в SU(5)-моделях, либо для стабильных частиц в сильных внешних полях. Примером последнего случая является реакция образования фотоном электронно-позитронной пары в поле ядра. Заметим, что в этом случае, строго говоря, реакция также является четырехчастичной, в которой участвует еще один виртуальный фотон. В этом, последнем, случае сечение реакции оказывается пропорциональной кубу константы взаимодействия и обратно пропорциональна кубу энергии частиц, что делает такие реакции маловероятными по сравнению с четырехчастичными. В случае же нестабильных частиц реакция распада происходит по часам внешнего наблюдателя во время:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2}} = \tau_0 \frac{E}{m}, \tag{2.32}$$

где τ_0 – время полураспада в собственной системе отсчета. Для ультрарелятивистских частиц, интегрируя соотношение:

$$\tau = \int\limits_0^{\tau_0} \frac{p}{m} dt$$

с учетом зависимости импульса частиц от космологического времен, получим:

$$\tau = 2\tau_0 \frac{p(\tau_0)}{m}. \tag{2.33}$$

Положим $p(t_{pl}) = Km_{pl}$, где для сверхтепловых частиц $K \gg 1$. Очевидно, что для обычных элементарных частиц $\tau_0/t_{pl} = K1 \gg 1$ и $m/m_{pl} = 1/K2 \ll 1$. Таким образом:

$$\tau = KK_1K_2\tau_0 \ggg \tau_0. \tag{2.34}$$

Так, например, для SU(5)-модели $m_{pl}/m \sim 10^5$, $\tau_0/t_{pl} \sim 10^5$. Поэтому, например, при $p(\tau_0)/m \sim 10^{10}$ получим из (2.34) $\tau \sim 10^{20}\tau_0$, что дает космологическое время порядка 10^{-23} sec, тогда как все реакции кварково-глюонного цикла прекращаются во времена порядка 10^{-38} sec. Таким образом, трехчастичные реакции не вносят сколь-нибудь заметного вклада в процесс установления термодинамического равновесия. Заметим, однако, что при этом такие реакции могут оказаться важными для формирования конечного состава сверхтепловой компоненты, так как именно они могут приводить к ливневым процессам, в результате которых увеличивается число реликтовых частиц.

3. Разогрев равновесной компоненты сверхтепловыми частицами

3.1. Уравнение энергобаланса на ультрарелятивистской стадии расширения

Несмотря на малое по сравнению с равновесным число неравновесных частиц, энергия, заключенная в неравновесном хвосте, может оказаться значительно большей энергии равновесной компоненты, если существенные искажения распределения имеются в сверхтепловой области, которым отвечают большие значения импульсной переменной $\tilde{p} \gg 1$. Сверхтепловые частицы, сталкиваясь с равновесными, передают им свою энергию и тем самым разогревают равновесную компоненту плазмы. *Для ультрарелятивистской Вселенной можно дать изящное и полное решение задачи о разогреве равновесной плазмы сверхтепловыми частицами* [10,11]. Для нахождения истинной температуры, $T(t)$, ультрарелятивистской плазмы с учетом подогрева ее сверхтепловыми частицами воспользуемся уравнением (2.3), являющегося следствием закона сохранения энергии и определяющего зависимость плотности энергии, ε, ультрарелятивистской Вселенной от космологического времени. Эта плотность энергии слагается из плотности энергии равновесной плазмы, ε_0 (2.4), и плотности энергии сверхтепловой компоненты, ε_1:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \tag{3.1}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{NT_0^4}{\pi^2}\sum_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty \Delta f_a(t,\tilde{p})\tilde{p}^3 d\tilde{p}. \tag{3.2}$$

Для дальнейшего удобно ввести безразмерную переменную $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_1} \leq 1. \tag{3.3}$$

Поскольку полная плотность энергии $\varepsilon(t)$ с другой стороны определяется четвертой степенью температуры, $T_0(t)$, полностью равновесной Вселенной, а плотность энергии равновесной компоненты $\varepsilon_0(t)$ – четвертой степенью температуры $T(t)$, введенная нами безразмерная переменная связана простым соотношением с безразмерной переменной $y(t) = T(t)/T_0(t)$, введенной нами ранее (2.9):

$$\sigma(t) = y^4(t), \tag{3.4}$$

откуда сразу следует неравенство (2.11).

Таким образом из (3.1) с учетом решения (2.8) для неравновесной функции распределения получим интегральное уравнение относительно функции $y(t)$:

$$y^4 + \frac{15}{\pi^4}\sum_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty \tilde{p}^3\Delta f_a^0(\tilde{p})\exp\left[-\frac{\xi(t,\tilde{p})}{\tilde{p}}\int\limits_0^t \frac{y^2(t')dt'}{\sqrt{t'}}\right]d\tilde{p} = 1. \tag{3.5}$$

Из этого уравнения в нулевой момент времени получим соотношение:

$$\frac{15}{\pi^4}\sum_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty \tilde{p}^3\Delta f_a^0(\tilde{p})d\tilde{p} = 1-\sigma_0. \tag{3.6}$$

3.2. Решение уравнения энергобаланса

При заданных функциях $\Delta f_a^0(\tilde{p})$ уравнение (3.5) всегда интегрируется с логарифмической точностью в квадратурах. Действительно, вместо переменной t и функции $y(t)$ введем новую безразмерную переменную τ:

$$\tau = \frac{\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0}\sqrt{t} \tag{3.7}$$

и безразмерную функцию $Z(\tau)$:

$$Z(\tau) = 2\int\limits_0^\tau y^2(\tau')d\tau', \tag{3.8}$$

где $\langle\xi\rangle = \xi(\langle\tilde{p}\rangle_0)$, а

$$\langle\tilde{p}\rangle_0 = \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\,\tilde{p}^3\Delta f_a^0(\tilde{p})}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\,\tilde{p}^2\Delta f_a^0(\tilde{p})} \tag{3.9}$$

– среднее значение импульсной переменной $\tilde{p}$ в момент времени $t=0$. На Рис.1 показана связь космологического времени t с безразмерной временной переменной τ. Из (3.8), дифференцируя, получим:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}Z'_\tau}; \quad Z(0)=0; \quad Z'_\tau(0) = 2\sqrt{\sigma_0}, \tag{3.10}$$

где $\sigma_0 = \sigma(0) = y^2(0)$. Тогда после вычисления с логарифмической точностью интеграла в уравнении (3.5) с учетом соотношения (3.6) последнее приводится к виду [9]:

$$Z'_\tau = 2\sqrt{1-(1-\sigma_0)\Phi(Z)}, \tag{3.11}$$

где введена функция $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) = \frac{\langle\tilde{p}\rangle(t)}{\langle\tilde{p}\rangle(0)} = \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\,\tilde{p}^3\Delta f_a^0(\tilde{p})e^{-Z\overline{\tilde{p}}_0/\tilde{p}}}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\,\tilde{p}^3\Delta f_a^0(\tilde{p})}. \tag{3.12}$$

В дальнейшем удобно перейти к новой безразмерной импульсной переменной:

$$\rho = \frac{\tilde{p}}{\langle\tilde{p}\rangle_0}, \tag{3.13}$$

так что:

$$1 = \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\rho^3\Delta f_a^0(\rho)}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\rho^2\Delta f_a^0(\rho)} \Rightarrow \langle\rho\rangle_0 \equiv 1. \tag{3.14}$$

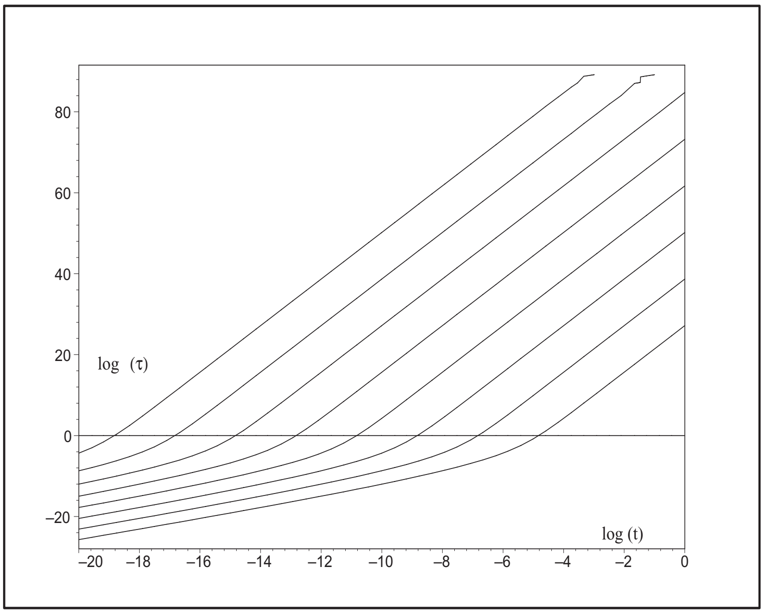

Рис. 1. Связь логарифма безразмерной временной переменной τ с логарифмом космологического времени t в зависимости от параметра $\langle\tilde{p}\rangle_0$ – слева-направо: $\langle\tilde{p}\rangle_0 = 10^{13}$; 10^{14}; 10^{15}; 10^{16}; 10^{17}; 10^{18}; 10^{19}; 10^{20}. Космологическое время t исчисляется в секундах. Всюду принято $\mathcal{N} = 100$.

Тогда:

$$\Phi(Z) = \frac{\langle\rho\rangle(\tau)}{\langle\rho\rangle(0)} = \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\rho^3\Delta f_a^0(\rho)e^{-Z/\rho}}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\rho^3\Delta f_a^0(\rho)}. \tag{3.15}$$

Очевидно, что $\Phi(Z)$ является монотонно убывающей функцией Z, так как всегда

$$\Phi'_Z < 0, \qquad Z \in (0,\infty), \tag{3.16}$$

причем $\Phi(0) = 1$ и $\Phi(\infty) = 0$. Отсюда следует:

$$0 \le \Phi(Z) \le 1. \tag{3.17}$$

Из определения (3.15) также следует, что всегда

$$\Phi''_{ZZ} > 0, \qquad (Z \in (0,\infty)), \tag{3.18}$$

поэтому график функции $\Phi(Z)$ вогнутый. Вследствие строгой монотонности и непрерывной дифференцируемости функции $\Phi(Z)$ согласно уравнению (3.14) функция $Z(\tau)$ вместе со своей первой производной являются монотонно возрастающими функциями переменной x. Интегрируя уравнение (3.14), получим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^Z \frac{dU}{\sqrt{1-(1-\sigma_0)\Phi(U)}} = \tau. \tag{3.19}$$

Указанные свойства монотонности функций $\Phi(Z)$ и $Z(\tau)$ гарантируют нам то, что уравнение (3.19) при каждом заданном значении τ имеет единственное решение $Z(\tau)$. При найденном значении функции $Z(\tau)$ значение температуры $T(t)$ (или $y(t)$) равновесной компоненты можно получить согласно (3.5) и (3.6) по формуле:

$$y = [1-(1-\sigma_0)\Phi(Z)]^{1/4}. \tag{3.20}$$

Таким образом, задача о подогреве равновесной компоненты плазмы формально решена – ее решение будет представляться в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \tau = \tau(Z); & \text{из (3.19)}, \\ y = y(Z); & \text{из (3.20)}, \end{cases} \tag{3.21}$$

где $Z \in [0, +\infty)$ – параметр.

Заметим, что условие применимости приближения слабого нарушения ЛТР (2.12) в терминах введенных здесь величин $\overline{\tilde{p}}_0$ и σ_0 принимает вид:

$$\mathcal{N}^{1/4}\sigma_0^{3/4}\overline{\tilde{p}}_0 \gg 1 - \sigma_0. \tag{3.22}$$

3.3. Общие свойства процесса установления теплового равновесия

Перейдем теперь к исследованию полученного решения.

3.3.1. Асимптотическое поведение при малых временах

Рассмотрим сначала асимптотическое поведение решений при малых космологических временах:

$$t \to 0 \Rightarrow \tau \ll 1. \tag{3.23}$$

Разлагая подинтегральное выражение в правой части (3.15) в ряд Тейлора по степеням малости Z, получим с учетом определения (3.12) асимптотическое разложение функции $\Phi(Z)$:

$$\Phi(Z) = 1 - Z + O^2(Z). \tag{3.24}$$

Подставляя (3.24) в уравнение (3.11) и интегрируя полученное уравнение с учетом начальных условий (3.10), найдем асимптотическое при малых временах решение:

$$Z = \tau\sqrt{\sigma_0} + \tau^2(1 - \sigma_0), \tag{3.25}$$

откуда с учетом (3.10) получим:

$$y(t) = \sqrt{\sqrt{\sigma_0} + \tau(1 - \sigma_0)}. \tag{3.26}$$

Случай $\sigma_0 \ll 1$ соответствует малой плотности энергии равновесной компоненты по сравнению с плотностью энергии неравновесной компоненты плазмы в момент времени $t = 0$. Согласно (3.22) рассмотрение этого случая оправдано для достаточно больших значений $\overline{\tilde{p}}_0$:

$$\langle\tilde{p}\rangle_0 \gg \sigma_0^{-3/4}. \tag{3.27}$$

В этом случае получим из (3.26) асимптотический закон изменения температуры в ранней Вселенной:

$$T(t) = T_\gamma^0(t)\left(\frac{\langle\xi\rangle}{\langle\tilde{p}\rangle_0}\right)^{1/2} t^{1/4} \sim t^{-1/4} \tag{3.28}$$

– температура плазмы падает медленнее, чем в SCS, но на каждый данный момент времени реальная температура ниже, чем соответствующая температура SCS:

$$y(t) \le 1 \Rightarrow T(t) \le T_0(t), \tag{3.29}$$

и сравнивается с последней в некоторый момент времени $\overline{t}$. Найдем это время. Подставляя (3.28) в решение (2.8), найдем закон эволюции распределения сверхтепловых частиц на ранней стадии Вселенной:

$$\Delta f_a(t, \tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp\left(-\frac{\langle\xi\rangle^{\,2} t}{\langle\tilde{p}\rangle_0 \tilde{p}}\right). \tag{3.30}$$

Согласно (3.28) и (3.30) ЛТР в целом восстанавливается во времена

$$t > \overline{t} = \left(\frac{\langle\tilde{p}\rangle_0}{\langle\xi\rangle}\right)^2, \tag{3.31}$$

– это и есть время установления равновесия. Температура плазмы при этом достигает своего равновесного значения $T_0(t)$ (при этом все время падая со временем). Однако, для частиц с энергиями, большими средней $\langle\tilde{p}\rangle_0$, равновесие еще не достигнуто и в это время.

3.3.2. Асимптотическое поведение при больших временах в ультрарелятивистской Вселенной

Полагая $t > \overline{t}$ и, следовательно, $y(t) \approx 1$, получим асимптотику (2.8) на больших временах:

$$\Delta f_a(t,\tilde{p}) = \Delta f_a^0(\tilde{p}) \exp\left(-2\frac{\xi(\tilde{p})\sqrt{t}}{\tilde{p}}\right); \tag{3.32}$$

таким образом, время установления теплового равновесия для частиц с импульсом $\tilde{p}$ есть:

$$t_{\tilde{p}} = \left[\frac{\tilde{p}}{\xi(t,\tilde{p})}\right]^2 \approx \left(\frac{\tilde{p}}{\langle\tilde{p}\rangle_0}\right)^2 t. \tag{3.33}$$

Предположим, что в области больших значений $\tilde{p}$ начальное распределение сверхтепловых частиц экстраполируется степенным законом:

$$\Delta f_a^0(\tilde{p}) \sim \tilde{p}^{-\lambda}; \quad (\tilde{p} \gg 1;\ \lambda > 4). \tag{3.34}$$

Тогда средняя энергия сверхтепловых частиц, $\overline{E}_1(t)$, для которых тепловое равновесие к моменту времени t еще не достигнуто, равна:

$$\overline{E}_1(t) = \xi(t,\tilde{p})T_0(t)\sqrt{t} \approx \frac{1}{\Lambda(T_0^2(t)\langle\tilde{p}\rangle_0)} \sim \mathrm{Const} \tag{3.35}$$

– практически не зависит от времени. Выше [1] (3.31) (см. также [4]) мы отмечали, что на современной стадии $1/\Lambda \sim \alpha^2$, где α – постоянная тонкой структуры. Таким образом, получаем из (3.35) оценку:

$$\overline{E}_1(t) \sim 10^{-4} \tag{3.36}$$

– в обычных единицах $\overline{E}_1(t) \sim 10^{15}$ Gev – т.е., реликтовые частицы, имеющие в современную эпоху энергии порядка и выше характерной энергии Великого объединения, всегда остаются неравновесными. Этот вывод является принципиально важным для космологических сценариев.

3.3.3 Асимптотическое поведение при больших временах в нерелятивистской Вселенной

Рассмотрим теперь эволюцию сверхтепловых ультрарелятивистских частиц в нерелятивистской Вселенной, в которой тепловое равновесие в среднем уже восстановлено. Полагая в этом случае $y = 1$ в выражении (2.16) для функции распределения сверхтепловых частиц, получим:

$$\Delta f_a(t,\tilde{p}) = \Delta f_a(t_0,\tilde{p}) \exp\left\{-\frac{3(\pi N)^{1/4}\chi(\tilde{p})}{\tilde{p}}\sqrt{t_0}\left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3} - 1\right]\right\}, \tag{3.37}$$

– распределение сверхтепловых частиц эволюционирует медленнее, чем (3.32). Время установление теплового равновесия для частиц с импульсом $\tilde{p}$ в этом случае равно:

$$t_{\tilde{p}} \simeq \frac{1}{\sqrt{t_0}}\left[\frac{\tilde{p}}{\xi(t,\tilde{p})}\right]^3, \tag{3.38}$$

а средняя энергия сверхтепловых частиц медленно падает с течением времени:

$$\overline{E}_1(t) \simeq \frac{\overline{N}}{\sqrt{N}\Lambda(T_0^2(t)\tilde{p}/2)}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/3} \sim 10^{15}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/3} \mathrm{Gev}. \tag{3.39}$$

В современную эпоху эта величина порядка $10^{12} \div 10^{13}$Gev при вариации t_0 в пределах $10^9 \div 10^{12}$sec.

В следующей статье мы рассмотрим процесс разогрева равновесной плазмы сверхтепловыми частицами на инфляционной стадии расширения Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. Т. 1. No 1. С. 79-98.
2. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика и космология. I. // Известия ВУЗов, Физика. 1980. Т. 25. № 8. – С. 42–47.
3. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика и космология. II. // Известия ВУЗов, Физика. 1980. Т. 25. № 9. – С. 27–32.
4. Yu.G.Ignatyev. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition. // Gravitation & Cosmology. 2007. Vol. 13. No. 1(49). – pp. 1–14; arXiv:1101.0364 [gr-qc] 1 Jan. 2011.
5. Игнатьев Ю.Г. Законы сохранения и термодинамическое равновесие в общерелятивистской кинетической теории неупруго взаимодействующих частиц, Известия Вузов, Физика. 1983. Т. 26. № 12. С. 9–14.
6. Игнатьев Ю.Г. Релятивистские кинетические уравнения и космология // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. 1980. М: Атомиздат. Выпуск 11. – С. 113–125.
7. Игнатьев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. 1988. Казань: Изд-во КГПИ. С. 62–84.
8. Игнатьев Ю.Г. Нарушение термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Тезисы докл. Всесоюз. конф. «Соврем. теорет. и экспер. проблемы теории относительности и гравитации». 1984. Москва: Изд-во МГПУ. с. 19–21.
9. Игнатьев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Известия ВУЗов, Физика. 1986. Т. 29. No 2. С. 27–32.
10. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery. // Gravitation & Cosmology. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101–113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011.
11. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario. // Gravitation & Cosmology. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011.
12. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиантъ, 2010. 508 с.
13. Yu.G. Ignatyev. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field // Gravitation & Cosmology. 2007. Vol.13. No. 2 (49). – pp. 59–79.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.

Поступила в редакцию 10.12.2012

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev
Nonequilibrium Kinetics Universe Models. II. Energy-Ballance Model.

Keywords: Early Universe, Local Thermodynamic Equilibrium, Relativistic Kinetics, Scaling, Cosmic Rays, Backward Acceleration.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Nonequilibrium cosmological scenarios in the restoration assumption scaling interactions of particles in the field of ultrahigh energies are considered. The model energy-balance is under construction and conditions of its applicability are discussed. Influence of inflationary stages of expansion of the Universe on process of an establishment of thermodynamic balance is considered.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. I. Local Thermodynamics Conditions. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2012. Vol. 1. No 1. pp. 79–98.

2. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetics and Cosmology. I. *Izvestia Vuzov*, Fizika. 1980. Vol. 23. No 8. – pp. 42–47.

3. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetics and Cosmology. II. *Izvestia Vuzov*, Fizika. 1980. Vol. 23. No 9. – pp. 27–32.

4. Yu.G.Ignatyev. Kinetics of the nonequilibrium Universe. I. Local thermodynamic equilibrium condition. *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No. 1(49). – pp. 1–14; arXiv:1101.0364 [gr-qc] 1 Jan. 2011

5. Ignat'ev Yu.G. The Conservation Laws and Thermodynamic Equilibrium in the General Relativistic Kinetic Theory of Inelastic Interacting Particles *Izvestia Vuzov*, Fizika. 1983. Vol. 26. No 12. – pp. 9–14.

6. Ignat'ev Yu.G. Relativistic Kinetics Equations and Cosmology *Problemi Teorii Gravitacii i elementarnikh chastic*. 1980. Moscow: Atomizdat. No 11. – pp. 113–125.

7. Ignat'ev Yu.G. The Cosmological Consequences of Scalling *Problemi Teorii Gravitacii, Relativistskoi Kinetiki i Evolyucii Vselennoi*. 1988. Kazan: Publ. KGPI. pp. 62–84.

8. Ignat'ev Yu.G. The Broken of Thermodynamic Equilibrium in Early Universe *Report Sov. Conf.* «Actual Theor. and Experim. Theory Relativity and Gravitation». 1984. Moscow: Publ. MGPU. pp. 19–21.

9. Ignat'ev Yu.G. The Capability Broken of Thermodynamic Equilibrium in Early Universe *Izvestia Vuzov*, Fizika. 1986. Vol. 29. No 2. – pp. 27–32.

10. Ignatyev Yu.G. , Ignatyev D.Yu. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery. *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101–113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011

11. Ignatyev Yu.G. , Ignatyev D.Yu. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario. *Gravitation & Cosmology*. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011

12. Ignat'ev Yu.G. *Relativistic Kinetics of Non-equilibrium Processes in a Gravitation Fields*. 2010. Kazan: Foliant.

13. Ignatyev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field. *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol.13. No. 2 (49). – pp. 59–79.

14. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theory of Field*. Nauka: Moscow, 1973.

Received 10.12.2012

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru