УДК 530.12: 531.51

А. М. Баранов, [1] ***И. В. Жабрун*** [2]

ОПИСАНИЕ ОТКРЫТОЙ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

Рассматривается открытая космологическая модель, заполненная веществом и излучением, на что указывает галилеева асимптотика. Метрика модели взята в форме Фока как метрика, конформная метрике Минковского. Описание Вселенной найдено в классе Бесселевых функций. Исследование показывает, что такая модель открытой Вселенной не может существовать без вещества.

Ключевые слова: космология, открытая модель вселенной, точные решения, теория катастроф

PACS: 04.20.Cv; 98.80.Jk; 05.45.-a

Введение

Для модели открытой Вселенной в [1] в параметрическом виде приводятся как решение для некогерентной пыли, так и для равновесного излучения в синхронной системе отсчета. Прежде всего, параметрическое описание неудобно для исследования, так как затрудняет исследование. Во-вторых, каждое из упомянутых решений космологических уравнений тяготения справедливо для определенной области изменения временного параметра и не переходит одно в другое, так как эти решения отвечают разным уравнениям состояния. Другими словами, каждое решение описывает конкретную материальную среду.

Поэтому желательно было бы найти решение, которое исключало бы оба выше упомянутые замечания и опиралось бы не на конкретное уравнение состояния, а на некоторую функцию состояния, которая в различных областях изменения переменной и параметров переходила бы в соответствующие уравнения состояний.

Примером такого решения может служить точное решение уравнений Эйнштейна для открытой модели Вселенной с излучением [2]. Это решение описывает для больших времен асимптотическое поведение пылевой материи (с давлением пыли $p_{dust} = 0$) и равновесного излучения с уравнения состояния $p_{rad} = \varepsilon_{rad}/3$. Здесь p_{rad} - давление и ε_{rad} - энергетическая плотность равновесного излучения.

Подход [2] связан с работами [3]– [5], в котором метрика, конформная метрике Минковского (конформно-галилеева метрика), взята для описания открытой космологической модели (с отрицательной скалярной кривизной)

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{0.1}$$

где $\sigma = \sigma(S)$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1; -1; -1; -1)$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице.

В частности, решение [2] имеет вид

$$exp(2\sigma) = [(1/cos\alpha_0) \cdot cos(B/S + \alpha_0)]^4 = \left[\sqrt{1 + (A/B)^2} \cdot cos(B/S + \alpha_0)\right]^4, \tag{0.2}$$

где $tg\alpha_0 = A/B$; B – параметр, связанный с равновесным излучения; A – постоянная, связанная с наблюдаемой плотностью вещества (некогерентная пыль) и входящая в решение Фридмана для открытой модели Вселенной (см., [4]), которое может быть получено из (0.2) при $B \to 0$,

$$exp(2\sigma) \to exp(2\sigma_F) = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4. \tag{0.3}$$

[1] E-mail: alex_m_bar@mail.ru

[2] E-mail: jivkr@mail.ru

Необходимо отметить, что метрика (0.1) в форме Фока может быть сведена к записи метрики в синхронной системе отсчета из [1]

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + sh\chi^2(d\theta^2 + sin\theta^2 d\varphi^2)) \tag{0.4}$$

путем перехода в кинеметрическую систему отсчета[3] [6]. Здесь t – временная переменная; a, χ, θ, φ суть четырехмерные сферические координаты, где $a(t)$ есть радиус кривизны Вселенной.

Кроме того, решение [2] в записи (0.2) можно связать с функцией Бесселя полуцелого порядка. Это наводит на мысль использовать функции Бесселя для более общего описания Вселенной и попытаться связать порядок функции Бесселя с различными состояниями материи [8].

1. Уравнения тяготения и функции Бесселя

Далее возьмем тензор энергии-импульса (ТЭИ) в приближении идеальной жидкости как источник гравитационного поля

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; $u_\mu = exp(\sigma)\, b_\mu$ – 4-скорость с $u_\mu u^\mu = 1$; $b_\mu = S_{,\mu}; b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ – 3-проектор на 3-пространство, а $b_{\mu\nu}u^\mu = 0$. Все физические величины (плотность энергии, давление и т.д.) суть функции переменной S.

Теперь запишем уравнения Эйнштейна в виде

$$2\left(\sigma'' - \frac{\sigma'}{S} - (\sigma')^2\right) b_\mu b_\nu -$$

$$-2\delta_{\mu\nu}\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

где штрих обозначает производную по переменной S, $\varkappa = 8\pi$ – эйнштейновская гравитационная постоянная.

После расщепления гравитационных уравнений (1.2) путем проектирования на временноподобную мировую линию и пространственноподобную поверхность, ортогональную временноподобному направлению с помощью монадного формализма (см., например, [7]), придем к двум уравнениям

$$3\left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2\right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma), \tag{1.3}$$

$$-2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = \varkappa p \cdot exp(2\sigma) \equiv 4h(S). \tag{1.4}$$

В дальнейшем уравнение (1.3) будет определением плотности энергии, а уравнение(1.4) – некоторой функцией $4h(S)$.

Уравнение (1.4) преобразуется в уравнение типа Штурма-Лиувилля заменой $\sigma = 2\ln y$,

$$y'' + \frac{2}{S}y' + h(S)y = 0. \tag{1.5}$$

Введем безразмерную переменную $x = \alpha S^b$ и функцию $y(x) = x^a z(x)$, где α, a, b суть постоянные. Тогда уравнение (1.5) переписывается в этом случае как

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\left(1 + 2a + 1/b\right)\frac{dz}{dx} +$$

$$+\left(\frac{h(x)}{\alpha^{2/b}b^2x^{2(1-1/b)}} + \frac{a(a+1/b)}{x^2}\right)z = 0. \tag{1.6}$$

Если наложить ограничения на коэффициенты этого уравнения, то тогда (1.6) может быть преобразовано к уравнению Бесселя произвольного порядка.

Итак, потребуем

[3] Понятия кинеметрической системы отсчета и кинеметрических координат см., например, [7].

$$(1+1/b+2a)=1,\ a(a+1/b)=-\nu^2; \tag{1.7}$$

$$h(x)=\alpha^{2/b}b^2x^{2(1-1/b)}. \tag{1.8}$$

Из этих условий находим следующие соотношения:

$$\nu^2=1/4b^2=a^2,\ x=(\alpha S)^b=\xi^b; \tag{1.9}$$

$$\varkappa p=\frac{\alpha^{\pm 4\nu}}{\nu^2}x^{2(1\mp 2\nu)}exp(-2\sigma), \tag{1.10}$$

а уравнение (1.6) редуцируется в уравнение Бесселя произвольного порядка ν

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)z=0. \tag{1.11}$$

Асимптотически любое решение для открытой космологической модели должно проходить через решение Фридмана (0.3) для открытой Вселенной, а асимптотическое условие галилеевости, когда $S\to\infty,\ x\to 0$, требует выполнения условия $exp(2\sigma)\to 1$.

При соблюдении этих требований находим $\nu=-1/2b$, и общее решение уравнений Эйнштейна может быть записано для каждого значения ν как

$$exp(2\sigma_{(\nu)})=\left(\xi^{-\frac{1}{2}}z_{(\nu)}\right)^4=$$

$$=x^{4\nu}\left(C_1{}^{(\nu)}J_\nu(x)+C_2{}^{(\nu)}N_\nu(x)\right)^4, \tag{1.12}$$

где $C_1{}^{(\nu)}, C_2{}^{(\nu)}$ суть постоянные; $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ – функции Бесселя и Неймана соответственно; знак параметра b связан с выбором области изменения переменной x.

Кроме того, если мы примем во внимание граничные условия, тогда решение [2] реализуется здесь с $\nu=1/2$.

Однако асимптотическая форма решения (1.12), которое проходит через решение Фридмана для открытой космологической модели, будет реализовываться для любого параметра ν со следующим выбором постоянных интегрирования:

$$C_1{}^{(\nu)}=-A\,\alpha\,2^\nu\,\Gamma(\nu+1)-C_2{}^{(\nu)}\,\mathrm{ctg}(\nu\pi); \tag{1.13}$$

$$C_2{}^{(\nu)}=-\frac{\pi}{2^\nu\,\Gamma(\nu)}, \tag{1.14}$$

где A – положительная постоянная из (0.3); $\Gamma(\nu)$ – Гамма-функция.

Когда $A=0$, асимптотика решения отличается от фридмановской (0.3) и соответствующий конформный множитель может быть записан как

$$y^4_{(\nu)}=exp(2\sigma_{(\nu)})\to\left(1-\frac{A_{(\nu)}}{S^{(1/\nu)}}\right)^4, \tag{1.15}$$

где $\nu\neq +1$; $A_{(\nu)}$ – ряд коэффициентов, которые зависят от параметра ν и отличаются от A.

Другими словами, если постоянная A отвечает за наличие вещества, то ее «выключение» из рассмотрения ($A=0$) должно приводить к появлению новых состояния материи, отличных от пыли и связанных с решением уравнения (1.11) для определенных значений параметра ν.

2. Функция состояния и теория катастроф

Введем функцию состояния как отношение давления p к плотности энергии ε,

$$\beta=p/\varepsilon. \tag{2.1}$$

В каждый момент S (или x), эта функция задает уравнение состояния. Таким образом функция β тесно связана с уравнением состояния.

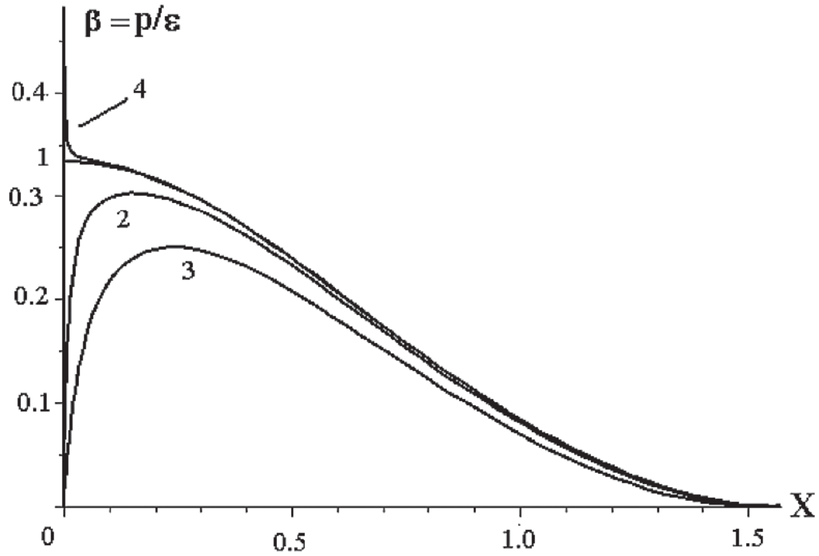

Рис. 1. Поведение функции состояния β как нестабильной катастрофы сборки.

В асимптотическом пределе, когда $S \to \infty$ (или $x \to 0$) и $A = 0$, функция β может быть записана как

$$\frac{p}{\varepsilon} = \beta \to \frac{1}{3}\frac{(1-\nu)}{\nu}. \tag{2.2}$$

Условие энергодоминантности $|\ \beta\ | \leq 1$ накладывает ограничения на параметр ν $(\nu \neq +1)$:

$$-\infty < \nu \leq -1/2; \quad 1/4 \leq \nu < \infty. \tag{2.3}$$

Физическая интерпретация может быть понята в асимптотической области, где мы можем сравнить физические состояния и порядки Бесселевых функций.

Так, например, для $\nu = -1/2 \Leftrightarrow \beta = -1$ (физический вакуум); $\nu = -1 \Leftrightarrow \beta = -2/3$ (доменная стенка); $\nu = \pm\infty \Leftrightarrow \beta = -1/3$ (релятивистская струна); $\nu = +1 \Leftrightarrow \beta = 0$ (некогерентная пыль); $\nu = +1/2 \Leftrightarrow \beta = +1/3$ (релятивистский газ); $\nu = +1/3 \Leftrightarrow \beta = +2/3$ (нерелятивистский вырожденный газ); $\nu = +1/4 \Leftrightarrow \beta = +1$ (сверхжесткое состояние материи). Следует подчеркнуть, что указанное соответствие понимается в предельном смысле.

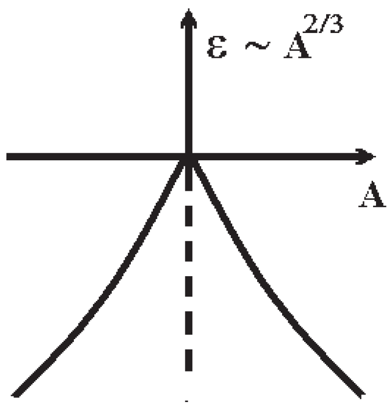

Рис. 2. Проекция катастрофы сборки на плоскость управляющих параметров ε и A.

В качестве примера на Рис.1 изображено семейство кривых функции состояния β для различных значений параметра A $(\nu = 1/2)$. С точки зрения теории катастроф [9] рис.1 – типичная диаграмма неустойчивой симметричной бифуркационной точки с параметром «дефекта» A. Если разложить функцию ε в степенной ряд по x вблизи каждого значения A и ограничиться полиномами четвертой степени, то получим катастрофу сборки [9]. Проекция этой катастрофы расположена на плоскости управляющих параметров ε и A (см. Рис.2).

В частности, рассмотрение случая поведения функции состояния β для открытой Вселенной, которая заполнена только релятивистским газом (электромагнитным равновесным излучением) приводит к выводу о неустойчивости такой космологической модели при изменении фридмановского параметра A (см. Рис.1), котрый связан с пылевидной материей. Например, кривая 1 соответствует $A = 0$ или $\beta = 1/3$. Кривые 2 и 3 с $A = 0.05$ и $A =, 0.01$ описывают устойчивый вариант модели Вселенной. Кривая 4 соответствует нефизической модели Вселенной с отрицательным значением $A = -0.0005$, но учет этой кривой делает описание модели математически более полным.

Другими словами, чисто электромагнитное состояние космологической модели Вселенной (то есть заполнение модели только равновесным релятивистским газом) не является устойчивым состоянием, так как малейшая добавка вещества в такую модель катастрофическим образом меняет поведение функции состояния.

Следовательно, стабильная открытая Вселенная, заполненная только электромагнитным равновесным излучением, не может существовать.

3. Заключение

В работе рассматривается открытая космологическая модель с отрицательной скалярной кривизной. Метрика взята в форме Фока как метрика, конформная метрике Минковского. Такой выбор метрики позволяет нам написать гравитационные уравнения в более простой форме. Точное решение гравитационных космологических уравнений может быть найдено в классе Бесселевых функций.

Исследование решения приводит к утверждению, что «чисто электромагнитная» модель Вселенной (когда $A = 0$) является нестабильной моделью. Эта модель переходит в устойчивую космологическую модель при наличии небольших порций вещества. Таким образом, физически это означает, что Вселенная не может существовать без вещества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Классическая теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена//Изв. вузов. Физика. 1984. №7. С.32–35.
3. Infeld L., Schild A. A New Approach to Kinematic Cosmology // Phys. Rev. – 1945. V.68. №.11–12. P. 250–272.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. Изд-во Физ.-Мат. Лит, 1961. 563 с.
5. Tauber G.E. Expanding Universe in Conformally Flat Coordinates // J. Math. Phys., 1967. V.8. №.1. – P.118–123.
6. Баранов А.М. Конформно-галилеева метрика и кинеметрические системы отсчета // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №1. С. 37.
7. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
8. Baranov A.M., Zhabrun I.V. The description of conformally-flat open cosmological models by the Bessel functions // 14-я Российская гравитационная конференция (RUSGRAV-14): тез. докл.Междунар. конф. по гравитации, космологии и астрофизике. УлГПУ, Ульяновск, 2011. С.36-38.
9. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.

Поступила в редакцию 01.06.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Жабрун Игорь Валентинович, старший преподаватель,
Сибирский федеральный университет, 660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный,79.
E-mail: jivkr@mail.ru

A. M. Baranov, I. V. Zhabrun

A description of the open Universe model by the Bessel functions

Keywords: cosmology, open model of universe, exact solutions, catastrophe theory

PACS: 04.20.Cv; 98.80.Jk; 05.45.-a

For the open models of Universe there are solutions both for a noncoherent dust and for an equilibrium radiation which are written in a parametric form in a comoving synchronous reference frame. In the first place the parametric description makes many difficulties for an investigation. Secondly, the each from mentioned cosmological solutions of the gravitational equations is correctly only for the concrete interval of the time parameter change. And one from two solutions can not be converted to another solution because these solutions belong to different equations of state. In other words the each solution describes the concrete substance.

Therefore it is desirable to find solution which must exclude both above said remarks. By such an example can be the exact solution of the Einstein equations for the open cosmological model with radiation. This solution describes an asymptotical behaviour for the large times of the coherent dust (with a zero pressure) and the equilibrium radiation with an equation of state for ultrarelativistic gas. Such solution belongs to the Bessel functions class.

In the paper the open cosmological model with a negative scalar curvature is considered. A metric is taken in Fock's form as the conformal metric to the Minkowski metric (the conformally Galilean metric). Such choice of metric let us to write the gravitational equations in more simple form. The exact solution of the gravitational cosmological equations can be found in the Bessel functions' class.

The investigation of the open cosmological model with dust and radiation leads to a statement that the "purely electromagnetic"model of Universe (without a substance) is an unstable model. This cosmological model is reduced into stable cosmological model by small portions of the substance. So this physically means that the open Universe can not exist without the substance.

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical Theory of Fields*, (Nauka, 1988) (in Russian).

2. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Russ. Phys. J.*, 1984, vol.27, no.7, pp. 569–572.

3. Infeld L., Schild A. A New Approach to Kinematic Cosmology *Phys. Rev.*, 1945, vol.68, no.11–12, pp. 250–272.

4. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964, 2nd edition.

5. Tauber G.E. Expanding Universe in Conformally Flat Coordinates *J. Math. Phys.*, 1967, vol.8, no.1 pp. 118–123.

6. Baranov A.M. Conformally Galilean 4-metric and Kinemetric Reference Frames, *STFI*, 2013, no.1, pp. 37.

7. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p. (in Russian)

8. Baranov A.M., Zhabrun I.V. The description of conformally-flat open cosmological models by the Bessel functions *14-th Russian Gravitational Conference (RUSGRAV-14): Abstracts of Int. Conf. on Gravitation, Cosmology anf Astrophysics*, Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia, 2012, p.36-38.

9. Poston T., Stewart I. *Catastrophes theory and Its Applications*, London-San Francisco-Melbourne: Pitman, 1978, 580 p.

Received 01.06.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Siberian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

Zhabrun Igor Valentinovich, Siberian Federal University, 79 Svobodny Av., Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: jivkr@mail.ru