УДК 530.12; 531.51

В. В. Гладуш[1]

МЕТОД ЗОММЕРФЕЛЬДА-ЛЕНЦА В ОТО И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ

В данной работе рассматриваются вопросы обоснования, применимости и приложения метода нахождения точных вакуумных решений уравнений Эйнштейна – метода Зоммерфельда-Ленца (метод падающего ящика). С помощью модификации этого метода построены метрики Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера. На основе множества свободных пробных частиц СТО построена неинерциальная СО с дифференциальным вращением, в которой записана метрики Минковского. С помощью предложенного обобщения метода Зоммерфельда-Ленца на аксиальные вращающиеся СО предложен «физико-геометрический» вывод метрики Керра, что даёт более широкую и наглядную трактовку этой метрики.

Ключевые слова: Системы отсчета, локальное преобразование Лоренца, метод Зоммерфельда-Ленца, метрика Керра.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Jb

Введение

Одной из актуальных проблем общей теории относительности (ОТО) является задача получения точных решений уравнений Эйнштейна для источников гравитационного поля заданной структуры. Эта задача представляется одной из сложнейших и важнейших проблем теории гравитации. Иногда различные физико-геометрические рассуждения и соображения симметрии позволяют упростить задачу, выяснить структуру решения и даже построить само решение. Способы полного или частичного нахождения метрик для данной конфигурации, основанные на дифференциально-геометрических построениях, использующие физические соображения и учитывающих свойства симметрии, будем называть прямыми физико-геометрическими методами. В качестве примера упомянем геометрический метод построения метрики для заряженной пыли, приведённый в работе [1]. Другой пример — это метрика де-Ситтера, которая может быть построена, только из соображений изотропии и однородности пространства [2, 3]). В работе [4] для сферически-симметричных метрик ОТО вводится понятие унимодулярной симметрии, с помощью которой строятся массовая функция и общее представление метрики в координатах, которые можно понимать, как аналоги «разделяющихся» переменных. Последующий выбор модели и решение соответствующих уравнений Эйнштейна конкретизирует эту метрику.

Здесь мы ограничимся рассмотрением способа построения метрик, известного как метод Зоммерфельда-Ленца (ЗЛ) или метод «падающего ящика» (ПЯ). Впервые этот метод обсуждал Зоммерфельд в книге [5], ссылаясь на неопубликованные результаты Ленца. Попытка обосновать метод ПЯ на основе неинтегрируемых преобразований была предпринята в работах [6, 7]. Усовершенствование этого метода и ряд его приложений были рассмотрены в [8]. В работах [11, 12] приводятся некоторые обобщения этого метода. В настоящее время этот метод можно рассматривать как эвристический способ построения физически приемлемых анзацев, с помощью которых следует искать решения уравнений ОТО для некоторых полевых конфигураций. В данной работе предложена модификация метода ЗЛ и его обобщения. В рассматриваемых ниже случаях метод ЗЛ сразу даёт точное решение уравнений Эйнштейна.

Исходная идея метода связана с принципом эквивалентности и состоит в следующем. Пусть из бесконечности на неподвижный источник сферически-симметричного гравитационного поля массы M радиально падает падает ящик K_∞. Поскольку K_∞ падает свободно, то он никак не чувствует гравитационного поля и поэтому все время несет с собой справедливую на бесконечности псевдоэвклидову метрику. Пусть измеряемые в нём координаты будут x_∞ (продольная) y_∞, z_∞ (поперечные) и t_∞. Пусть ящик K_∞ достигает некоторой точки r со скоростью v. Будем считать, что v и r измеряются в неподвижной системе K, связанной с рассматриваемым источником поля. В качестве координат в этой системе будем использовать сферические координат r, θ, α, t. Тогда

[1] E-mail: vgladush@gmail.com

K_∞ и K будут связаны преобразованием Лоренца, в котором K_∞ будет играть роль системы «движущейся» со скоростью v, а K «покоящейся». При этом будут выполняться соотношения

$$dx_\infty = \frac{dr}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \quad dt_\infty = dt\sqrt{1-v^2/c^2}\,, \quad dy_\infty = rd\theta\,,\ dz_\infty = r\sin\theta d\alpha\,. \tag{0.1}$$

Поэтому псевдоевклидов элемент длины

$$ds^2 = c^2dt_\infty^2 - dx_\infty^2 - dy_\infty^2 - dz_\infty^2 \tag{0.2}$$

переходит в следующий интервал ОТО:

$$ds^2 = c^2(1-v^2/c^2)dt^2 - \frac{dr^2}{1-v^2/c^2} - r^2(d\theta^2 - \sin\theta^2 d\alpha^2)\,. \tag{0.3}$$

Пусть ящик K_∞ падает из состояния покоя на бесконечности. Тогда для полной энергии, равной сумме кинетической и потенциальной энергии, имеем

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) - \frac{GmM}{r} = 0\,. \tag{0.4}$$

Отсюда, для скоростей частиц движущихся по параболических радиальным траекториям приближённо находим $v^2 = GM/r$. Подставляя полученное выражение в (0.2), получаем метрику Шварцшильда.

Заметим, что на самом деле в приведённом выводе используется ньютоновский закон сохранения кинетической и потенциальной энергии, который приводит к точному результату. В связи с этим, метод ЗЛ может быть модифицирован. Суть метода ЗЛ в этой новой трактовке состоит в следующем. Рассмотрим в исходном ньютоновском пространстве неинерциальную параболическую СО, которая реализована стационарным потоком пробных частиц, свободно падающих на источник гравитационного поля из состояния покоя на бесконечности. Поле скоростей частиц этой СО отождествляется с полем физических скоростей пробных частиц, реализующих свободно падающую параболическую СО в соответствующем стационарном пространстве-времени ОТО. Таким образом, гравитационные поля в обеих случаях имеют одинаковое асимптотическое поведение. Ключевое утверждение состоит в том, что метрика искомого пространства-времени ОТО может быть получена путём «локальной деформации Галилея (или Лоренца)» метрики Минковского. Для деформаций Лоренца это сводится к лоренцевому «сжатию» временного и «растяжению» соответствующего пространственного масштабов. Причём, в качестве параметра Лоренца v выступает физическая скорость частиц. Обоснование нового похода буде дано ниже.

Очевидно, что не все гравитационные поля, например, гравиволновые, могут быть получены таким образом. Здесь идет речь о построении некоторого класса стационарных гравитационных полей с довольно высокой степенью симметрии.

1. Деформации Галилея и Лоренца

1. К идее метода ЗЛ можно прийти, сравнивая понятие свободно падающей параболической СО в ньютоновской и эйнштейновской теориях тяготения. Пусть в ньютоновской теории параболическая СО реализована множеством свободно падающих со скоростью $\vec{V}_n = d\vec{r}/dt$ частиц массы m в гравитационном поле $\Phi_n = \Phi_n(\vec{r})$. Закон сохранения полной энергии пробной частицы

$$E_n = \frac{1}{2}m\vec{V}_n^2 + m\Phi_n = \mathrm{const}\,, \tag{1.1}$$

условия параболичности $\vec{V}_{n\infty} = 0$ и асимптотического поведения $\Phi_{n\infty} = 0$ дают $E_n = 0$. Поэтому поле скоростей параболической СО подчиняется условию

$$\vec{V}_n^2 = -2\Phi_n. \tag{1.2}$$

Получим теперь аналог этого условия для свободно падающей параболической СО в стационарном пространстве ОТО с интервалом $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Согласно методу хронометрических инвариантов (ХИ) [9], для локальной энергии

$$E_l = mc^2u_0(g_{00})^{-1/2} \tag{1.3}$$

частиц, движущихся относительно «неподвижной» СО с хронометрически-инвариантной скоростью $v^i = dx^i/d\tau$ $(\mu, \nu, .. = 0,1,2,3;\ i,k,.. = 1,2,3)$ имеет место соотношение

$$E_l = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{1.4}$$

Отметим некоторые формулы ХИ метода

$$\begin{gathered} ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2\,, \quad d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,\theta^0\,, \quad dl^2 = h_{ik}dx^i dx^k\,, \\ \theta^0 = dx^0 + A_i dx^i\,, \quad A_i = g_{0i}/g_{00}\,, \quad h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\,, \\ v^2 = (\vec{v})^2 = h_{ik}v^i v^k\,, \quad u_0 = g_{0\mu}u^\mu\,, \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}\,. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $d\tau$ — локальное собственное время в «неподвижной» СО, θ^0 — 1-форма координатного «времени», h_{ik} — трёхмерный хронометрически-инвариантный метрический тензор на локальных сечениях, ортогональных линиям времени.

Из этих формул вытекает

$$g_{00} = u_0^2\,(1 - v^2/c^2)\,. \tag{1.6}$$

В стационарном пространстве, для свободно падающих частиц, компонента u_0 сохраняется и оказывается пропорциональной полной энергии частицы: $E_{tot} = mc^2 u_0$ [10]. Асимптотическое условие и условие параболичности

$$g_{00|\infty} = 1\,, \qquad v_\infty^2 = 0 \tag{1.7}$$

дают: $u_0 = 1$ и $E_{tot} = mc^2$. Отсюда вытекает соотношение

$$g_{00} = 1 - \frac{v^2}{c^2}\,. \tag{1.8}$$

Подчеркнём, что эта формула для поля ХИ скоростей параболической СО, является общерелятивистским аналогом ньютоновского поля скоростей (1.2) параболической СО и является точной. Отсюда также вытекает формула для ускорения частиц, которые реализуют релятивистскую параболическую СО:

$$\frac{v}{c^2}\frac{dv}{d\tau} = -\frac{v^i}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\,, \tag{1.9}$$

где $v = (h_{ik}v^i v^k)^{1/2}$. Вид формул (1.8) и (1.9) подсказывает нам, что можно ввести замену

$$g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2\,, \tag{1.10}$$

Тогда релятивистские формулы (1.8), (1.9) принимают ньютонов вид

$$v^2 = -2\Phi\,, \qquad \frac{dv}{d\tau} = -\frac{v^i}{v}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\,, \tag{1.11}$$

где функция Φ принимает смысл гравитационного потенциала. Отсюда следует, что при переходе от ньютоновской картины к релятивистской, поле скоростей $\vec{V}_n$ ньютоновской СО нужно заменить на поле скоростей $\vec{v}$ релятивистской параболической СО. При этом, формула (1.10) принимает смысл основной формулой метода ЗЛ.

Из приведённых выше соотношений вытекает также формула

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,\theta^0 = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \theta^0\,. \tag{1.12}$$

Таким образом, если известно поле хронометрически-инвариантных скоростей частиц параболической СО, то компонента g_{00} метрики $g_{\mu\nu}$ для стационарных пространств находится путём локального «лоренцевого сокращения» временного базисного ковектора: $\theta^0 \to \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\theta^0$. Очевидно, что существуют локальные пространственные направления (направления свободного падения), для которых метрический коэффициент получается путём «локального лоренцевого растяжения» соответствующего пространственного ковектора. Это означает, что в общем случае, мы имеем дело с метрикой, которая допускает представление

$$ds^2 = (1 - v^2/c^2)(\theta^0)^2 - (1 - v^2/c^2)^{-1}(\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2, \tag{1.13}$$

где $\theta^i = \theta^i_k dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3)$ — некоторые пространственные ковекторы.

Будем говорить, что метрика типа (1.13) получена из метрики

$$ds_0^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \tag{1.14}$$

путём «лоренцевой деформации» [12]

$$\theta^0 \ \to \ \theta^0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad \theta^1 \ \to \ \theta^1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{1.15}$$

с лоренцевым фактором $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в «направлении» ковектора θ^1.

В общем случае $\theta^i = \theta^i_\mu dx^\mu$ и базис 1-форм θ^μ может описывать вращающуюся СО [8,13], тогда под скоростью v понимается результат релятивистского сложения скорости падения и переносной скорости движения СО.

Отметим, что для асимптотически не плоских стационарных пространств, используется расширенная трактовка метода ЗЛ. В ней, вместо требований асимптотического поведения на бесконечности и условия параболичности (1.7), предполагается, что существует некоторая точка $p \in M$ (точка остановки), в которой выполняются условия:

$$g_{00|p} = 1\,, \qquad v^2_{|p} = 0\,. \tag{1.16}$$

В этом случае $E = E_p = mc^2$ и условия (1.16), попрежнему, приводят к соотношениям (1.8), (1.12).

2. С методом ЗЛ связан другой вид деформации [12] метрики Минковского

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \delta_{ik} dx^i dx^k\,, \tag{1.17}$$

при которой совершается «локальное преобразование Галилея»:

$$dx^i \ \to \ dx^i - v^i d\tau\,. \tag{1.18}$$

В результате этой деформации, которую будем называть «галилеевой деформацией», получаем метрику

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \delta_{ik}(dx^i - v^i d\tau)(dx^k - v^k d\tau). \tag{1.19}$$

Связь «лоренцевой деформации» (1.15) с «галилеевой» (1.18) устанавливается путём ортогонализацией полученной метрики [12].

Для реализации метода ЗЛ при «галилеевых деформациях» построим поле скоростей частиц ньютоновской параболической СО, которое отвечает данному гравитационному потенциалу Φ_n, удовлетворяющему уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_n \equiv \Phi_{n,ii} = 0\,. \tag{1.20}$$

Решение нерелятивистского уравнение Гамильтона-Якоби (ГЯ) для частицы массы m в гравитационном поле Φ_n

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S_n)^2 + m\Phi_n = 0 \tag{1.21}$$

ищем в виде $S_n = -E_n t + m\sigma(x^i)$. В случае параболических траекторий $E_n = 0$ и $S_n = m\sigma(x^i)$, поэтому

$$(\nabla\sigma)^2 = -2\Phi_n. \tag{1.22}$$

Отсюда скорость $V_{(n)i}$ частиц ньютоновской СО определяется по формуле

$$V_{(n)i} = S_{n,i}/m = \sigma_{,i} \to v_i \,, \tag{1.23}$$

которая после подстановки в (1.19) задаёт деформацию метрики Минковского (1.17).

Класс пространств с интервалом типа (1.19) рассмотрен в работе [14]. Они содержат семейства плоских сечений $t = \mathrm{const}$ с трёхмерной метрикой $h_{ik} = \delta_{ik}$. Конгруэнция мировых линий с полем касательных векторов (4-скоростей) $u^\mu = \{1, \sigma_\mu\}$ ($u_\mu = \{1, 0, 0, 0\}$) является нормальной и геодезической. Уравнение гравитационного поля $R_{\mu\nu} = 0$ для метрики (1.19) можно представить в виде

$$S^i_k S^k_i - S^2 = 0, \qquad (S^i_k - S\delta^i_k)_{,i} = 0, \tag{1.24}$$

$$(S^i_k v^l)_{,l} - S^l_k v^i{}_{,l} + S^i_l v^l{}_{,k} = 0 \,, \tag{1.25}$$

где $S_{ik} = -(v_{i,k} + v_{k,i})/2$ — тензор скоростей деформации, $S = S^i_i$. В случае (1.23) поле скоростей потенциально, поэтому $S_{ik} = -\sigma_{,ik}$ и $S = -\Delta\sigma$. Тогда второе уравнение в (1.24) выполняется тождественно, а остальные дают: $\sigma_{,ik}\,\sigma_{,ik} - (\Delta\sigma)^2 = 0$, $(\sigma_{,ik}\,\sigma_{,l}\,)_{,l} = 0$, что эквивалентно системе

$$(\sigma_{,ik}\,\sigma_{,l}\,)_{,l} \;=\; 0\,, \tag{1.26}$$

$$\Delta(\nabla\sigma)^2 = (\sigma_{,k}\,\sigma_{,k}\,)_{,ii} \;=\; 2(\sigma_{,ik}\,\sigma_{,k}\,)_{,i} = 0\,. \tag{1.27}$$

Семь уравнений (1.26) - (1.27) на потенциал скоростей $\sigma = \sigma(x^i)$ — это следствие вакуумных уравнений Эйнштейна для метрики (1.19). Для исходной, ньютоновской конгруэнции, на потенциал скоростей σ накладывается одно ограничение (1.27), которое вытекает из уравнений (1.20) и (1.22). Отсюда следует, что все решения вакуумных уравнений Эйнштейна вида (1.19) имеют ньютоновские аналоги. Действительно, вводя для решения (1.19), (1.23) обозначение $(\nabla\sigma)^2 = -2\Phi$, из (1.27) получаем $\Delta\Phi = 0$. Далее, дифференцируя введённое соотношение по x^i и учитывая соотношение $v_i = \sigma_{,i}$, аналогичное (1.23), приходим к аналогу ньютоновских уравнений движений $dv_i/dt = -\Phi_{,\,i}$. Однако не каждое ньютоновское решение имеет релятивистский аналог (1.19), (1.23) (в смысле метода ЗЛ), поскольку, кроме (1.27), потенциал скоростей σ должен удовлетворять ещё шести дополнительным уравнением (1.26). Таким образом, множество общерелятивистских решений вида (1.19), (1.23) у́же соответствующего множества нерелятивистских решений. То, что область пересечения этих множеств не пуста, вытекает из существования решений системы (1.26)−(1.27) в случае сферической симметрии:

$$\Phi = -\kappa M/r\,, \quad \sigma = 2\sqrt{2\kappa M r}\,, \quad \left(r = \sqrt{x_i^2}\right)\,, \tag{1.28}$$

откуда следует решение Шварцшильда в СК Пенлеве [14].

Реализация метода ЗЛ в обоих вариантах связана с возможностью разделения переменных как в ньютоновском (1.21), так и в общерелятивистском уравнениях ГЯ. При этом можно ввести аналог «радиальных» однокомпонентных движений, которые упрощают релятивистские уравнения (1.11) и делает их тождественным ньютоновским уравнениям. Это указывает на то, что применимость метода ЗЛ, кроме всего прочего, связана с соответствующей степенью симметрии рассматриваемых полей. Вместе с асимптотическими условиями она настолько жёстко задаёт поведение полей, что общерелятивистские и ньютоновские уравнения, если и выполняются, то приводят к одному и тому же потенциалу скоростей σ.

2. Обобщение метода Зоммерфельда-Ленца

Метод ЗЛ может использоваться не только для получения общерелятивистских решений из ньютоновских, но и позволяет иногда получать новые из общерелятивистских решений. При лоренцевой или галилеевой деформации метрики тензор энергии-импульса (ТЭИ) преобразуется неоднородно. Это позволяет методом ЗЛ генерировать не только вакуумные решения, но и решения с определённым видом материи. Действительно, рассмотрим метрику

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\sigma^2 \,, \tag{2.1}$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. При лоренцевой деформации имеем

$$e^{\nu} \;\to\; e^{\tilde{\nu}} = (1+2\Phi/c^2)e^{\nu}\,, \quad e^{\lambda} \;\to\; e^{\tilde{\lambda}} = (1+2\Phi/c^2)^{-1}e^{\lambda}\,. \tag{2.2}$$

Уравнения Эйнштейна для метрики (2.1) имеют вид [17]:

$$\chi T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\,, \tag{2.3}$$

$$\chi T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\,, \tag{2.4}$$

$$\chi T^2_2 = \chi T^3_3 = -e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right)\,, \tag{2.5}$$

где штрих – производная по r. Аналогичные соотношения выполняются и для деформированной метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и нового $\tilde{T}^{\mu}_{\nu}$. Отсюда, с учётом (2.2), вытекает

$$\chi\tilde{T}^a_a = (1+2\Phi/c^2)\chi T^a_a - G/c^2\,, \quad \chi\tilde{T}^k_k = (1+2\Phi/c^2)\chi T^k_k - S/c^2\,, \tag{2.6}$$

где $a = 0, 1,\ k = 2, 3$ (без суммирования по a и k !) и

$$G = \frac{2}{r^2}\left(\Phi + r\Phi' e^{-\lambda}\right)\,, \quad S = e^{-\lambda}\left\{\Phi'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{3\nu' - \lambda'}{2}\right)\Phi'\right\}\,. \tag{2.7}$$

Пусть исходное пространство плоское. Тогда $T^{\mu}_{\nu} = 0,\quad \lambda = \nu = 0$ и для нового ТЭИ (опуская знак тильды) получаем

$$\chi T^a_a = -\frac{G}{c^2} \equiv -\frac{2}{c^2 r^2}(r\Phi)'\,, \quad \chi T^k_k = -\frac{S}{c^2} \equiv -\frac{1}{c^2 r^2}(r^2\Phi')'\,. \tag{2.8}$$

Совместность этих соотношений выполняется в силу $T^{\mu}_{\nu\,;\,\mu} = 0$, откуда следует уравнение $(r^2 T^0_0)' = 2rT^2_2$, которое выполняется тождественно. Из (2.8) вытекает, что гравитационное поле порождается веществом с ТЭИ, имеющим структуру

$$T^0_0 = T^1_1, \qquad T^2_2 = T^3_3. \tag{2.9}$$

Для вакуума, если $T^{\mu}_{\nu} = 0$, имеем $G = S = 0$, и соотношения (2.8) приводят к решению Шварцшильда. В случае пространств с космологической постоянной Λ имеем $\chi T^{\mu}_{\nu} = \Lambda\delta^{\mu}_{\nu}$. Тогда $G = S = -\Lambda c^2$, что вместе с (2.8) приводит к решению Шварцшильда-де Ситтера. В случае электровакуума $T^0_0 = T^1_1 = -T^2_2 = -T^3_3$, при этом $G = -S$, и из (2.8) вытекает решение Рейсснера-Нордстрема. Отметим, что, в силу линейности (2.8) по Φ, допустима суперпозиция этих решений, которая сохраняет структуру T^{μ}_{ν}. Так, решение Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера можно получить из уравнения $G + S = -2\Lambda c^2$, что соответствует условию $\chi T^{\mu}_{\mu} = 4\Lambda$. С другой стороны, с требованием (2.9) не совместна структура ТЭИ пыли ($T^0_0 = \varepsilon,\ T^i_k = 0$), идеальной жидкости ($T^0_0 = \varepsilon,\ T^i_k = -p\delta i_k$) и скалярного поля ($T^0_0 = T^2_2 = T^3_3 \neq T^1_1$).

Таким образом, если для данного ТЭИ выполняются условия (2.9), то, в соответствии с методом ЗЛ, его гравитационное поле находится по формулам $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 + 2\Phi$, причём потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta_r\Phi = 4\pi\kappa\rho_{tot}\,, \tag{2.10}$$

где $\Delta_r = r^{-2}\partial_r r^2\partial_r$ — радиальная часть оператора Лапласа, $\rho_{tot} = \varepsilon_{tot}/c^2$ — эффективная плотность вещества, создаваемая всей совокупностью негравитационной материи (плотность Толмена [17]). Полная плотность энергии определяется соотношением

$$\varepsilon_{tot} = \rho_{tot}c^2 = -2T^2_2 = T^0_0 - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3 = \varepsilon + 3P\,. \tag{2.11}$$

В неё вносит вклад эффективное давление (натяжение) $P = -(T^1_1 + T^2_2 + T^3_3)/3$, как результат усреднения по всем направлениям пространственной части ТЭИ.

Обобщение метода лоренцевой деформаций (1.15) достигается при учёте того, что эти деформации принадлежат к унимодулярным локальным преобразованиям, которые сохраняют элемент объёма, построенного на 1-формах θ^μ. Поэтому общая форма деформаций может быть представлена в виде $ds^2 = g_{\mu\nu}\theta^\mu\theta^\nu \to d\tilde{s}^2 = g_{\mu\nu}\tilde{\theta}^\mu\tilde{\theta}^\nu$, где $\tilde{\theta}^\mu = S^\mu_\nu\theta^\nu$, $\det||\mathrm{S}^\mu_\nu|| = 1$. Такая деформация имеет независимый интерес, как возможный способ генерации новых метрик. Она реализуется последовательным применением элементарных унимодулярных деформаций. Рассмотрим, например, семейство метрик Картера [15]

$$ds^2 = \Delta_\lambda(\theta^0)^2 - \Delta_\lambda^{-1}(\theta^1)^2 - \Delta_\mu^{-1}(\theta^2)^2 - \Delta_\mu(\theta^3)^2, \tag{2.12}$$

$$\theta^0 = G^{-1/2}(P_\mu d\psi - Q_\mu d\chi), \qquad \theta^1 = G^{1/2}d\lambda, \tag{2.13}$$

$$\theta^2 = G^{1/2}d\mu, \qquad \theta^3 = G^{-1/2}(P_\lambda d\psi - Q_\lambda d\chi), \tag{2.14}$$

где $G = P_\lambda Q_\mu - P_\mu Q_\lambda$, а $\{P_\mu,\ Q_\mu,\ \Delta_\mu,\ P_\lambda,\ Q_\lambda,\ \Delta_\lambda\}$ – функции координат μ, λ соответственно. Метрики вида (2.12) можно трактовать как класс метрик, полученный путём двух элементарных унимодулярных деформаций: $\{\theta^0 \to \Delta_\lambda^{1/2}\theta^0,\ \theta^1 \to \Delta_\lambda^{-1/2}\theta^1\}$ и $\{\theta^2 \to \Delta_\mu^{-1/2}\theta^2,\ \theta^3 \to \Delta_\mu^{1/2}\theta^3\}$. Эти деформации совместны с (2.9), поэтому с их помощью можно получить, например, метрику Керра-Ньюмена-де Ситтера [16].

3. Метрика Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера и метод Зоммерфельда-Ленца

В качестве примера приведем построение метрики Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера модифицированным методом ЗЛ. Исходная метрика $ds^2 = c^2d\tau^2 - dr^2 - r^2d\sigma^2$ в результате галилеевой радиальной деформации $dr \to dr - vd\tau$ принимает вид

$$ds^2 = c^2d\tau^2 - (dr - vd\tau)^2 - r^2d\sigma^2, \tag{3.1}$$

где $v = v(r)$ — скорость радиально падающих пробных частиц параболической СО. Согласно методу ЗЛ $v^2(r) = V_n^2(r) = -2\Phi(r)$, где $\Phi(r)$ удовлетворяет уравнению (2.10). Пусть гравитационное поле порождается точечной частицей с массой m, электрическим полем заряда q и лоренц-инвариантной вакуумной средой с плотностью энергии $\varepsilon = c^4\Lambda/8\pi\kappa = -P$, где P — давление, Λ – космологическая постоянная. Тогда полная эффективная плотность материи равна

$$\rho_{tot} = m\delta(r) + \rho_e(r) + \rho_{vac}(r), \tag{3.2}$$

где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, $\rho_e(r)$ и $\rho_{vac}(r)$ — эквивалентные плотности «массы» электростатического поля и вакуума. В соответствии с (2.11), находим

$$\rho_e c^2 = \varepsilon_e + 3P_e = 2\varepsilon_e, \qquad \rho_{vac}c^2 = \varepsilon + 3P = -2\varepsilon. \tag{3.3}$$

Здесь $\varepsilon_e = 3P_e = T^0_0 = E^2/8\pi = q^2/8\pi r^4$ — плотность энергии электрического поля, P_e — эффективное давление, которое является результатом усреднения по всем направлениям максвелловского тензора натяжений $\sigma^i_k = -T^i_k$. В результате, полная эффективная плотность материи принимает вид

$$\rho_{tot} = m\delta(r) + 2\varepsilon_e/c^2 - 2\varepsilon/c^2 = m\delta(r) + q^2/4\pi c^2r^4 - c^2\Lambda/4\pi\kappa. \tag{3.4}$$

Отсюда видно, что гравитацию порождает удвоенная плотность энергии электрического поля [8], тогда как «вакуум» вносит в общую эффективную плотность также удвоенный, но отрицательный вклад.

Решение уравнения (2.10) для эффективной плотности (3.4) даёт

$$2\Phi/c^2 = -r_g/r + r_e^2/r^2 - r^2/r_{vac}^2, \tag{3.5}$$

где

$$r_g = 2\kappa M/c^2, \qquad r_e^2 = \kappa q^2/c^4, \qquad r_{vac}^2 = 3/\Lambda. \tag{3.6}$$

Из уравнений (1.1), (1.2) и (3.5) видно, что существует точка остановки p в которой $\Phi = 0\,, V_n = 0$ так, что $E_n = 0$. Поэтому выполняться условия (1.16), необходимые для использования метода ЗЛ.

Отметим, что согласно (2.8), возникающий вследствие деформации плоской метрики, ТЭИ имеет вид

$$\chi T^0_0 = \chi T^1_1 = \Lambda + r_e^2/r^4, \qquad \chi T^2_2 = \chi T^3_3 = \Lambda - r_e^2/r^4 \tag{3.7}$$

и отвечает физической постановке задачи. Подстановка $v = (-2\Phi)^{1/2}$ в (3.1), с учётом (3.5)-(3.6), приводит к метрике Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера в координатах Пенлеве

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left(dr - \sqrt{2\kappa M/c^2 r - \kappa q^2/c^4 r^2 + \Lambda r^2/3}\; c d\tau\right)^2 - r^2 d\sigma^2 \,. \tag{3.8}$$

Преобразование

$$c\tau = ct - \int (-2\Phi)^{1/2}(1 + 2\Phi/c^2)^{-1/2} dr \tag{3.9}$$

приводит полученное решение к интервалу (2.1) с метрическими функциями $e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 + 2\Phi/c^2$, что совпадает со стандартной формой метрики Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера. Интересно отметить, что полученная метрика описывает стационарное пространство с плоскими трёхмерными сечениями. При этом, на больших расстояниях поле скоростей $v = (-2\Phi)^{1/2}$ описывает нормальную экспоненциально расширяющуюся СО (инфляция). Уравнение $v = c$, кроме внутренних горизонтов, определяет и внешний горизонт метрики (3.8).

4. Физико-геометрическое построение метрики Керра

«В литературе нет конструктивного аналитического вывода метрики (Керра), адекватного её физическому смыслу, и даже прямая проверка этого решения уравнений Эйнштейна связана с громоздкими вычислениями». Эту цитату из второго тома известного курса теоретической физики [17] (с.415) приводит Чандрасекар в своей монографии [18] (с.5) в связи с проблемой вывода метрики Керра. Далее он утверждает, что в его работе «вывод метрики Керра осуществляется довольно просто на основе разумных математических и физических предположений». Тем не менее, вид промежуточных выражений и способ их получение показывает, что не удаётся избежать громоздких вычислений, и вывод метрики остаётся формальным. Физическое же содержание найденной метрики обнаруживается лишь при дополнительном анализе.

Предложенный здесь «физико-геометрический» вывод метрики Керра состоит из двух этапов. Первый – это построение на основе свободно движущихся частиц СО с дифференциальным вращением, которая является кинематической моделью конфигурации со спином. Второй – включение гравитационного взаимодействия методом ЗЛ. В этом подразделе мы полагаем $c = 1$.

Искомая СО должна быть асимптотически невращающейся. Это исключает из рассмотрения вращение с постоянной угловой скоростью. Более того, СО должна быть реализована множеством свободных пробных частиц. Поэтому рассмотрим в ньютоновском пространстве стационарный поток свободных частиц, которые движутся с единичной скоростью из бесконечности, послойно достигая области локализации D. Траектория каждой частицы полностью определяется направляющим вектором $\vec{n}$ ($\vec{n}^2 = 1$) и «прицельным вектором» $\vec{r}_0$. Последний ортогонален $\vec{n}$, а его величина задаёт минимальное расстояние, на котором частица пролетает мимо центра $\vec{r} = 0$. Пусть это расстояние для частиц слоя достигается в момент $t = T$, где T параметризует слои. Тогда траектории частиц можно представить в виде трехпараметрического семейства прямых

$$\vec{r} = \vec{r}(t, T, \theta, \alpha) = (T - t)\vec{n} + \vec{r}_0, \tag{4.1}$$

где

$$\vec{n} = \vec{n}(\alpha\,, \theta) = \vec{e}(\alpha)\sin\theta + \vec{k}\cos\theta\,, \qquad \vec{e}(\alpha) = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\sin\alpha. \tag{4.2}$$

Здесь $\{\vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\}$ — орты декартовой СК, $\{\theta, \alpha\}$ — параметры, $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\theta, \alpha)$. Если $\vec{r}_0 = 0$, то частицы послойно фокусируются в центре $\vec{r} = 0$ в моменты $t = T$ и область локализации D вырождается в точку. В этом случае каждый пучок потока частиц является гомоцентрическим, а параметры θ и α — угловые координаты сферической СК.

Если $\vec{r}_0 \neq 0$, то фокусировка потока нарушается, также как и сферическая симметрия системы. Пусть частицы потока достигают минимального расстояния от центра $\vec{r} = 0$ в плоскости $z = 0$. Тогда $\vec{r}_0$ лежит в плоскости $z = 0$ и ортогонален орту $\vec{k}$. Следовательно, $\vec{r}_0$ пропорционален $[\vec{k}, \vec{n}]$ так, что $\vec{r}_0 = a(\theta, \alpha)[\vec{k}, \vec{n}]$, где $a(\theta, \alpha)$ – некоторая функция. В случае аксиально-симметричной системы можно положить $\vec{r}_0 = a[\vec{k}, \vec{n}]$, где a — некоторая постоянная. Таким образом, «расфокусированный» аксиально-симметричный поток частиц описывается семейством прямых

$$\vec{r} = (T - t)\vec{n}(\alpha\,, \theta) + a[\vec{k}, \vec{e}(\alpha)]\sin\theta, \tag{4.3}$$

где параметры θ, α нельзя интерпретировать как угловые координаты сферической СК. Траектории частиц проходят мимо центра $\vec{r}=0$ на расстоянии $r_0 = |\vec{r}\,|_{|t=T} = a\sin\theta$ с областью локализации в виде диска $D : \{z=0,\ 0 \le x^2+y^2 \le a^2\}$.

Рассмотрим кинематические и динамические характеристики системы. Для этого введем обозначения

$$r = T - t\,, \qquad R^2 = r^2 + a^2\,, \tag{4.4}$$

и запишем уравнения траекторий частиц потока в координатном виде

$$x = (r\cos\alpha - a\sin\alpha)\sin\theta\,,\ \ y = (r\sin\alpha + a\cos\alpha)\sin\theta\,,\ \ z = r\cos\theta\,.$$

В комплексное форме они запишутся так:

$$x + iy = (r + ia)e^{i\alpha}\sin\theta, \quad z = r\cos\theta. \tag{4.5}$$

Исключая параметры θ и α, получаем уравнение поверхности

$$\frac{x^2+y^2}{R^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \tag{4.6}$$

постоянного r (или t). Таким образом, фронты распространения слоев частиц образуют семейство софокусных сплюснутых эллипсоидов вращения. При $t = T$ имеем $r = 0$ и эллипсоиды вырождаются в диск $D : \{z=0,\ 0 \le x^2+y^2 \le a^2\}$.

Исключая параметры r и α, получаем поверхности постоянного θ:

$$\frac{x^2+y^2}{\sin^2\theta} - \frac{z^2}{\cos^2\theta} = a^2 \tag{4.7}$$

которые образуют семейство софокусных однополостных гиперболоидов вращения, а траектории (4.5) являются их прямолинейными образующими. Поверхности $r = const$ и $\theta = const$ изображены на рис. 1.

Перейдем к координатам $\{r,\ \theta,\ \varphi\}$ по формулам:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{4.8}$$

В этой СК уравнения (4.6) и (4.7) задают координатные поверхности $r = \mathrm{const}$ и $\theta = \mathrm{const}$. Здесь φ — угловая координата, связаная с переменной α соотношением

$$\varphi = \alpha + \arctan(a/r)\,, \tag{4.9}$$

которое вместе с (4.4) определяет траектории движения частиц в координатах (4.8). Поле скоростей $\vec{V} = d\vec{r}/dt = -\vec{n}(\alpha,\theta)$ этих частиц в координатах $\{r,\ \theta,\ \varphi\}$ имеет компоненты

$$V^1 = \dot{r} = -1, \quad V^2 = \dot{\theta} = 0, \quad V^3 = \dot{\varphi} \equiv \omega = a/R^2\,, \tag{4.10}$$

где точка – производная по t. Мы видим, что семейство эллипсоидов (4.6) образует поверхности постоянной угловой скорости $\omega(\vec{r}) = \mathrm{const}$, причём $0 \le |\omega| \le 1/a$.

В координатах (4.8) евклидова метрика ${}^{(3)}ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ принимает вид

$${}^{(3)}ds^2 = R^{-2}\rho^2 dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2, \tag{4.11}$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$. Отсюда для линейной скорости V вращения эллипсоидов получаем

$$V = \sqrt{g_{33}}\,V^3 = \omega(r)R\sin\theta = (a/R)\sin\theta. \tag{4.12}$$

Если m — масса частиц, то для их импульса $\vec{P}$ и момента импульса $\vec{L}$ находим

$$\vec{P} = -m\vec{n}(\alpha,\theta)\,, \qquad \vec{L} = [\vec{r},\vec{P}] = ma(\vec{k}\sin\theta - \vec{e}(\alpha)\cos\theta)\sin\theta. \tag{4.13}$$

Отметим, что $|\vec{P}| = m\,, L = |\vec{L}| = ma\sin\theta$ и $L_z = ma\sin^2\theta = m\omega R^2\sin\theta$, поэтому $0 \le |L_z| \le ma$, $0 \le |\vec{L}| \le ma$. Минимальный момент импульса $L = 0$ имеют частицы, движущиеся вдоль оси z.

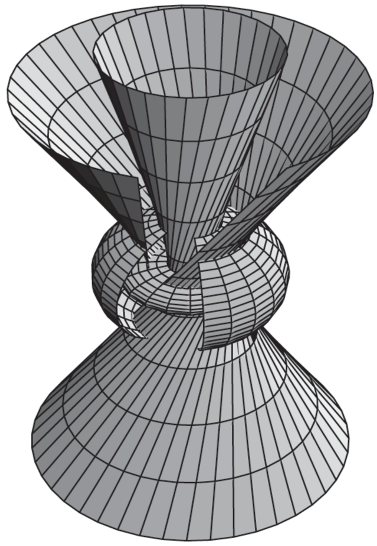

Рис. 1. Графическая иллюстрация СО с дифференциальным вращением, которая реализована свободными пробными частицами, движущимся по прямолинейным образующим семейства гиперболоидов вращения $\theta = const$.

Максимальный момент импульса $L = ma$ оказывается у частиц, которые движутся в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ $(z = 0)$, причём их траектории имеют максимальное прицельное расстояние $r_0 = a$ от оси z.

В модели непрерывно распределённой пыли с полем скоростей (4.10) и плотностью масс $\mu = \mu(r, \theta, t)$ имеем следующий закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\rho^2\right) = 0. \tag{4.14}$$

Решение уравнения непрерывности $\mu = \mu(r, \theta, t)$, которое в пределе $a = 0$ переходит в сферически-симметричное решение $\mu = \mu(r, t)$, можно взять в виде

$$\mu = \frac{1}{4\pi\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}M(r+t), \tag{4.15}$$

где $M(r+t)$ — масса пыли, которая находится внутри эллипсоида с $r = \mathrm{const} - t$ в момент времени t. Введем вектор плотности орбитального момента импульса пыли $\vec{l} = \mu\,[\vec{r}, \vec{v}]$. Тогда собственный момент импульса $\vec{L}$ конфигурации равен

$$\vec{L} = \int\limits_0^\infty dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^\pi d\theta \rho^2 \sin\theta\, \vec{l}\; = \frac{2}{3}\,aM\vec{k}\,, \tag{4.16}$$

где $M = \lim\limits_{r\to\infty} M(r+t)$ — полная масса конфигурации.

Таким образом, построенная конфигурация состоит из непрерывного семейства «радиально» падающих с единичной скоростью эллипсоидальных пылевых слоев, которые, в свою очередь, вращаются относительно оси z с угловой скоростью $\omega = a/R^2$. Собственный момент импульса $\vec{L}$ конфигурации – это результат усреднения по всем частицам, т.е. коллективный эффект. СО, связанная с указанным множеством частиц, является моделью падающей СО с дифференциальным вращением.

«Включим» теперь гравитационное взаимодействие в исходном ньютоновском пространстве. Эту процедуру необходимо выполнить таким образом, чтобы искомое поле скоростей частиц параболической СО не нарушало симметрии конфигурации, т.е. было бы «радиальным». Это означает, что требуется найти ньютоновский потенциал Φ, согласованный с указанным движением. Для его нахождения рассмотрим нерелятивистское уравнение ГЯ для частицы массы m в гравитационном поле Φ, записанное в координатах $\{r, \theta, \varphi\}$. С помощью метрики (4.11) находим:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\frac{R^2}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + m\Phi = 0. \tag{4.17}$$

Потенциал Φ подчиняется условиям: a) удовлетворяет уравнению (1.20) для метрики (4.11), b) при $a = 0$ совпадает с ньютоновским потенциалом (1.28) частицы массы M, c) уравнение (4.17) с этим Φ допускает «радиальные» траектории, или, другими словами, разделение переменных. Этим условиям удовлетворяет потенциал

$$\Phi = -\kappa M r/\rho^2\,, \tag{4.18}$$

который получается комплексным преобразованием $z \to z - \imath a$ потенциала (1.28) [13]. При этом $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \to r - \imath a\cos\theta$ и действительная часть величины $\kappa M/(r - \imath a\cos\theta)$ даёт (4.18). Ищем решение уравнения (4.17) в виде $S = -E_n t + m\sigma(r)$. Для частиц с $E_n = 0$ находим $\partial\sigma/\partial r = \sqrt{r_g r}/R$ и

$$V_{nr}^2 = (\partial\sigma/\partial r)^2 g^{rr} = r_g r/\rho^2\,, \tag{4.19}$$

где $r_g = 2\kappa M$, $g_{rr} = (g^{rr})^{-1} = \rho^2/R^2$.

Перейдем теперь в пространстве Минковского к СО, связанной с семейством эллипсоидов (4.6), которые вращаются с угловой скоростью $\omega = a/R^2$. Для этого в интервале Минковского $ds^2 = dt^2 -^{(3)} ds^2$ (где ${}^{(3)}ds^2$ — метрика (4.11)), с помощью локального преобразования Лоренца с параметром $V = (a/R)\sin\theta$, перейдем от координатного базиса $\{dt,\ dr,\ d\theta,\ d\varphi\}$ к неголономному базису 1-форм, задающего СО с дифференциальным вращением:

$$\theta^0 = \frac{dt - V dl}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{R}{\rho}(dt - a\sin^2\theta d\varphi)\,, \qquad \theta^1 = \frac{\rho}{R}\,dr\,,$$
$$\theta^2 = \rho d\theta\,, \qquad \theta^3 = \frac{dl - V dt}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{\sin\theta}{\rho}(R^2 d\varphi - a dt)\,, \tag{4.20}$$

где $dl = R\sin\theta d\varphi$ — элемент физического расстояния, соответствующий углу $d\varphi$. В новом базисе метрика Минковского имеет форму (1.14), где базис ковекторов $\{\theta^a\}\,(a = 0,1,2,3)$ определен в (4.20). Для «обратной метрики» получаем:

$$(\partial_{S_0})^2 = (\vec{e}_0)^2 - (\vec{e}_1)^2 - (\vec{e}_2)^2 - (\vec{e}_3)^2\,, \tag{4.21}$$

где $\{\vec{e}_a\}$ — векторный базис, взаимный базису 1-форм (4.20) ($\theta^a(\vec{e}_b) = \delta^a_b$), имеет вид

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{\rho}\left(R\partial_t + \frac{a}{R}\,\partial_\varphi\right), \quad \vec{e}_1 = \frac{R}{\rho}\,\partial_r\,,$$
$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\rho}\,\partial_\theta\,, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\varphi + a\sin\theta\,\partial_t\right). \tag{4.22}$$

Легко видеть, что в соответствующем релятивистском уравнении ГЯ

$$\frac{1}{\rho^2}\left\{\left(R\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{a}{R}\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \varphi} + a\sin\theta\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2\right\} = m^2 \tag{4.23}$$

переменные разделяются.

Перейдем к процедуре лоренцевой деформации (1.15) метрики (1.14). Скорость v в формулах (1.15) является результатом релятивистского сложения двух скоростей: скорости «радиального» движения (4.19), свободно падающих частиц в ньютоновском гравитационном поле (4.18), и линейной скорости переноса V (4.12), обусловленной вращением СО. Поэтому, используя формулы релятивистского сложения скоростей [17], для результирующей радиальной скорости находим

$$v = V_{nr}\sqrt{1-V^2} = \sqrt{r_g r}/R\,. \tag{4.24}$$

Подстановка 1-форм (4.20) и скорости (4.24) в метрику (1.13) даёт

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\varphi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(R^2 d\varphi - a dt)^2\,, \tag{4.25}$$

где $\Delta = R^2 - r_g r$. Найденная метрика, после перехода к координатному базису $\{dt,\ dr,\ d\theta,\ d\varphi\}$, принимает стандартный вид метрики Керра в координатах Бойера-Линдквиста [17].

Таким образом, конструирование метрики Керра начинается с построения в пространстве Минковского СО с дифференциальным вращением, которая является кинематической моделью пробной конфигурации со спином, и завершается включением гравитационного взаимодействия, собственно методом ЗЛ.

В связи с рассмотренной здесь конфигурации со спином, уместно отметить, что в работах [19–21] также, но с других позиций, рассматривались частице-подобные модели со спином на основе метрик Керра и Керра-Ньюмена.

Заключение

В данной работе рассмотрены вопросы обоснования и применимости эвристического геометрического метода нахождения точных вакуумных решений уравнений Эйнштейна – метода Зоммерфельда-Ленца (ЗЛ). Предложен ряд модификаций и обобщений метода ЗЛ и рассматриваются его приложения.

Здесь введены методы «галилеевой» и «лоренцевой деформаций» пространства Минковского и найден закон преобразования ТЭИ при «лоренцевой деформации». Показано, что метрики Шварцшильда, Рейсснера-Нордстрема, де-Ситтера, а также их композиции, могут быть полученные методом ЗЛ. С другой стороны, решения Толмена, Фишера, внутреннее решение Шварцшильда и прочие решения, не совместные с требованием (2.9), не могут быть получены этим методом. С помощью модифицированного метода ЗЛ построены метрики Рейсснера-Нордстрема-де Ситтера.

На основе множества свободных пробных частиц СТО построена неинерциальная СО с дифференциальным вращением, которая может быть моделью конфигурации со спином. С помощью обобщения метода ЗЛ на вращающиеся СО предложен «физико-геометрический» вывод метрики Керра. В работе дано естественное кинематическое истолкование эллипсоидальной формы поверхностей постоянного вращения, СО с дифференциальным вращением, связь параметра «сплющенности» эллипсоидов a с моментом пробных частиц СО (или их прицельным расстоянием). Метод даёт возможность уточнить смыслы СК и СО, используемых при получении метрики Керра (4.25) и её плоских аналогов (1.14), (4.11). Он позволяет выяснить смысл локального дифференциального базиса в метрике (4.25), как следствия локального преобразования Лоренца (4.20) к вращающейся СО, и прояснить трактовку самой метрики Керра в форме (4.25).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ori A. The general solution for spherical charged dust // Class. Quantum Grav. 1990. Vol. 7. P. 985–998.
2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948. 316 с.
3. Вейнберг С. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.
4. Гладуш В.Д. Дополнительная симметрия сферически-симметричных конфигураций, законы сохранения и их применение // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. Вып. 1. с. 48–59.
5. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИЛ, 1958. 429 с.
6. Мирианашвили М.М., Гобеджишвили М.С. // Известия АН ГССР. 1964. Т. 33. С. 3.
7. Мирианашвили М.М., Кирия В.С., Гобеджишвили М.С., Кереселидзе А.Б. О неинтегрируемых преобразованиях в общей теории относительности // Современные проблемы гравитации. Тбилиси: Тбилисский ун-т, 1967. С. 135–155.
8. Мицкевич Н.В. О получении точных решений уравнений Эйнштейна по методу «падающего ящика» // Исследования по классической и квантовой теории гравитации. Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1985. С. 48–56.

9. Зельманов А.Л., Агаков В.Г. Элементы общей теории относительности. М.: Наука, 1989. 240 с.
10. Коркина М.П., Гладуш В.Д. Энергия релятивистской частицы в общей теории относительности // Укр. Физ. Журн. 1974. Т. 19. № 1. С. 81–84.
11. Гладуш В.Д. Метод «падающего ящика» и его обобщение // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Фізика. Радіоелектроніка. 1998. Вип.2. С. 90–107.
12. Гладуш В.Д. Метод «падаючого ящика» у загальній теорії відносності // Украинский физичекий журнал. 1998. Т. 43. № 8. С. 881–889.
13. Мицкевич Н.В. Вращение в общей теории относительности // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. 1976. Вып.7. М.: Атомиздат, С. 15–34.
14. Painlevé P. La mécanique classique et la théorie de la relativité // Comptes Rendus Acad. Sci. 1921. Vol. 173. P. 677–680.
15. Carter B. Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's gathers // Commun. Math. Phys. 1968. Vol. 10. P. 280–310.
16. Carter B. The commutation property of a stationary axisymmetric system // Commun. Math. Phys. 1970. Vol. 17. №3 P. 233–238.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
18. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. Т.1. М.: Мир, 1986. 280 с.
19. Буринский А.Я. Микрогеон со спином // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1974. т. 66. С. 406.
20. Буринский А.Я. Источник геометрии Керра // Известия вузов. Физика. 1988. № 5. с. 82.
21. Burinskii A.Ya. The problem of the source of the Kerr-Newman metric: The volume Casimir effect and superdense pseudovacuum state // Physics Letters B. 1989. Vol. 216. № 1–2. P. 123-126.

Поступила в редакцию 25.02.2013

Гладуш Валентин Данилович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики, Днепропетровский Национальный университет, 49010, Украина, г. Днепропетровск, пр. Гагарина, 72.
E-mail: vgladush@gmail.com

V. D. Gladush
Sommerfeld-Lenz method in General Relativity and its generalization

Keywords: reference frame, local Lorentz transformation, Sommerfeld-Lenz method, Kerr metric.

PACS: 04.20.-q, 04.20.Jb

We consider the applicability and justification of the Sommerfeld-Lenz method of obtaining exact solutions of Einstein equations as well as some of its applications. The method consists in introducing a parabolic reference frame specified by the set of freely falling particles in the given Newtonian space. Further on, using the equivalence principle, we construct the corresponding analog of such reference frame in a stationary space-time of General Relativity. The procedure for finding a metric is reduced to the construction of the corresponding «local Galileo deformation» or «Lorentz deformation» of the Minkowski metric.

We suggest a number of modifications and generalizations of the Sommerfeld-Lenz method and consider its applications. Generalizing this method to spherically symmetric configurations of General Relativity with matter, we find the law of transformation of energy-momentum tensor owing to «Lorentz deformation». It is shown that the metrics of Schwarzschild, Reissner-Nordström, de Sitter, and their compositions can be obtained by the Sommerfeld-Lenz method. On the other hand, Tolman, Fisher solutions, and internal Schwarzschild solution can not be obtained by this method. In this way the metric of Reissner-Nordström-de Sitter is built with using a modified Sommerfeld-Lenz method.

Then on the basis of set of free test particles of the Special Relativity the non-inertial reference frame with differential rotation is built. This reference frame can be interpreted as a model of configuration with spin. The «physical-geometric» derivation of Kerr metric is proposed through generalizing the Sommerfeld-Lenz method to rotating reference frame . We give a natural kinematic interpretation for the ellipsoidal shape of the surfaces of constant rotation and for the reference frame with the differential rotation is obtained. Also the connection of the «flattening» parameter of ellipsoids with a momentum of test particles (or impact parameter). Thus, the Sommerfeld-Lenz method allows to make a simple and clear procedure of obtaining the Kerr metric.

REFERENCES

1. Ori A. The general solution for spherical charged dust. *Class. Quantum Grav*, 1990, vol. 7, pp. 985–998.

2. Eisenhart L.P. *Riemannian Geometry*. Prinston University Press, 1948, 158 p.

3. Weinberg S. *Gravitation and Cosmology*. New York: J.Wiley and Sons, 1972, 696 p.

4. Gladush V.D. Dopolnitel'naya simmetriya sfericheski-simmetrichnykh konfiguratsiy, zakony sokhraneniya i ikh primenenie [Additional symmetry of spherically symmetric configurations, conservation laws and their application]. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya* [Space, time and fundamental interactions], 2012. N 1. pp. 48–59. (in Russian)

5. Sommerfeld A. *Elektrodynamik*. Vorlesungen uber theoretische Physik, Band 3, Klemm Verlag, Erscheinungsort, 1948.)

6. Mirianashvili M.M., Gobedzhishvili M.S. *Izvestiya AN GSSR*, 1964. vol. 33. p. 3.

7. Mirianashvili M.M., Kiriya V.S., Gobedzhishvili M.S., Kereselidze A.B. O neintegriruemykh preobrazovaniyakh v obshchey teorii otnositel'nosti [About nonintegrable transformations in general relativity]. *Sovremennye problemy gravitatsii* [Modern Problems of Gravitation]. Tbilisi: Tbilisskiy universitet, 1967. pp. 135–155.

8. Mitskevich N.V. About obtaining exact solutions of Einstein's equations by the method of «falling box», *Issledovaniya po klassicheskoy i kvantovoy teorii gravitatsii*. Dnepropetrovsk: Dnepropetrovskiy universitett, 1985. pp. 48–56.

9. Zel'manov A.L., Agakov V.G. *Elementy obshchey teorii otnositel'nosti* (Elements of the general relativity). Moscow: Nauka, 1989, 240 p.

10. Korkina M.P., Gladush V.D. Energiya relyativistskoy chastitsy v obshchey teorii otnositel'nosti. *Ukrainskiy fizicheskiy zhurnal*. 1974. vol. 19. № 1. pp. 81–84.

11. Gladush V.D. The method of «falling box» and its generalization. *Visnik Dnipropetrovs'kogo universitetu*. Fizika. Radioelektronika, 1998, no. 2, pp. 90–107.

12. Gladush V.D. Metod «padayuchogo yashchika» u zagal'niy teoriї vidnosnosti. *Ukrainskiy fizicheskiy zhurnal. 1998. vol. 43. № 8. pp. 881–889*.

13. Mitskevich N.V. Rotation in general relativity. *Problemy teorii gravitatsii i elementarnykh chastits*, no.7, Moscow: Atomizdat, 1976, pp. 15–34.

14. Painlevé P. La mécanique classique et la théorie de la relativité. *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1921, vol. 173, pp. 677–680.

15. Carter B. Hamilton-Jacobi and Schrodinger separable solutions of Einstein's gathers. *Commun. Math. Phys.*, 1968, vol. 10. pp. 280–310.

16. Carter B. The commutation property of a stationary axisymmetric system. *Commun. Math. Phys.*, 1970, vol. 17, №3, pp. 233–238.

17. Landau L.D., Lifshitz E.M., *Classical Field Theory*. Pergamon Press, London, 1961.

18. Chandrasekhar S. *The mathematical theory of black holes*. New York: Oxford university Press, 1983.

19. Burinskii A.Ya. Microgeons with spin. *Sov. Phys. JETP*. 1974. Vol. 39. P. 193.

20. Burinskii A.Ya. The source of the Kerr geometry. *Sov. Phys. J.* (USA) 1988. Vol. 31. № 5. P. 410-415.

21. Burinskii A.Ya. The problem of the source of the Kerr-Newman metric: The volume Casimir effect and superdense pseudovacuum state. *Physics Letters B*. 1989. Vol. 216. № 1–2. P. 123–126.

Received 25.02.2013

Gladush Valentin Danilovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical Physics, Dnepropetrovsk National University, Gagarin Ave, 72, Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine.
E-mail: vgladush@gmail.com