УДК 517.537

Н. Р. Хуснутдинов[1]

ФОРМУЛА АБЕЛЯ-ПЛАНА [2]

В работе подробно рассмотрен вывод формул Абеля-Плана для рядов с целым и полуцелым индексами. Отмечены предположения и ограничения, при которых справедлива формула и выписаны различные ее формы. Приводится множество примеров, охватывающих различные виды особенностей суммируемой функции.

Ключевые слова: расходящиеся ряды, формула Абеля-Плана.

PACS: 02

Введение

В работе теоретика часто возникает потребность суммирования или асимптотической оценки рядов. Различным методам асимптотических оценок посвящена обширная литература (см., например [1–7]). Формула Абеля-Плана является мощным средством, позволяющим не только исследовать асимптотическое поведение рядов, но и получить сумму ряда либо в явном виде либо в виде квадратур. Такой метод суммирования рядов был использован в работах Абеля [8,9] и Плана [10]. Под формулами Абеля-Плана обычно понимают следующие соотношения (см., например [11]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^\infty f(t)dt + i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) = \int_0^\infty f(t)dt - i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}+1}dt,$$

позволяющие выразить ряд в виде некоторого, удобного для асимптотических оценок интеграла. В квантовой теории поля [11] вышеприведенные формулы используются для перенормировки различных выражений. Левая часть формулы представляет собой сумму по дискретному спектру, первый интеграл в правой части описывает соответствующее суммирование по непрерывному спектру, что обычно соответствует вкладу пространства Минковского. Если перенести первый интеграл правой части в левую часть,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \int_0^\infty f(t)dt = \frac{1}{2}f(0) + i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) - \int_0^\infty f(t)dt = -i\int_0^\infty \frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}+1}dt,$$

то оставшиеся слагаемые приобретают смысл перенормированного выражения. Под перенормировкой понимается вычитание вклада этой величины в бесконечном пустом пространстве Минковского.

Использовать формулы в таком виде надо с осторожностью, поскольку вышеприведенные выражения справедливы только для «хороших» функций $f(z)$, которые на комплексной плоскости z спадают достаточно быстро на бесконечности, не имеют на комплексной плоскости полюсов, точек ветвления и т.д.

Формулы Абеля-Плана имеют гораздо более широкое применение, если под этим понимать не конечные, выписанные выше, формулы, а метод вывода, модифицированный под более широкий класс функций. Основой метода является формула Пуассона, которую можно сформулировать в виде следующей теоремы [7, §1.4]:

[1]E-mail: 7nail7@gmail.com

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-02-00757 А).

Теорема *Обозначим через $D_{a\eta}$ область, получающуюся удалением из плоскости углов*

$$\left|\arg(z-ia)-\frac{\pi}{2}\right|\le\frac{\pi}{2}-\eta \text{ и } \left|\arg(z+ia)+\frac{\pi}{2}\right|\le\frac{\pi}{2}-\eta.$$

Пусть аналитическая функция $f(x)$ регулярна в области $D_{a\eta}$ с какими-нибудь $a>0$ и $\eta>0$ и удовлетворяет условию

$$|f(x+iu)|\le\varepsilon(|x|)e^{\gamma|y|},\ x+iy\in D_{a\eta},$$

где $\gamma<2\pi$, а $\varepsilon(u)\to 0$ при $u\to\infty$. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\pi kx}dx,$$

если ряд в левой части сходится. Доказательство теоремы в случае менее сильных условий можно найти в [12, §2.8-9]. Рассмотрим вывод формулы Абеля-Плана для целых и полуцелых индексов суммирования, особо выделяя условия, налагаемые на суммируемую функцию. Где не оговорено особо ряды предполагаются сходящимися.

1. Ряды по целым индексам вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$

Используя интегральную формулу Коши из курса ТФКП, можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_n}\frac{f(z)}{z-n}dz,$$

где замкнутые контуры c_n окружают против часовой стрелки точки $z=n$ (см. Рис. 1), а внутри

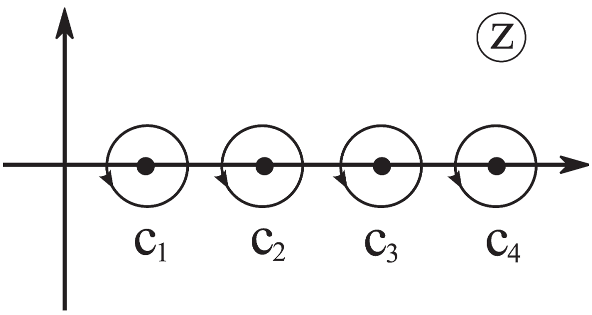

Рис. 1. Контуры c_n окружают целые значения $z=n$. Радиус контуров выбирается достаточно малым, чтобы внутри них функция $f(z)$ не имела особых точек.

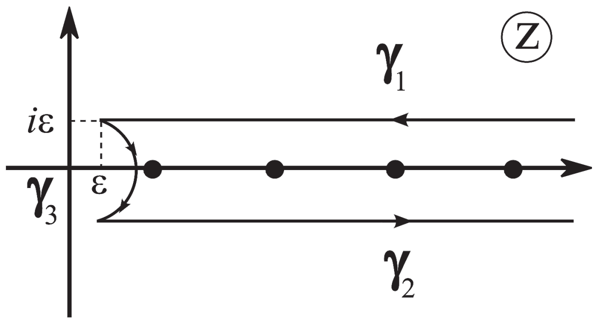

Рис. 2. Контур γ окружают все целые значения $z=n$. Величина ε выбирается достаточно малой, чтобы внутри контура γ не было особых точек функции $f(z)$.

контуров нет особых точек функции $f(z)$. Вблизи целых значений $z=n$ котангенс имеет простые полюсы

$$\operatorname{ctg}\pi z\approx\frac{1}{\pi}\frac{1}{z-n}.$$

По этой причине

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2i}\oint_{c_n}f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz.$$

Заменим сумму интегралов по всем контурам интегралом по одному контуру $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$, охватывающему все полюса (см. Рис. 2). Тогда интеграл разобьется на три

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=I_1+I_2+I_3, \tag{1.1}$$

где

$$I_k=\frac{1}{2i}\int_{\gamma_k}f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz. \tag{1.2}$$

Рассмотрим последовательно все контурные интегралы.

1.1. Контур γ_1

Слегка модифицируем подынтегральное выражение добавляя к котангенсу и вычитая от него мнимую единицу

$$I_1 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Далее займемся первой частью

$$J_1 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz.$$

Рассмотрим отрезок контура γ_1. Дополним его отрезком β_1 и дугой α_1 радиуса R (см. Рис. 3). Если внутри замкнутого контура $\gamma_1 + \beta_1 + \alpha_1$ нет особых точек функции $f(z)$, то интеграл по этому контуру равен нулю

$$\int_{\gamma_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz + \int_{\beta_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz + \int_{\alpha_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz = 0.$$

Если же внутри контура есть особые точки, то в правой части будет находится сумма соответствующих вычетов функции в этих точках с множителем $-2\pi i$.

Условие 1. *Функция $f(z)$ не имеет особенностей внутри контура $\gamma_1 + \beta_1 + \alpha_1$.*

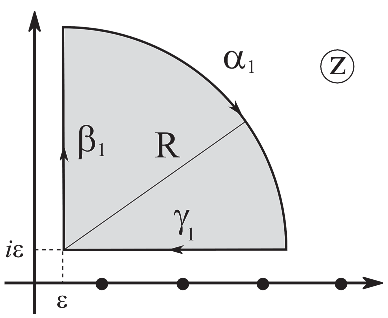

Рис. 3. Контур $\gamma = \gamma_1 + \beta_1 + \alpha_1$.

Далее устремляем радиус окружности к бесконечности, $R \to \infty$. Если выполняется условие

$$\lim_{R\to\infty} |f(z)||\operatorname{ctg}\pi z + i|_{z\in\alpha_1} = 0,$$

то вклад контура α_1 в этом пределе равен нулю

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz = 0.$$

Условие 2. $\lim_{R\to\infty} |f(z)||\operatorname{ctg}\pi z + i|_{z\in\alpha_1} = 0.$

Таким образом, при выполнении условий 1 и 2 получаем

$$I_1 = -\frac{1}{2i}\int_{\beta_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz - \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

На кривой β_1 положим $z = \varepsilon + it$, а на кривой γ_1 соответственно $z = t + i\varepsilon$. Используя новые переменные и очевидную формулу

$$\operatorname{ctg}\pi z + i = -\frac{2i}{e^{-2i\pi z} - 1},$$

получаем

$$I_1 = i\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(it+\varepsilon)dt}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)} - 1} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty} f(t+i\varepsilon)dt. \tag{1.3}$$

1.2. Контур γ_2

Слегка модифицируем подынтегральное выражение вычитая от котангенса и добавляя к нему мнимую единицу

$$I_2 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz + \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Далее займемся первым интегралом в правой части

$$J_2 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz.$$

Рассмотрим отрезок контура γ_2. Дополним его отрезком β_2 и дугой α_2 радиуса R (см. Рис. 4). Если внутри замкнутого контура $\gamma_2+\beta_2+\alpha_2$ нет особых точек функции $f(z)$, то интеграл по этому контуру равен нулю

$$\int_{\gamma_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz + \int_{\beta_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz + \int_{\alpha_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz = 0.$$

Если же внутри контура есть особые точки, то в правой части будет сумма соответствующих вычетов функции в этих точках с множителем $-2\pi i$.

Условие 3. *Функция $f(z)$ не имеет особенностей внутри контура $\gamma_2+\beta_2+\alpha_2$.*

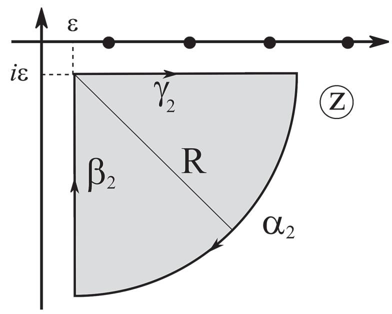

Рис. 4. Контур $\gamma_2+\beta_2+\alpha_2$.

Затем устремляем радиус окружности к бесконечности, $R\to\infty$. Если выполняется условие

$$\lim_{R\to\infty} |f(z)||\operatorname{ctg}\pi z - i|_{z\in\alpha_2} = 0,$$

то вклад контура α_2 в этом пределе равен нулю

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz = 0.$$

Условие 4. $\lim_{R\to\infty} |f(z)||\operatorname{ctg}\pi z - i|_{z\in\alpha_2} = 0$.

Таким образом, при выполнении условий 3 и 4 получаем

$$I_2 = -\frac{1}{2i}\int_{\beta_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz + \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} f(z)dz. \tag{1.4}$$

На кривой β_2 положим $z=\varepsilon - it$, а на кривой γ_2 соответственно $z = t - i\varepsilon$. Используя новые переменные и очевидную формулу

$$\operatorname{ctg}\pi z - i = \frac{2i}{e^{2i\pi z}-1},$$

получаем

$$I_2 = -i\int_\varepsilon^\infty \frac{f(-it+\varepsilon)dt}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty f(t-i\varepsilon)dt. \tag{1.5}$$

1.3. Контур γ_3

Рассмотрим вклад последней части,

$$I_3 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz, \tag{1.6}$$

где контур γ_3 показан на Рис. 5. При стягивании контура в точку, $\varepsilon\to 0$, имеем $\operatorname{ctg}\pi z \approx \frac{1}{\pi z}$. Дальнейшее зависит от наличия особенностей функции $f(z)$ в нуле. Если есть особенность, то мы должны использовать формулу Абеля-Плана в следующем виде (**выполнены условия 1-4**):

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty f(n) &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^\infty \{f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon)\}\,dt + \\ &+ i\int_\varepsilon^\infty \left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1} - \frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}\right\}dt,\end{aligned} \tag{1.7}$$

где первый интеграл берется по полуокружности $z=\varepsilon+\varepsilon e^{i\varphi}$ ($\varphi\in[+\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$) радиуса ε вокруг точки $z=\varepsilon$. (Можно использовать и другие кривые, например, окружность с центром в начале координат $z=\sqrt{2}\varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi\in[+\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}]$, или отрезок вертикальной прямой $z=\varepsilon+iy$, $y\in[\varepsilon,-\varepsilon]$). Допустим, что выполнено Условие 5:

Условие 5. *Функция $f(z)$ не имеет особенностей в нуле, $z=0$.*

В этом случае формула упрощается. Выбираем контур в виде окружности с центром в начале координат $z = \sqrt{2}\varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$. Тогда,

$$I_3 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz = \\ = \int_{\gamma_3}\frac{f(z)}{2\pi i z}dz = -\frac{f(0)}{4}.$$

Поскольку особенности в нуле нет, то во втором интеграле в (1.7) можно вычислить предел $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}\{f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon)\}\,dt = \int_0^{\infty} f(t)dt.$$

В последнем интеграле сделаем следующее преобразование:

$$i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1}-\frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}\right\}dt = i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt+ \\ +i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left[f(\varepsilon+it)\left\{\frac{1}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1}-\frac{1}{e^{2\pi t}-1}\right\}- \right. \\ \left. -f(\varepsilon-it)\left\{\frac{1}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}-\frac{1}{e^{2\pi t}-1}\right\}\right]dt.$$

В последнем интеграле делаем замену $t = \varepsilon x$ и разлагаем подынтегральное выражение по ε, получаем

$$-f(0)\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = -\frac{f(0)}{4}.$$

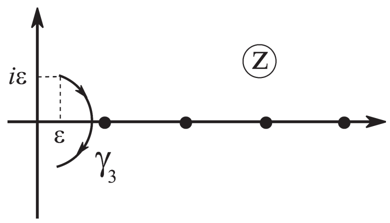

Рис. 5. Контур γ_3.

Комбинируя это значение с интегралом I_3, в итоге, при **выполнении 5-ти** условий получаем формулы

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{4}f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + \frac{i}{2}\int_{\beta_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz + \\ +\frac{i}{2}\int_{\beta_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz, \tag{1.8a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{f(0)}{2} + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt, \tag{1.8b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = +\frac{f(0)}{2} + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{1.8c}$$

Если выполняется еще и

Условие 6. *Функция $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси $z = iy, y \neq 0$.*

то получаем известную формулу Абеля-Плана

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(t)dt + i\int_0^{\infty}\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{1.9}$$

1.4. Результаты

Суммируем результаты. Имеем шесть условий:

Условие 1 $f(z)$ не имеет особенностей в I-ой четверти $(x > 0, y > 0)$,

Условие 2 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(z)||\operatorname{ctg}\pi z + i| = 0, z = \varepsilon(1+i) + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

Условие 3 $f(z)$ не имеет особенностей в IV-ой четверти $(x>0, y<0)$,

Условие 4 $\lim\limits_{R\to\infty} |f(z)||\operatorname{ctg}\pi z - i| = 0, z = \varepsilon(1+i) + Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$,

Условие 5 $f(z)$ не имеет особенностей в нуле, $z = 0$,

Условие 6 $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси $z = iy, y \neq 0$.

Справедливы следующие формулы:
I При выполнении условий **1-4**:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon))dt + \\ &+ i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1} - \frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}\right\}dt, \end{aligned} \tag{1.10}$$

II При выполнении условий **1-5**:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{4}f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + \frac{i}{2}\int_{\beta_1} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z + i)dz + \\ + \frac{i}{2}\int_{\beta_2} f(z)(\operatorname{ctg}\pi z - i)dz,\end{aligned} \tag{1.11a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{f(0)}{2} + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt, \tag{1.11b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{f(0)}{2} + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{1.11c}$$

III При выполнении условий **1-6**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_{0}^{\infty} f(t)dt + i\int_{0}^{\infty}\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt. \tag{1.12}$$

Если какое либо условие нарушается, то надо учесть дополнительные вклады, следуя вышеприведенным вычислениям.

2. Ряды по полуцелым индексам $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2})$

В этом случае нет нужды повторять все вычисления, приведенные выше. Отметим соответствующие изменения. Суммирование идет по полуцелым числам, поэтому будем учитывать вычеты в точках $n+\frac{1}{2}$. По этой причине используем тангенс вместо котангенса, поскольку вблизи $z = n+\frac{1}{2}$ имеем

$$\operatorname{tg}\pi z \approx -\frac{1}{\pi}\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}}.$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{tg}\pi z \pm i = \frac{\pm 2i}{e^{\pm 2i\pi z}+1},$$

то в первой четверти мы должны использовать верхний знак, а в четвертой четверти – нижний.
Таким образом, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{tg}\pi z dz + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t+i\varepsilon)+f(t-i\varepsilon))dt + \\ + \frac{1}{2i}\int_{\beta_1} f(z)(\operatorname{tg}\pi z - i)dz + \frac{1}{2i}\int_{\beta_2} f(z)(\operatorname{tg}\pi z + i)dz,\end{aligned} \tag{2.1a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} f(z)\operatorname{tg}\pi z dz + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t+i\varepsilon)+f(t-i\varepsilon))dt -$$

$$-i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}+1}dt, \tag{2.1b}$$

где первый интеграл берется по полуокружности $z=\varepsilon+\varepsilon e^{i\varphi}$ ($\varphi\in[+\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}]$) радиуса ε вокруг точки $z=\varepsilon$, при выполнении следующих четырех условий:
Условие 1 $f(z)$ не имеет особенностей в I-ой четверти ($x>0, y>0$),

Условие 2 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(z)||\operatorname{tg}\pi z-i|=0, z=\varepsilon(1+i)+Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

Условие 3 $f(z)$ не имеет особенностей в IV-ой четверти ($x>0, y<0$),

Условие 4 $\lim\limits_{R\to\infty}|f(z)||\operatorname{tg}\pi z+i|=0, z=\varepsilon(1+i)+Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{2},0]$.

При выполнении дополнительного условия

Условие 5. *Функция $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси $z=iy$.*

получаем известную формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+\frac{1}{2})=\int_0^{\infty}f(t)dt-i\int_0^{\infty}\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}+1}dt. \tag{2.2}$$

Если какое либо условие нарушается, то надо учесть дополнительные вклады, следуя вышеприведенным вычислениям.

3. Примеры

Рассмотрим ряд примеров как с уже известными, так и неизвестными ранее результатами. Вначале необходимо сделать анализ функции на выполнение условий 1-6.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Функция имеет вид $f(z)=z^{-2}$ и полюс второго порядка в нуле. Выполнены только четыре условия, поэтому используем формулу (1.10)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}f(n) &= \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3}f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz+\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon))dt+\\ &+ i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1}-\frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}\right\}dt.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Разлагаем котангенс в ряд Лорана в окрестности нуля, заменяем переменную $z=\varepsilon+\varepsilon e^{i\varphi}$, и в пределе $\varepsilon\to0$ получаем

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_3}f(z)\operatorname{ctg}\pi z dz=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}.$$

Далее

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon))dt=\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Причем, нельзя под интегралом сразу положить $\varepsilon=0$, будет неверный результат, поскольку пределы интегрирования зависят от ε.

В последнем интеграле в уравнении (3.1) собираем все вместе, делаем замену $t=\varepsilon x$, затем разлагаем в ряд Лорана по ε, интегрируем и в пределе $\varepsilon\to0$ получаем

$$i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}-1}-\frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}-1}\right\}dt=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2\varepsilon}+\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}.$$

Следует отметить, что в экспонентах, в знаменателе нельзя положить $\varepsilon=0$, получим неверный результат, поскольку ε находится еще и в пределах интегрирования.

Складывая все вместе, получаем заведомо известный результат

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta_R(2)=\frac{\pi^2}{6}, \tag{3.2}$$

где $\zeta_R(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ – известная дзета-функция Римана.

3.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$

В данном случае $f(z) = (z^2 + a^2)^{-k}$. Будем считать пока $a > 0$. Поскольку функция $f(z)$ является четной относительно a, то в конечном ответе можно везде заменить $a \to |a|$. Применение формулы Абеля-Плана позволяет получить асимптотическую ($a \to \infty$) оценку этого ряда. Функция удовлетворяет условиям 1-5, но не удовлетворяет условию 6, поскольку $f(z)$ *на мнимой оси имеет полюсы k-го порядка в точках $z = \pm ia$*. Поэтому воспользуемся формулами (1.11)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = +\frac{1}{2} f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt + i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(\varepsilon + it) - f(\varepsilon - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \tag{3.3}$$

Рассмотрим вначале случай $k = 1$. Первые два члена вычисляются тривиально

$$\frac{1}{2} f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}.$$

Для вычисления последнего слагаемого заметим, что вне полюсов $z = \pm ia$ функция $f(z)$ не имеет особенностей на мнимой оси и поэтому удовлетворяет условию 6. Таким образом, согласно Рис. 6 получаем

$$\begin{aligned} i \int_{\varepsilon}^{\infty} &\frac{f(\varepsilon + it) - f(\varepsilon - it)}{e^{2\pi t} - 1} dt = \\ = i \int_{\varepsilon}^{a-\delta} &\frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt + i \int_{a+\delta}^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt + \\ + \frac{i}{4} \oint_{ia} &f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \frac{i}{4} \oint_{-ia} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i) dz. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Дополнительный множитель $1/2$ в последних двух слагаемых появился по той причине, что интеграл вокруг полюса по полуокружности вокруг полюса ia (см. Рис. 6) равен половине интеграла по всей окружности. Первые два интеграла в правой части равны нулю, поскольку функция четная, $f(it) = f(-it)$. В предпоследнем интеграле вокруг полюса ia делаем замену переменной $z = ia + \delta e^{i\varphi}$, а в последнем интеграле вокруг полюса $-ia$ делаем замену переменной $z = -ia + \delta e^{i\varphi}$ и устремляем $\delta \to 0$. При этом

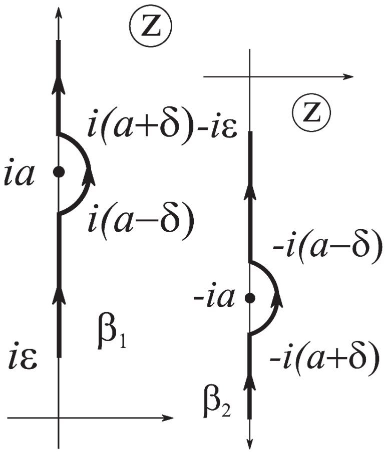

Рис. 6. Контуры β_1 и β_2.

$$\lim_{\delta \to 0} f(z)dz = \pm \frac{\pi}{2a} d\varphi,$$

для интегралов вокруг полюсов $\pm ia$. Вспоминая далее, что

$$\operatorname{ctg} \pi z \pm i = \frac{\mp 2i}{e^{\mp 2\pi i z} - 1},$$

получаем вклад полюсов

$$\begin{aligned} &\frac{i}{4} \oint_{ia} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i) dz + \\ + &\frac{i}{4} \oint_{-ia} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i) dz = \frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{2\pi a} - 1}. \end{aligned}$$

Складывая все вместе, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{a} \frac{1}{e^{2\pi a} - 1} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a, \tag{3.5}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \operatorname{cth} \pi a. \tag{3.6}$$

Отсюда легко получить асимптотическую оценку ряда при $a \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} + O(e^{-\pi a}). \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь общий случай любой целой степени $k \geq 1$. Поскольку функция $f(z) = (z^2 + a^2)^{-k}$ остается четной относительно z, то в формуле (3.4) остаются только вычеты в точках $\pm ia$. Используя интегральную формулу Коши

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{z_0} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{k+1}},$$

получаем

$$\frac{i}{4} \oint_{ia} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z + i)dz + \frac{i}{4} \oint_{-ia} f(z)(\operatorname{ctg} \pi z - i)dz = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k! a^{2k-1}} \left(\frac{1}{(e^{2\pi a x} - 1)(x+1)^k} \right)^{(k-1)}_{x=1}.$$

Вычисляем далее первые два слагаемых в формуле (3.3)

$$\frac{1}{2} f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{2a^{2k}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k - \frac{1}{2})}{2(k-1)! a^{2k-1}}.$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера.

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2a^{2k}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k - \frac{1}{2})}{2(k-1)! a^{2k-1}} + \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k! a^{2k-1}} \left(\frac{1}{(e^{2\pi a x} - 1)(x+1)^k} \right)^{(k-1)}_{x=1}.$$

Для получения асимптотической оценки учтем, что последнее слагаемое дает экспоненциально малый вклад. Полиномиальный вклад дают первых два слагаемых. По этой причине имеем оценку при $a \to \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2a^{2k}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k - \frac{1}{2})}{2(k-1)! a^{2k-1}} + O(e^{-\pi a}).$$

3.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^s}, \operatorname{Re} s < 1$

Используя метод Абеля-Плана получим аналитическое продолжение ряда в указанную область переменной s. Суммируемая функция $f(z) = (z^2 + a^2)^{-s}$ имеет две точки ветвления при $z = \pm ia$ в случае нецелого значения s. Поскольку функция удовлетворяет условиям 1-5, то используем формулу (3.4). Путь интегрирования должен находиться на одном римановом листе, поэтому необходимо правильно учесть изменение фазы. Очевидно, что для всех z, таких что $|z| < a$: $f(it) - f(-it) = 0$. Поэтому интеграл вдоль мнимой оси от 0 до a равен нулю. Далее учтем, что для всех z, таких что $|z| > a$

$$(z^2 + a^2)^{-s} = (t^2 - a^2)^{-s} e^{\mp i\pi s}, z = \varepsilon \pm it,$$

где предполагается предел $\varepsilon \to +0$. Используя это замечание, получаем

$$i \int_{a+\delta}^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt = 2 \sin \pi s \int_{a}^{\infty} \frac{(t^2 - a^2)^{-s}}{e^{2\pi t} - 1} dt =$$
$$= \frac{2 \sin \pi s}{a^{2s-1}} \int_{1}^{\infty} \frac{(x^2 - 1)^{-s}}{e^{2\pi a x} - 1} dx.$$

Два последних интеграла в формуле (3.4) дают нулевой вклад, поскольку они пропорциональны δ^{1-s}, и при условии $\operatorname{Re} s < 1$ стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Два первых слагаемых вычисляются в явном виде

$$\frac{1}{2} f(0) + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{2a^{2s}} + \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s - \frac{1}{2})}{2\Gamma(s) a^{2s-1}}.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n^2+a^2)^s}=\frac{1}{2a^{2s}}+\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{2\Gamma(s)a^{2s-1}}+\frac{2\sin\pi s}{a^{2s-1}}\int_1^{\infty}\frac{(x^2-1)^{-s}}{e^{2\pi ax}-1}dx. \tag{3.8}$$

По условию $\operatorname{Re}s<1$, и поэтому интеграл сходится. Вышеприведенная формула дает аналитическое продолжение ряда в область $\operatorname{Re}s<1$. Поскольку гамма функция Эйлера имеет простые полюса при всех целых неположительных значениях аргумента, то полученное выражение имеет простые полюса в точках $s_k=\frac{1}{2}-k,\ k=0,1,2,\ldots$.

3.4. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{inb}}{(n^2+a^2)^k}$, $k\in\mathbb{N}$

Вначале преобразуем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{inb}}{(n^2+a^2)^k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inb}+e^{-inb}}{(n^2+a^2)^k}-\frac{1}{a^{2k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos nb}{(n^2+a^2)^k}-\frac{1}{a^{2k}}.$$

В этом случае четность функции $f(z)=2\cos bz/(z^2+a^2)^k$ такая же как в предыдущем случае $f(z)=f(-z)$. Полюса на мнимой оси тоже такие $\pm ia$. Поэтому вклад от всей мнимой оси равен нулю, остается вклад полюсов, который легко вычисляется. Рассмотрим вначале случай простого полюса, $k=1$. Тогда

$$\frac{i}{4}\oint_{ia}f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)dz+\frac{i}{4}\oint_{-ia}f(z)(\operatorname{ctg}\pi z-i)dz=\frac{2\pi}{a}\frac{\operatorname{ch}ab}{e^{2\pi a}-1}.$$

Далее, используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty}\frac{2\cos tb}{t^2+a^2}dt=\frac{\pi}{a}e^{-a|b|},$$

получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{inb}}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}e^{-a|b|}+\frac{2\pi}{a}\frac{\operatorname{ch}ab}{e^{2\pi a}-1}. \tag{3.9}$$

При $b=0$ получаем формулу предыдущего параграфа.

Условия 2 и 4 (см. §1.4), которым мы подчинили нашу функцию накладывают ограничение на величину параметра b. Действительно, условие 2 имеет вид

$$\lim_{R\to\infty}|f(z)||\operatorname{ctg}\pi z+i|=0,$$

для всех $z=\varepsilon(1+i)+Re^{i\varphi}$ и $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Вычисляя модули, получаем

$$\lim_{R\to\infty}|f(z)||\operatorname{ctg}\pi z+i|=\lim_{R\to\infty}\frac{2}{R^2}e^{-R(2\pi-b)\sin\varphi}.$$

Этот предел будет равен нулю только при $b\le 2\pi$. Условие 4 приводит к другому ограничению $b\ge-2\pi$. Таким образом, получаем, что вышеприведенная формула справедлива при $|b|\le 2\pi$. При выполнении этого условия последнее слагаемое в формуле (3.9) стремится к нулю при $a\to\infty$.

Для других значений k вычисления легко провести аналогично вычислениям в предыдущем параграфе. В итоге получаем формулу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{inb}}{(n^2+a^2)^k}=\frac{2\sqrt{\pi}K_{k-\frac{1}{2}}(a|b|)}{(k-1)!}\left(\frac{|b|}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}+\frac{4\pi(-1)^{k+1}}{k!a^{2k-1}}\left(\frac{\operatorname{ch}(abx)}{(e^{2\pi ax}-1)(x+1)^k}\right)^{(k-1)}_{x=1}.$$

Асимптотика, $a\to\infty$, этих рядов не содержит полиномиальных слагаемых, а только экспоненциально малые члены, $\sim e^{-a|b|},e^{-a(2\pi-|b|)}$.

3.5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2+a^2}$

Допустим, что $f(t)=g(t)/(t^2+a^2)$ удовлетворяет 5-ти условиям. Поскольку функция $f(t)$ имеет простые полюсы в точках $t=\pm ia$, то разбиваем интеграл в соответствии с Рис. 6

$$\begin{aligned} & i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(it+\varepsilon)-f(-it+\varepsilon)}{e^{2\pi t}-1}dt= \\ &= i\int_{\varepsilon}^{a-\delta}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\frac{dt}{a^2-t^2}+i\int_{a+\delta}^{\infty}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\frac{dt}{a^2-t^2}+ \\ &+\frac{i}{4}\oint_{ia}\frac{g(z)}{z^2+a^2}(\operatorname{ctg}\pi z+i)dz+\frac{i}{4}\oint_{-ia}\frac{g(z)}{z^2+a^2}(\operatorname{ctg}\pi z-i)dz. \end{aligned}\tag{3.10}$$

Дополнительный множитель $1/2$ появился в связи с тем, что мы заменили интегрирование по полуокружности на интегрирование по всей окружности вокруг полюса.

В первых двух интегралах, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & i\int_{\varepsilon}^{a-\delta}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\frac{dt}{a^2-t^2}+i\int_{a+\delta}^{\infty}\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\frac{dt}{a^2-t^2}= \\ &= -\frac{i}{2a}\int_0^{\infty}\left(\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\right)_t'\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|dt. \end{aligned}$$

Два последних интеграла в (3.10) дают

$$\frac{i}{4}\oint_{ia}\frac{g(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)}{z^2+a^2}dz+\frac{i}{4}\oint_{-ia}\frac{g(z)(\operatorname{ctg}\pi z-i)}{z^2+a^2}dz=\frac{\pi}{2a}\frac{g(it)+g(-it)}{e^{2\pi t}-1}.$$

Собирая все вместе, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(n)}{n^2+a^2} &= \frac{g(0)}{2a^2}+\int_0^{\infty}\frac{g(t)dt}{t^2+a^2}+\frac{\pi}{2a}\frac{g(it)+g(-it)}{e^{2\pi a}-1}- \\ &- \frac{i}{2a}\int_0^{\infty}\left(\frac{g(it)-g(-it)}{e^{2\pi t}-1}\right)_t'\ln\left|\frac{a+t}{a-t}\right|dt. \end{aligned}\tag{3.11}$$

3.6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+a^2}}$

В этом случае функция $f(z)=e^{i\pi z}/\sqrt{z^2+a^2}$ имеет две точки ветвления на мнимой оси $\pm ia$ и не имеет особенности в нуле. Таким образом, выполнены пять условий, и мы можем использовать формулу Абеля-Плана в виде (3.3). Последний интеграл распишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & i\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi t}-1}dt= \\ &= i\int_{\varepsilon}^{a-\delta}\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt+i\int_{a+\delta}^{\infty}\frac{f(it)-f(-it)}{e^{2\pi t}-1}dt+ \\ &+\frac{i}{2}\int_{ia}f(z)(\operatorname{ctg}\pi z+i)dz+\frac{i}{2}\int_{-ia}f(z)(\operatorname{ctg}\pi z-i)dz. \end{aligned}\tag{3.12}$$

Последние два интеграла вычисляются по полуокружности справа от точек ветвления $\pm ia$, т.е. $z=\pm ia+\delta e^{i\varphi}$ и $\delta\to 0$. Вклад этих точек равен нулю. Интегралы вдоль оси между точек ветвления дают конечный вклад, и мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+a^2}}=\frac{1}{2a}+\int_0^{\infty}\frac{e^{i\pi t}dt}{\sqrt{t^2+a^2}}-i\int_0^{a}\frac{e^{-\pi t}dt}{\sqrt{a^2-t^2}}-\int_a^{\infty}\frac{e^{-\pi t}dt}{\sqrt{t^2-a^2}}.$$

Поскольку выражение в правой части должно быть действительным, то можно оставить только действительную часть

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+a^2}}=\frac{1}{2a}+2\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi t\ dt}{\sqrt{t^2+a^2}}-\int_a^{\infty}\frac{e^{-\pi t}dt}{\sqrt{t^2-a^2}}.$$

Интегралы вычисляются в явном виде, в итоге получаем сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+a^2}}=\frac{1}{2a}+K_0(\pi a),$$

где $K_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Отсюда легко получается асимптотика ряда, $a\to\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+a^2}}=\frac{1}{2a}+O(e^{-\pi a}).$$

Сумма рядов вида $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^{k+1/2}}$ получается из выше полученного выражения дифференцированием по a обеих частей соответствующее число раз. Например, дифференцированием по a получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{2a^3}+\frac{\pi}{a}K_1(\pi a).$$

Это выражение можно получить и непосредственно из формула Абеля-Плана. Необходимо только учесть, что интегралы вокруг точек ветвления в (3.12) дадут расходящиеся выражения, которые сократятся с соответствующими слагаемыми в первых двух интегралах в (3.12) при интегрировании их по частям.

3.7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{\pi^2}{2}$, $\nu=n+\frac{1}{2}$

Поскольку функция $f(z)=z^{-2}$ имеет полюс в нуле, то используем формулу Абеля-Плана в виде (2.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+\frac{1}{2})=-\frac{1}{2i}\int_{\gamma_3}f(z)\,\mathrm{tg}\,\pi z dz+\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t+i\varepsilon)+f(t-i\varepsilon))dt-$$
$$-i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}+1}-\frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}+1}\right\}dt. \tag{3.13}$$

Разлагаем тангенс в окрестности нуля в ряд Лорана, заменяем переменную $z=\varepsilon+\varepsilon e^{i\varphi}$ и получаем

$$-\frac{1}{2i}\int_{\gamma_3}f(z)\,\mathrm{tg}\,\pi z dz=\frac{\pi^2}{4}.$$

Далее

$$\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\infty}(f(t-i\varepsilon)+f(t+i\varepsilon))dt=\frac{1}{2\varepsilon}.$$

В последнем интеграле собираем все вместе, делаем замену $t=\varepsilon x$, затем разлагаем в ряд Лорана по ε и интегрируем. В итоге получаем

$$-i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(it+\varepsilon)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}+1}-\frac{f(-it+\varepsilon)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}+1}\right\}dt=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Складывая все вместе, получаем известный результат

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2}=\zeta_H(2,\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{2}, \tag{3.14}$$

где $\zeta_H(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$ – дзета-функция Гурвица.

3.8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu^2+a^2)^s}, \mathrm{Re}\, s<1,\ \nu=n+\frac{1}{2}$

В этом случае функция $f(z)=(z^2+a^2)^{-s}$ имеет полюсы в точках $\pm ia$. Интегрирование этой функции вдоль мнимой оси было рассмотрено в §3.3. В случае суммирования по полуцелым индексам используем формулу Абеля-Плана в форме (2.1b). Все необходимые интегралы были разобраны в §3.3, интеграл вокруг нуля (первый интеграл в (2.1b)) равен нулю. В итоге получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{((n+\frac{1}{2})^2+a^2)^s}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{2\Gamma(s)a^{2s-1}}-\frac{2\sin\pi s}{a^{2s-1}}\int_1^{\infty}\frac{(x^2-1)^{-s}}{e^{2\pi ax}+1}dx. \tag{3.15}$$

3.9. $\lim\limits_{s\to 0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\nu\left(1+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^{1/2-s},\ \nu=n+\frac{1}{2}$

Ряд, находящийся под знаком предела, сходится при $\mathrm{Re}\, s>3/2$. Применение формулы Абеля-Плана позволяет получить выражение, сходящееся при $\mathrm{Re}\, s\le 3/2$, т.е. получить аналитическое продолжение в область $\mathrm{Re}\, s\le 3/2$. По этой причине существует предел $s\to 0$.

В этом случае выполняются все 5 условий для функции $f(z)=z(1+\frac{z^2}{b^2})^{1/2-s}$, и мы можем использовать формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+\frac{1}{2})=\int_{\varepsilon}^{\infty}f(t)dt-i\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\frac{f(\varepsilon+it)}{e^{2\pi(t-i\varepsilon)}+1}-\frac{f(\varepsilon-it)}{e^{2\pi(t+i\varepsilon)}+1}\right\}dt.$$

Поскольку последний интеграл сходится при $s\to 0$, то мы можем сразу положить $s=0$. Далее, поскольку комплексное число

$$1+\frac{(\pm it+\varepsilon)^2}{b^2}=\left(1-\frac{t^2}{b^2}+\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right)\pm i\frac{2t\varepsilon}{b^2}$$

имеет фазу близкую к нулю при $t<b$ и близкую к π при $t>b$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1+\frac{(\pm it+\varepsilon)^2}{b^2}}=\sqrt{\left|1-\frac{t^2}{b^2}\right|}\left\{\begin{array}{l}+1, t<b,\\ \pm i, t>b\end{array}\right. .$$

Таким образом, необходимо разделить интервал интегрирования на два $t<b$ и $t>b$.

При $t<b$ имеем

$$f(it+\varepsilon)-f(-it+\varepsilon)=\sqrt{1-\frac{t^2}{b^2}}((it+\varepsilon)-(-it+\varepsilon))=2it\sqrt{1-\frac{t^2}{b^2}},$$

а при $t>b$ получаем

$$f(it+\varepsilon)-f(-it+\varepsilon)=\sqrt{\frac{t^2}{b^2}-1}(i(it+\varepsilon)+i(-it+\varepsilon))=0.$$

Суммируя, получаем при $s\to 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nu\left(1+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^{1/2-s}=\int_0^{\infty}t\left(1+\frac{t^2}{b^2}\right)^{1/2-s}dt+2\int_0^b\frac{\sqrt{1-\frac{t^2}{b^2}}}{e^{2\pi t}+1}dt=$$

$$=\frac{b^2}{2}\frac{\Gamma(s-\frac{3}{2})}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}+2\int_0^b\frac{\sqrt{1-\frac{t^2}{b^2}}}{e^{2\pi t}+1}dt.$$

Вычисляя наконец предел $s\to 0$ получаем

$$\lim_{s\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\nu\left(1+\frac{\nu^2}{b^2}\right)^{1/2-s}=-\frac{b^2}{3}+2\int_0^b\frac{\sqrt{1-\frac{t^2}{b^2}}}{e^{2\pi t}+1}dt. \tag{3.16}$$

Таким образом, мы получили конечное выражение для на первый взгляд расходящегося ряда.

3.10. $\sum\limits_{n=0}^\infty \nu\left[\ln\left(1+\frac{b^2}{\nu^2}\right)-\frac{b^2}{\nu^2}\right]$, $\nu = n+\frac12$

Представим первоначальную функцию в виде суммы трех: $f(z) = f_1(z) - 2f_2(z) - b^2 f_3(z)$, где $f_1(z) = z\ln(z^2+b^2)$, $f_2(z) = z\ln z$ и $f_3(z) = 1/z$. Функция $f_1(z)$ имеет логарифмические точки ветвления $\pm ib$, функция $f_2(z)$ – точку ветвления 0, а функция $f_3(z)$ имеет простой полюс в начале координат. Поскольку для всех трех функций выполняются четыре условия, то будем применять формулу Абеля-Плана в форме (2.1b). Выбирая главную ветвь логарифма, получаем в пределе $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon+it)-f_1(\varepsilon-it) &= 2it\ln|t^2-b^2|,\\ f_2(\varepsilon+it)-f_2(\varepsilon-it) &= 2it\ln t,\\ f_3(\varepsilon+it)-f_3(\varepsilon-it) &= -\frac{2it}{t^2+\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, $f(\varepsilon+it)-f(\varepsilon-it) = 2it\ln|1-\frac{b^2}{t^2}|+\frac{2itb^2}{t^2+\varepsilon^2}$. Вычислим связанный с этим выражением последний интеграл в (2.1b). В пределе $\varepsilon\to 0$ вклад первого логарифмического слагаемого конечен, расходимость возникает только от последнего слагаемого, связанного с f_3. Интегрируя по частям второе слагаемое, получаем в пределе $\varepsilon\to 0$

$$-i\int_\varepsilon^\infty \frac{2it\ln|1-\frac{b^2}{t^2}|+\frac{2itb^2}{t^2+\varepsilon^2}}{e^{2\pi t}+1}dt = 2\int_0^\infty \frac{\ln|1-\frac{b^2}{t^2}|}{e^{2\pi t}+1}tdt - \frac{b^2}{2}\ln(2\varepsilon^2)+\pi b^2\int_0^\infty\frac{\ln t\ dt}{\mathrm{ch}^2\,\pi t}.$$

Последний интеграл вычисляется в явном виде

$$\pi\int_0^\infty \frac{\ln t\ dt}{\mathrm{ch}^2\,\pi t} = -2\ln 2-\gamma, \tag{3.17}$$

где γ – постоянная Эйлера.

Интеграл вокруг $z=0$ в формуле (2.1b) равен нулю, поскольку простой полюс в $f(z)$ сокращается с разложением тангенса. Далее, в пределе $\varepsilon\to 0$ получаем

$$\frac12\int_\varepsilon^\infty (f(t+i\varepsilon)+f(t-i\varepsilon))dt = \frac{b^2}{2}\ln(2\varepsilon^2)+\frac{b^2}{2}-b^2\ln b. \tag{3.18}$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$\sum_{n=0}^\infty \nu\left[\ln\left(1+\frac{b^2}{\nu^2}\right)-\frac{b^2}{\nu^2}\right] = b^2\left\{\frac12-2\ln 2-\gamma\right\}-b^2\ln b+ \\ +2\int_0^\infty \frac{\ln|1-\frac{b^2}{t^2}|}{e^{2\pi t}+1}tdt.$$

4. Заключение

Целью данной работы является изложение метода Абеля-Плана без излишней строгости для физиков. Мы подробно разобрали вывод формул Абеля-Плана для различных суммируемых функций. При наличии особенностей на комплексной плоскости формулы Абеля-Плана модифицируются, выражения (1.10) - (1.12) раздела 1.4 охватывают различные типы суммируемых функций. В §3 мы разобрали множество примеров, в которых суммируемая функция имеет различные особенности - полюсы, точки ветвления. Использование формул Абеля-Плана позволяет получить удобные для анализа выражения. Более того, формулы Абеля-Плана позволяют получить аналитическое продолжение различных рядов (см., например (3.8), (3.15), (3.16)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 2009. 316 с.
2. Федорюк М. В. Метод перевала. Либроком, 2010. 368 с.
3. Федорюк М. В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Гл. Ред. физ.-мат. лит., 1987. 544 с.
4. Риекстыныш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т.1. Зинатне, 1974. 392 с.
5. Риекстыныш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т.2. Зинатне, 1977. 464 с.
6. Риекстыныш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т.3. Зинатне, 1981. 370 с.
7. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. Физмат гиз, 1962. 318 с.
8. Abel N.H. L'intégral finie $\Sigma^n\varphi(x)$ exprimée par une intégrale simple // Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, Christiania : Gröndahl & Sön, 1881, V.1, 11-27
9. Abel N. H. Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel, Christiania : Gröndahl & Sön, 1881, V.1, 28-39
10. Plana G.A. Note sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule génerale pour le sommation des suites, Mem. Acad. Sci. Torino, 1820, V. 25, 403-418
11. Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. Атомиздат, 1980. 296 с.
12. Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ Гос. Изд-во технико-теоретической литературы, 1948. 418 с.

Поступила в редакцию 09.06.2013

Хуснутдинов Наиль Рустамович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.
E-mail: 7nail7@gmail.com

N. R. Khusnutdinov
The Abel-Plana formulas

Keywords: divergent series, Abel-Plana formula.

PACS: 02

We consider in detail derivation of the Abel-Plana formula for series over integer and half-integer indexes. We noted assumptions and limitations for the formulas and write out its different forms. We give plenty examples for different peculiarities of the summed function.

REFERENCES

1. Fedoryuk M.V. *Asimptoticheskie metody dlya lineinykh obyknovennykh differencialnykh uravnenii* Asymptotic methods of linear differential equations, Moscow: Nauka, 2009, 316 p.
2. Fedoryuk M.V. *Metod perevala* Saddle-point technique, Librokom, 2010, 368 p.
3. Fedoryuk M.V. *Asimptotika, integraly i ryady* Asymptotics, integrals and series, Moscow: GlavRedFizMatLit, 1987, 544 p.
4. Riekstynysh E. Ya. *Asimptoticheskie razlozheniya integralov. T.1* Asymptotical expansion of integrals. V.1, Zinatne, 1974, 392 p.
5. Riekstynysh E. Ya. *Asimptoticheskie razlozheniya integralov. T.2* Asymptotical expansion of integrals. V.2, Zinatne, 1977, 464 p.
6. Riekstynysh E. Ya. *Asimptoticheskie razlozheniya integralov. T.3* Asymptotical expansion of integrals. V.3, Zinatne, 1981, 370 p.

7. Evgrafov M.A. *Asimptoticheskie ocenki i celye funkcii* Asymptotic expansions and analitic functions, Moscow: Fizmatgiz, 1962, 318 p.

8. Abel N.H. L'intégral finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale simple, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Christiania: Gröndahl & Sön, 1881, V.1, 11-27

9. Abel N.H. L'intégral finie $\Sigma^n \varphi(x)$ exprimée par une intégrale simple, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Christiania: Gröndahl & Sön, 1881, V.1, 28-39

10. Plana G. A. Note sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule génerale pour le sommation des suites, *Mem. Acad. Sci. Torino*, 1820, vol. 25, pp. 403–418.

11. Grib A.A., Mamaev S. G., Mostepanenko V. M. *Kvantovye effecty v intensivnykh vneshnikh polyakh* Quantum effects in the intensive external fields, Moscow: Atomizdat, 1980, 296 p.

12. Titchmarsh E. Ch. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, 1937, 390 p. Translated under the title *Vvedenie v teoriyu integralov Fur'e*, Moscow: OGIZ, 1948, 418 p.

Received 09.06.2013

Khusnutdinov Nail Rustamovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institutes of Physics, Department of Theory of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan, 420008, Russia.