УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

НЕРАВНОВЕСНЫЕ КИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ III. МОДЕЛЬ ЭНЕРГОБАЛАНСА ДЛЯ ИНФЛЯЦИОННОЙ СТАДИИ

Рассмотрен процесс установления теплового равновесия на инфляционной стадии расширения Вселенной в предположении энергодоминантности черной энергии в общем энергобалансе и энергодоминантности сверхтепловых частиц в энергобалансе космологической плазмы.

Ключевые слова: ранняя Вселенная, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скейлинг, космические лучи, позднее ускорение.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Релаксация сверхтепловой компоненты на равновесных частицах в ультрарелятивистской плазме в модели с минимальной связью в условиях энергодоминантности скалярного поля

1.1. Модель материи на ранних и поздних стадиях расширения

В этой статье мы будем рассматривать восстановление термодинамического равновесия в космологической плазме на поздней инфляционной стадии эволюции Вселенной, предполагая, что в момент времени t_1 произошла смена ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. Таким образом, будем полагать в нашей модели справедливыми приближенные соотношения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) = &\quad \varepsilon_s(t)+\varepsilon_p(t), && (1.1)\\
\varepsilon_p(t) = &\quad \varepsilon_0(t)+\varepsilon_{ne}(t)\gg\varepsilon_s; \quad (t<t_1); && (1.2)\\
\varepsilon_p(t) = &\quad \varepsilon_0(t)+\varepsilon_{ne}(t)\ll\varepsilon_s(t); \quad (t>t_1); && (1.3)\\
\varepsilon_p(t_1) \simeq &\quad \varepsilon_s(t_1)\simeq\frac{3\Xi^2}{8\pi} = N\frac{\pi^2T_0^4(t_1)}{15}, && (1.4)
\end{aligned}$$

где (см. [2](2.18)):

$$\varepsilon_s(t)=\frac{3\Xi^2}{8\pi}\approx \mathrm{Const}; \quad (t>t_1) \tag{1.5}$$

– плотность энергии вакуума, предположительно, скалярного поля; $\varepsilon_p(t)$ – суммарная плотность энергии ультрарелятивистской плазмы. Плотность энергии плазмы, в свою очередь, содержит две компоненты: равновесную (см. [2](2.5)):

$$\varepsilon_0(t)=N\frac{\pi^2T^4}{15} \tag{1.6}$$

и неравновесную, $\varepsilon_{ne}(t)$. Далее, выполняется приближенное соотношение:

$$N\frac{\pi^2T_0^4(t_1)}{15}=\varepsilon(t_1)=\frac{3}{32\pi t_1^2} \quad (=3\Xi^2/8\pi), \tag{1.7}$$

где $T_0(t)$ – температура в равновесной Вселенной, заполненной лишь ультрарелятивистской плазмой, (подробности см. в [1, 2])

Для масштабного фактора мы будем использовать следующую модель [2] (2.18):

$$\begin{aligned}
a(t) = &\quad \sqrt{t}; \quad (t<t_1); && (1.8)\\
a(t) = &\quad a_1\mathrm{e}^{\Xi(t-t_1)}, \quad (t>t_1), && (1.9)
\end{aligned}$$

где a_1 - значение масштабного фактора на момент смены режима расширения. Таким образом, согласно (1.7), (1.8) мы можем там, где это необходимо, полагать :

$$a_1=\sqrt{t_1}; \quad \Xi=\frac{1}{2t_1}, \tag{1.10}$$

[1]E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

следовательно:

$$a(t)=\sqrt{t_1}\mathrm{e}^{(t-t_1)/2t_1}, \quad (t>t_1) \tag{1.11}$$

В этой статье мы рассмотрим минимальную модель скалярного поля, в которой взаимодействие последнего с космологической плазмой осуществляется лишь через гравитационное поле, т.е., посредством уравнений Эйнштейна. Поскольку плазма является ультрарелятивистской средой, то в этом случае имеет место «закон сохранения энергии» плазмы, т.е., постоянство ее конформной плотности энергии:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p(t)\cdot a^4(t)=N\frac{\pi^2(aT)^4}{15}+\varepsilon_{ne}(t)a^4=\\ N\frac{\pi^2(aT)^4}{15}+\tilde{\varepsilon}_{ne}=\mathrm{Const},\end{aligned} \tag{1.12}$$

где $\tilde{\varepsilon}_{ne}=\varepsilon_{ne}a^4$ – конформная плотность энергии неравновесной компоненты плазмы (см. [2](1.20)):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}(t)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_a(2S+1)\int\limits_0^\infty\tilde{p}^3\Delta f_a(t,\tilde{p})d\tilde{p}. \tag{1.13}$$

1.2. Преобразование решения кинетического уравнения

Рассмотрим кинетическое уравнение для сверхтепловых частиц [2](2.1) (подробности см. в [1,2]):

$$\frac{\tilde{p}}{a}\frac{\partial\Delta f_a}{\partial t}=-\frac{4\pi\tilde{N}}{3}\frac{T^2(t)}{\Lambda(\tilde{p}T/2a)}\Delta f_a. \tag{1.14}$$

на инфляционной стадии, когда плотностью энергии плазмы в общем энергобалансе можно пренебречь.

Интегрируя (1.14) с логарифмической точностью и учитывая инфляционное решение уравнений Эйнштейна (1.13), получим:[2]

$$\Delta f_a(t,\tilde{p})=\Delta f_a^1(\tilde{p})\exp\left[-\frac{\xi(t,\tilde{p})}{\tilde{p}}\int\limits_{t1}^{t}y^2(t)\mathrm{e}^{-\Xi(t-t_1)}dt\right], \tag{1.15}$$

где $\Delta f_a^1(\tilde{p})\equiv\Delta f_a(t_1,\tilde{p})$,

$$\xi(t,\tilde{p})=\frac{\tilde{N}}{\langle\Lambda\rangle t_1}\left(\frac{5}{2\pi^3N}\right)^{1/2}, \tag{1.16}$$

$$y(t)=\frac{T(t)}{T_0(t)}\equiv\sigma^{1/4}(t);\quad \sigma=\left(\frac{T(t)}{T_0(t)}\right)^4=\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon(t)}\equiv\frac{\tilde{\varepsilon}_0(t)}{\tilde{\varepsilon}(t)}\leq 1. \tag{1.17}$$

Далее, $T_0(t)$ – температура в идеальной Вселенной, в которой вся плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, на стадии поздней инфляции (1.7):

$$T_0(t)=\frac{1}{\sqrt{t_1}}\left(\frac{45}{32\pi^3N}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-\Xi(t-t_1)}\equiv T_1\mathrm{e}^{-\Xi(t-t_1)}, \tag{1.18}$$

где T_1 – температура в идеальной Вселенной на момент смены режима расширения, или, проще говоря, четвертая степень этой температуры пропорциональна доле энергии плазмы в общем энергобалансе на момент t_1 .

Вследствие того, что в момент t_1 происходит смена режима расширения с ультрарелятивистского закона на инфляционный, константа в правой части (1.12) определяется температурой в идеальной Вселенной на момент смены t_1. Таким образом, получаем *уравнение энергобаланса* (см. (1.7), (1.10)):

$$N\frac{\pi^2(aT)^4}{15}+\tilde{\varepsilon}_{ne}=N\frac{\pi^2(a(t_1)T_0(t_1))^4}{15}\quad\left(=\frac{3}{32\pi t_1^2}\right). \tag{1.19}$$

[2] В отличие от решения [2](2.19) нам не известна зависимость температуры равновесной компоненты плазмы от масштабного фактора, – зависимость вида $T\sim 1/a$ справедлива лишь в том случае, когда все частицы плазмы находятся в тепловом равновесии.

Произведя в этом уравнении подстановку:

$$T(t) \equiv \frac{T(t)}{T_0(t)} T_0(t) \equiv y(t) T_0(t_1) \frac{a_1}{a(t)} \Rightarrow (a(t)T(t))^4 = y^4 T_0^4(t_1) a_1^4 \qquad (1.20)$$

приведем уравнение (1.19) к виду:

$$y^4 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t)}{\tilde{\varepsilon}_p(t_1)} = 1 \Rightarrow y^4 + \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t)}{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t_1)} \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t_1)}{\tilde{\varepsilon}_p(t_1)} = 1 \Rightarrow \sigma + (1-\sigma_1) \frac{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t)}{\tilde{\varepsilon}_{ne}(t_1)} = 1, \qquad (1.21)$$

где:

$$\tilde{\varepsilon}_p(t_1) = N \frac{\pi^2 (a_1 T_1)^4}{15} = N \frac{\pi^2 t_1^2 T_1^4}{15} \qquad (1.22)$$

– конформная плотность энергии плазмы на момент t_1. Уравнение (1.21) является *уравнением баланса энергии* в модели с минимальной связью. Это уравнение является, по сути, нелинейным дважды интегральным уравнением.

Для решения уравнения энергобаланса по аналогии с [2](3.7), [2](3.8) с учетом (1.10) введем новую безразмерную временную переменную, τ:

$$\tau = \frac{\langle \xi \rangle}{\Xi \langle \tilde{p} \rangle_1} \left[1 - \mathrm{e}^{-\Xi(t-t_1)} \right] = 2t_1 \frac{\langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_1} \left[1 - \mathrm{e}^{-(t-t_1)/2t_1} \right] \qquad (1.23)$$

где $\langle \xi \rangle = \xi(\langle p \rangle_1)$, а

$$\langle \tilde{p} \rangle_1 = \frac{\sum\limits_a (2S_a+1) \int\limits_0^\infty d\tilde{p}\, \tilde{p}^3 \Delta f_a^1(\tilde{p})}{\sum\limits_a (2S_a+1) \int\limits_0^\infty d\tilde{p}\, \tilde{p}^2 \Delta f_a^1(\tilde{p})} \qquad (1.24)$$

– средняя конформная энергия неравновесных частиц на момент смены режима расширения. Таким образом:

$$\frac{d\tau}{dt} > 0; \quad \tau > 0; \quad \tau \in [0, T), \qquad (1.25)$$

где

$$T = \lim_{t \to +\infty} \tau(t) = 2t_1 \frac{\langle \xi \rangle}{\langle \tilde{p} \rangle_1}. \qquad (1.26)$$

По аналогии с [2] введем также новую безразмерную конформную импульсную переменную:

$$\rho = \frac{\tilde{p}}{\langle \tilde{p} \rangle_1}, \qquad (1.27)$$

так что:

$$\frac{\sum\limits_a (2S_a+1) \int\limits_0^\infty d\rho \rho^3 \Delta f_a^1(\rho)}{\sum\limits_a (2S_a+1) \int\limits_0^\infty d\rho \rho^2 \Delta f_a^1(\rho)} \equiv 1 \Rightarrow \langle \rho \rangle_1 \equiv 1. \qquad (1.28)$$

и новую безразмерную функцию, $Z(\tau)$:

$$Z(\tau) = \int\limits_0^\tau y^2(\tau) d\tau, \qquad (1.29)$$

так что:

$$Z' = y^2; \quad Z(0) = 0; \quad Z'(0) = y^2(0) = \sqrt{\sigma_1}, \qquad (1.30)$$

здесь и в дальнейшем «$'$» означает производную по переменной τ.

Таким образом, с логарифмической точностью функция распределения неравновесных частиц (1.15) принимает вид:

$$\Delta f_a(\tau, \rho) = \Delta f_a^1(\rho) \mathrm{e}^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}}. \qquad (1.31)$$

2. Уравнение энергобаланса

2.1. Вывод уравнения энергобаланса

Вычислим с логарифмической точностью интеграл плотности конформной энергии неравновесных частиц (1.13):

$$\tilde{\varepsilon}_{ne}(t) = \langle\tilde{p}\rangle_1^4 \frac{1}{2\pi^2}\sum_a (2S+1)\int\limits_0^\infty \rho^3 \Delta f_a^1(\rho) \mathrm{e}^{-\frac{Z(\tau)}{\rho}} d\rho. \tag{2.1}$$

По аналогии с [2](3.14) введем новую безразмерную функцию:

$$\begin{aligned}
\Phi(Z) = \quad & \frac{\langle\tilde{p}\rangle(t)}{\langle\tilde{p}\rangle(t_1)} = \quad \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\, \tilde{p}^3 \Delta f_a^1(\tilde{p}) e^{-Z\overline{\tilde{p}}_1/\tilde{p}}}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\tilde{p}\, \tilde{p}^3 \Delta f_a^1(\tilde{p})} \Rightarrow \\
\Phi(Z) = \quad & \langle\rho\rangle(t) = \quad \frac{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\, \rho^3 \Delta f_a^1(\rho) e^{-Z/\rho}}{\sum\limits_a (2S_a+1)\int\limits_0^\infty d\rho\, \rho^3 \Delta f_a^1(\rho)}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Таким образом, с учетом (2.2) приведем уравнение энергобаланса (1.21) к виду замкнутого уравнения на функцию $Z(\tau)$:

$$y^4 + (1-\sigma_1)\Phi(Z) = 1 \Rightarrow Z'^{\,2} + (1-\sigma_1)\Phi(Z) = 1. \tag{2.3}$$

Вследствие этого уравнения и соотношений (1.30) должно выполняться начальное условие:

$$\Phi(0) = 1, \tag{2.4}$$

но, с другой стороны, оно должно выполняться и согласно определению (2.2) и соотношению (1.28). Таким образом, мы получили непротиворечивое, замкнутое относительно функции $Z(\tau)$ уравнение энеогобаланса.

2.2. Решение уравнения энергобаланса

Вследствие соотношений (1.30) и определения функции $\sigma(t)$ уравнение (2.3) после извлечения квадратного корня приводится к виду:

$$Z' = \sqrt{1-(1-\sigma_1)\Phi(Z)}. \tag{2.5}$$

Формально интегрируя уравнение (2.5) при *заданной* функции $\Phi(Z)$ с учетом соотношений (1.30), получим интеграл:

$$\int\limits_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{1-(1-\sigma_1)\Phi(Z)}} = \tau. \tag{2.6}$$

С другой стороны вследствие (1.30) из (2.5) получим:

$$[\sqrt{1-(1-\sigma_1)\Phi(Z)}]^{1/4} = y. \tag{2.7}$$

Соотношения (2.6), (2.7) являются *параметрическим решением уравнения энергобаланса*:

$$\left\{\begin{array}{ll} \tau = \tau(Z); & \text{из (2.6)}, \\ y = y(Z); & \text{из (2.7)}, \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Полученные решения формально совпадают с решениями для ультрарелятивистской Вселенной, описанными в [2] (формулы (3.19), (3.20)), – с точностью до переобозначений $\sigma_0 \to \sigma_1$, $\Delta f_a^0 \to \Delta f_a^1$; введенные в этой статье функции $Z(\tau)$, $\Phi(Z)$ обладают теми же свойствами, что и аналогичные функции, введенные в [2] (3.10), (3.16)–(3.18). Поэтому и решения уравнения энергобаланса и результаты его численного решения, как и весь анализ, проведенный ранее в работах [5, 6], сохраняют справедливость и в рассматриваемой здесь модели. Таким образом, модель энергобаланса, предложенная в работах [5, 6], оказалась чрезвычайно удачной и общей.

Какие же различия могут возникнуть в теории восстановления термодинамического равновесия на инфляционной стадии по сравнению с аналогичной ультрарелятивистской моделью [5,6]? Таких, существенных отличий, наблюдается всего два:

1. Различные формулы связи $\tau(t)$ – формула (3.7) [2]и формула (1.23) данной работы;

2. Безразмерная временная переменная в ультрарелятивистской Вселенной τ [2] изменяется в бесконечном интервале $[0, +\infty)$, тогда, как на стадии инфляции эта переменная меняется на ограниченном интервале (1.25).

Поэтому пересчет результатов компьютерного моделирования параметрических уравнений вида (2.8) к реальному масштабу времени даст различные результаты. Согласно результатам [5, 6] плазма, в основном, термализуется при временах $\tau \simeq 1$. Поэтому в случае, если окажется $T < 1$, термализация плазмы на стадии инфляции вообще никогда не произойдет, – это означает, что неравновесная сверхтепловая компонента на стадии инфляции «выживает» в более выгодных условиях, чем в ульрарелятивистской Вселенной, что, собственно говоря, и было показано в оценках [1].

Заключение

Таким образом, построенная строгая математическая модель восстановления термодинамического равновесия в инфляционной Вселенной, подтвердила фундаментальность идеи энергобаланса к исследованию процессов установления термодинамического равновесия в расширяющейся Вселенной, а также и полученные ранее аналитические результаты. Компьютерному моделированию процесса восстановления термодинамического равновесия в инфляционной Вселенной, как и вопросам стыковки результатов, полученных на разных стадиях расширения, будет посвящена следующая наша статья.

В заключение Автор еще раз выражает благодарность профессору Мельникову В.Н. за чрезвычайно плодотворный вопрос, поставленный Автору, фактически превратившийся в постоновку интересной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. I. Условия локального термодинамического равновесия. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. Т. 1. No 1. С. 79–98.

2. Игнатьев Ю.Г. Неравновесные кинетические модели Вселенной. Неравновесные кинетические модели Вселенной. II. Модель энергобаланса. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2012. Т. 1. No 2. С. 20–36.

3. Игнатьев Ю.Г. Космологические последствия скейлинга // В сб. Проблемы теории гравитации, релятивистской кинетики и эволюции Вселенной. 1988. Казань: Изд-во КГПИ. С. 62–84.

4. Игнатьев Ю.Г. Возможность нарушения термодинамического равновесия в ранней Вселенной // Известия ВУЗов, Физика. 1986. Т. 29. No 2. С. 27–32.

5. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery. // Gravitation & Cosmology. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101-113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011

6. Yu.G. Ignatyev, D.Yu. Ignatyev. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario. // Gravitation & Cosmology. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011

7. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетика неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиантъ, 2010. 508 с.

Поступила в редакцию 17.02.2013

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Nonequilibrium Kinetics Universe Models.
III. Energy-Ballance Model for the Inflation Stage.

Keywords: Early Universe, Local Thermodynamic Equilibrium, Relativistic Kinetics, Scaling, Cosmic Rays, Backward Acceleration.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Process of an establishment of thermal balance at an inflationary stage of expansion of the energydominance of black energy Installed in the assumption in the general power balance and an energydominance of superthermal particles in a power balance of cosmological plasma is considered.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. I. Local Thermodynamics Conditions. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2012. Vol. 1. No 1. pp. 79–98.

2. 1. Ignat'ev Yu.G. Nonequilibrium Kinetics Universe Models. II. Energy-Ballance Model. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013. Vol. 1. No 2. pp. 20–36.

3. Ignat'ev Yu.G. The Cosmological Consequences of Scalling *Problemi Teorii Gravitacii, Relativistskoi Kinetiki i Evolyucii Vselennoi*. 1988. Kazan: Publ. KGPI. pp. 62–84.

4. Ignat'ev Yu.G. The Capability Broken of Thermodynamic Equilibrium in Early Universe *Izvestia Vuzov*, Fizika. 1986. Vol. 29. No 2. – pp. 27–32.

5. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. A Kinetics Of The Non-Equilibrium Universe. II. A Kinetics Of The Local Thermodynamical Equilibrium's Recovery. *Gravitation & Cosmology*. 2007. Vol. 13. No 2. – p. 101–113; arXiv:1101.0366 [gr-qc], 1 Jan. 2011

6. Ignatyev Yu.G. , Ignatyev D.Yu. Kinetics of non-equilibrium Universe. III. Stability of non-equilibrium scenario. *Gravitation & Cosmology*. 2008. Vol. 14, No 4, pp. 309–313; arXiv:1101.0368 [gr-qc] 1 Jan. 2011

7. Ignat'ev Yu.G. *Relativistic Kinetics of Non-equilibrium Processes in a Gravitation Fields*. 2010. Kazan: Foliant.

Received 17.02.2013

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru