УДК 530.12; 530.51

***А. М. Баранов***[1]

# ДРУГОЙ ПОДХОД К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обычная алгебраическая классификация электромагнитного поля связана с задачей на собственные значения тензора электромагнитного поля, являющихся решением характеристического уравнения четвертого порядка. Показано, что такое уравнение может быть сведено к кубическому характеристическому уравнению (нормальной форме Вейерштрасса). В итоге приходим к задаче классификации электромагнитного поля, аналогичной задаче классификации поля тяготения по Петрову. Следовательно, получаем и аналогичные алгебраические типы электромагнитного поля: $I, Ia, D, N$. С точки зрения теории катастроф точка фазового перехода второго рода соответствует алгебраическому типу $N$ (плоской электромагнитной волны).

**Ключевые слова**: электромагнитное поле, алгебраическая классификация, теория катастроф.

**PACS**: 04.20.-q; 05.45.-a

## Введение

Обычно алгебраическая классификация электромагнитного поля связывается с решением характеристического алгебраического уравнения 4-го порядка при постановке задачи на собственные значения для антисимметричного тензора электромагнитного поля в пространства Минковского (см., например, [1]- [2])

$$\lambda^4 + I_1\lambda^2 - I_2 = 0, \qquad (0.1)$$

где $\lambda$ – собственные значения тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$, $I_1 = F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ и $I_2 = F^{\;*}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ суть соответственно инварианты электромагнитного поля, греческие индексы пробегают значения $0, 1, 2, 3$, звездочка $*$ обозначает дуальное сопряжение в пространстве-времени Минковского.

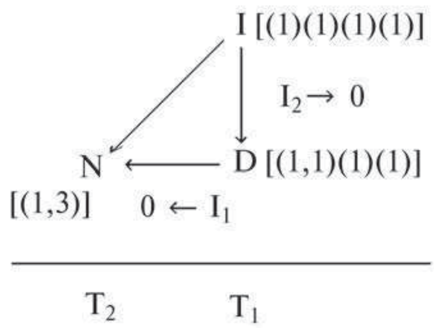


**Рис. 1.** Диаграмма алгебраической классификации электромагнитного поля для задачи на собственные значения тензора электромагнитного поля по аналогии с алгебраической классификации Петрова.

В итоге, электромагнитное поле может быть проклассифицировано по алгебраическим типам по аналогии с подходом Петрова к классификации гравитационного поля [4]. Результаты такой классификации электромагнитного поля приведены на рис.1 в виде диаграммы соответствующих связей между алгебраических типов электромагнитного поля [1], введенных по аналогии с классификацией гравитационного поля .

Однако согласно [3] возможно приведение произвольного многочлена 4-й степени к нормальной форме Вейерштрасса или кубическому многочлену.

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

## 1. Приведение к нормальной форме Вейерштрасса

Рассмотрим сначала многочлен $G(\lambda)$ 4-й степени с произвольными постоянными коэффициентами $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$

$$G(\lambda) = a_0\lambda^4 + 4a_1\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda + a_4 \tag{1.1}$$

и приведем его к кубическому многочлену согласно процедуре, изложенной в [3], когда один из корней $G(\lambda)$ отображается в бесконечно удаленную точку с помощью дробно-линейного преобразования переменной $\lambda$.

Пусть $\alpha$ – один из нулей многочлена $G(\lambda)$ , т.е. $G(\alpha) = 0$. Введем замену

$$\lambda = \alpha + 1/X. \tag{1.2}$$

Подставляя ее в (1.1) и приводя подобные члены с учетом $G(\alpha) = 0$, получим

$$G(X) = \left(1/X^4\right)\left(4A_1X^3 + 6A_2X^2 + 4A_3X + A_4\right), \tag{1.3}$$

где коэффициенты $A_1, A_2, A_3, A_4$ находятся путем дифференцирования исходного многочлена $G(\lambda)$ по $\lambda$ необходимое число раз при $\lambda \equiv \alpha$:

$$G'_\lambda(\alpha) \equiv 4A_1 = 4\left(a_0\alpha^3 + 3a_1\alpha^2 + 3a_2\alpha + a_3\right); \tag{1.4}$$

$$(1/2!)\, G''_\lambda(\alpha) \equiv 6A_2 = 6\left(a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2\right); \tag{1.5}$$

$$(1/3!)\, G'''_\lambda(\alpha) \equiv 4A_3 = 4\left(a_0\alpha + a_1\right); \tag{1.6}$$

$$(1/4!)\, G^{IV}_\lambda(\alpha) \equiv A_4 = a_0. \tag{1.7}$$

Считая, что $A_1 \neq 0$ , воспользуемся новой заменой

$$\Lambda = A_1X + A_2/2. \tag{1.8}$$

Если с самого начала в (1.1) потребовать выполнения равенства $G(\lambda) = 0$ , то после замены переменной приходим к кубическому уравнению, описывающую катастрофу сборки (одну из основных элементарных катастроф [5])

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = 0. \tag{1.9}$$

где коэффициенты $p$ и $q$ равны

$$p = -g_2/4; \quad q = -g_3/4, \tag{1.10}$$

где $g_2, g_3$ суть инварианты кривой 4-й степени, равные соответственно

$$g_2 \equiv 3A^2 - 4A_1A_3 = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3; \tag{1.11}$$

$$g_3 \equiv 2A_1A_2A_3 - A_2^3 - A_1^2A_4 = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Таким образом, окончательная запись кубического уравнения (1.9) зависит лишь от исходных коэффициентов многочлена $G(\lambda)$.

Применим теперь всю эту процедуру к характеристическому уравнению (0.1).

В этом случае $a_0 = 1$; $a_1 = a_3 = 0$; $6a_2 = I_1$; $a_4 = -I_2^2$. Поэтому для $\alpha \neq 0$ получаем

$$g_2 = \left(I_1^2/12 - I_2^2\right); \quad g_3 = -\left(I_1/6\right)\cdot\left(I_1^2/36 + I_2^2\right). \tag{1.13}$$

Дискриминант кубического уравнения (1.9) запишется через инварианты электромагнитного поля в виде

$$Q = (p/3)^2 + (q/2)^2 = \left(I_2^2/\left(6^3 \cdot 2^7\right)\right) \cdot \left(4I_2^2 + I_1^2\right)^2 \tag{1.14}$$

и всегда будет неотрицателен $Q \geq 0$.

Уравнение сепаратрисы задается условием $Q = 0$ , что эквивалентно обращению в нуль 2-го инварианта электромагнитного поля $I_2$ (вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ ортогональны). Тогда корни уравнения (1.9) легко находятся и равны

$$\Lambda_1 = -I_1/6; \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = -\Lambda_1/2 = I_1/12. \tag{1.15}$$

При этом

$$p = -I_1^2/\left(6 \cdot 2^3\right); \quad q = I_1^3/\left(6^3 \cdot 2^2\right) > 0. \tag{1.16}$$

Следовательно, полученному решению отвечает ветвь полукубической параболы, отмеченной крестиком на рис.2. Кроме того, при сравнении с решением для уравнения (0.1), когда $I_2 = 0$ , получаем, что найденное здесь решение соответствует типу $D$ электромагнитного поля, который в таком представлении является аналогом типа $D$ в гравитационном случае [2].

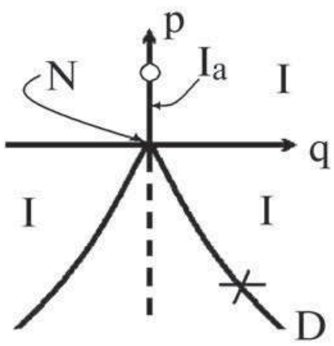


**Рис. 2.** Проекция катастрофы сборки на плоскость управляющих параметров $p$ и $q$. Крестиком отмечена ветвь полукубической параболы типа $D$

В свою очередь, $q = 0$, $p = I_2^2/4$ при $I_1 = 0$ (это множество точек помечено кружком на оси $p$ ) и $\Lambda_1 = 0$; $\Lambda_2 = -\Lambda_3 = \sqrt{-p}$. В исходной записи (0.1) имеем $\left(\lambda^4 - I_2^2\right) = 0$, то есть реализуется алгебраический тип $I$ электромагнитного поля (см., [1]- [2]), хотя по аналогии с алгебраической классификацией гравитационного поля было бы естественней назвать его здесь типом $I_a$ [2].

Очевидно, что в точке $p = q = 0$ $(I_1 = I_2 = 0)$ получаем тип $N$: чисто волновой алгебраический тип (если векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ не равны тождественно нулю). В этой же точке в приведенном представлении наглядно видно наличие фазового перехода второго рода (см, [2]).

Если на бесконечность отображается корень уравнения $G(\lambda) = 0$, равный нулю, то получаем уравнение складки (одну из семи элементарных катастроф [5])

$$\Lambda^2 + p = 0. \tag{1.17}$$

Этот случай отвечает алгебраическому типу $D$ электромагнитного поля (см. также [1]- [2]) и его удобней исследовать для исходной переменной $\lambda$, тем более что тогда точка бифуркации соответствует типу $N$ и является точкой фазового перехода 2-го рода.

Для максимально общего случая классификации электромагнитного поля (инварианты поля $I_1$ и $I_2$ одновременно не равны нулю), связанной с решением уравнений (0.1) и (1.9), имеем наиболее общий алгебраический тип $I$ (см. рис.2).

## 2. Заключение

Одним из вариантов алгебраической классификации гравитационного поля по Петрову на уровне тензора Вейля (тензора кривизны) является определение алгебраического типа тензора

Вейля с помощью главных световых направлений Дебеве (их может быть не менее одного и не более четырех) и соотношениями между коэффициентами уравнения

$$\Psi_0 - 4\Lambda\Psi_1 + 6\Lambda^2\Psi_2 - 4\Lambda^3\Psi_3 + \Lambda^4\Psi_4 = 0, \tag{2.1}$$

где $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ суть пять комплексных скаляров, связанных с проекциями тензора Вейля на главные светоподобные направления, задаваемые светоподобной тетрадой. Корни этого уравнения в заданной точке пространства-времени определяют алгебраический тип гравитационного поля [6, с.48].

Решение уравнения (2.1) связано с решением кубического уравнения, к которому оно сводится при $\Psi_1 \neq 0$, то есть фактически используется приведение левой части уравнения (2.1) к нормальной форме Вейерштрасса.

С аналогичной ситуацией сталкиваемся при алгебраической классификации электромагнитного поля на уровне антисимметричного тензора электромагнитного поля, когда характеристическим уравнением оказывается уравнение четвертой степени переменных, являющихся собственными значениями.

Приведение характеристического уравнения для электромагнитного поля к кубическому характеристическому уравнению (нормальной форме Вейерштрасса) позволяет свести задачу алгебраической классификации электромагнитного поля к задаче, аналогичной классификации Петрова гравитационного поля. В итоге получаем и аналогичные алгебраические типы электромагнитного поля: $I, Ia, D, N$.

Анализ полученной классификации электромагнитного поля с точки зрения теории катастроф показывает, что при проекции катастрофы сборки на плоскость управляющих параметров $p$ и $q$ (рис.2) наличие точки фазового перехода второго рода ($p = q = 0$) соответствует алгебраическому типу $N$ (плоской электромагнитной волны).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.

2. Баранов А.М. Фазовые переходы в гравитационных и электромагнитных полях с точки зрения алгебраической классификации Петрова //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. №1. С.15-28.

3. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.3. М.: Наука, 1967. 299 с.

4. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.

5. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.

6. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херль Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет, 660049, Россия, г. Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г. Красноярск, пр .Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

***A. M. Baranov***

**Another approach to the algebraic classification of electromagnetic field**

*Keywords*: electromagnetic field, algebraic classification, theory of catastrophe.

PACS: 04.20.-q; 05.45.-a

The usual algebraic classification of the electromagnetic field is known. The classification is connected with an eigenvalues task of the tensor of electromagnetic field. In this case there is a characteristic equation of the fourth order. We can reduce such characteristic equation into a cubic characteristic equation (the normal form of Weierstrass). In the end of our investigation we have a problem of the electromagnetic field classification is an analogous to the Petrov problem of the gravitational field classification. So we have and the analogous algebraic types of the electromagnetic field: $I, Ia, D, N$. From the point of view of the catastrophes theory the point of phase transition of the second order corresponds to the algebraic type $N$ (a plane electromagnetic wave).

REFERENCES

1. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.(in Russian)

2. Baranov A.M. The Phase Transitions in Gravitational and Electromagnetic Fields with relation Petrov's Algebraic Classification, *STFI*, 2012, no.1, pp. 15-28.

3. Bateman H., Erdély A. *Higher Transcendental Functions. Volume 3*, New-York, Toronto, London: Mc. Graw-Hill Book Company, Inc., 1955.

4. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p. (in Russian).

5. Poston T., Stewart I. *Catastrophes theory and Its Applications*, London-San Francisco-Melbourne: Pitman, 1978, 580 p.

6. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt E. *Exact solutions of the Einstein's field equations*, London: Cambridge University Press, 2003, 701 p.(2nd edn.).

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Sibrian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.

E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru