УДК 530.1

М. П. Коркина,[1] ***А. А. Егурнов***[2]

КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ И МИР ДЕ СИТТЕРА

Построена космологическая модель на основе точного решения уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости с неоднородным давлением и решения де Ситтера. Модель построена с помощью сшивки метрики де Ситтера и решения уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости с неоднородным давлением по гиперповерхности постоянного времени решения идеальной жидкости. Для сшивки метрик применялись условия сшивки Лихнеровича-Дармуа.

Ключевые слова: космологическая модель, условия сшивки Лихнеровича-Дармуа, идеальная жидкость с неоднородным давлением, метрика де Ситтера.

PACS: 04.20.Jb, 98.80.-k

Введение

Наблюдения последних десятилетий, в частности открытие ускоренного расширения Вселенной [1], необходимость создания моделей различных космологических объектов, требуют новых исследований в области ОТО. Наиболее интересным в этой связи, на наш взгляд, представляется построение моделей основанных на точных решениях уравнений Эйнштейна. В данной работе предлагается составная сферически-симметричная космологическая модель построенная на основе решения для идеальной жидкости с однородной плотностью энергии и неоднородным давлением и решения де Ситтера. Необходимым критерием существования подобной космологической модели является непрерывный переход одного пространства в другое. Возможность существования подобного перехода и условия при которых он происходит есть суть условий сшивки Лихнеровича-Дармуа [2] [3]. Исследуемые решения так же представляют особый интерес. Для однородной анизотропной идеальной жидкости существует общее решение, которое включает в себя как частные случаи три типа пространств: плоское пространство, пространство с отрицательной и пространство с положительной кривизной [4]. Пространственная часть этого решения конформна пространственной части любого из трех однородных и изотропных пространств. Решение Фридмана-Робертсона-Уокера является частным случаем этого решения. Решение де Ситтера интересно в связи с тем, что оно является одним из наиболее вероятных кандидатов на роль космологического вакуума [5].

1. Метод сшивки

Метод сшивки, использованный при построении модели, основан на условиях сшивки Лихнеровича-Дармуа, которые заключаются в следующем: две метрики

$$ds^{+2} = g^{+}_{\mu\nu} dx^{+\mu} dx^{+\nu}, \qquad ds^{-2} = g^{-}_{\mu\nu} dx^{-\mu} dx^{-\nu} \tag{1.1}$$

можно сшить по некоторой гиперповерхности в том случае, если первая и вторая квадратичные формы этой поверхности, вычисленные в первой и второй метриках, совпадают.

Первая квадратичная форма – это Риманова метрика поверхности:

$$dl_1^2 = a_{ik} du^i du^k \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где $a_{ik} = g_{\mu\nu} \zeta_i^{\mu} \zeta_k^{\nu}$, $\zeta_i^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^i}$. (Знаками "+"и "−"обозначены метрические коэффициенты и координаты первой и второй метрик соответственно.)

Вторая квадратичная форма:

$$dl_2^2 = b_{ik} du^i du^k, \tag{1.3}$$

где $b_{ik} = \nu_{\mu;\lambda} \zeta_i^{\mu} \zeta_k^{\lambda}$, ζ_i^{μ} – касательные векторы к поверхности, ν^{μ} – нормаль к ней.

[1] E-mail: 958korkin@rambler.ru
[2] E-mail: iegurnov@gmail.com

2. Массовая фунуция

Массовая функция $m(R,t)$ для сферически симметричной метрики

$$ds^2 = e^{\nu(R,t)}dt^2 - e^{\lambda(R,t)}dR^2 - r^2(R,t)d\sigma^2, \tag{2.1}$$

где $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$, имеет вид:

$$m(R,t) = r(1 + e^{\Phi} - e^{\Omega}), \tag{2.2}$$

где

$$e^{\Phi} = e^{-\nu}\dot{r}^2, \quad e^{\Omega} = e^{-\lambda}r'^2. \tag{2.3}$$

Массовая функция была введена в [6] и обсуждалась в [7] [8] [9]. В [7] было показано, что массовая функция является инвариантом и может быть определена как полная масса-энергия ограниченная сферой $r(R,t)$. Массовая функция очень удобна при работе с уравнениями Эйнштейна, т.к. она существенно упрощает их внешний вид по сравнению со стандартным. В сопутствующих координатах уравнения Эйнштейна с учетом массовой функции принимают вид:

$$\begin{cases} m' = r^2 r' T_0^0, \\ \dot{m} = r^2 \dot{r} T_1^1, \\ 2\dot{m}' = \dot{m}\Phi' + m'\dot{\Omega} + 4r\dot{r}r'T_2^2, \\ 2\dot{r}' = \dot{r}\Phi' + r'\dot{\Omega}. \end{cases} \tag{2.4}$$

где точка – производная по времени, штрих – по пространственной координате.

3. Сферически симметричное бессдвиговое решение для однородной анизотропной идеальной жидкости

Впервые решение без сдвига для идеальной жидкости с неоднородным давлением рассматривалось в [10], ряд его свойств исследовался в [11] [12] [13]. В этой главе решение получено с помощью массовой функции. Так же обсуждается смысл произвольных функций интегрирования.

Уравнения Эйнштейна для идеальной жидкости с однородной плотностью энергии и неоднородным давлением ($T_0^0 = \varepsilon(t), T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p(R,t)$) в случае сферической симметрии (2.2) принимают вид:

$$\begin{cases} m' = r^2 r' \varepsilon \\ \dot{m} = -r^2 \dot{r} p, \\ 2\dot{m}' = \dot{m}\Phi' + m'\dot{\Omega} - 4r\dot{r}r'p, \\ 2\dot{r}' = \dot{r}\Phi' + r'\dot{\Omega}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Выражая из первого уравнения системы массовую функцию и подставляя полученное значение в третье уравнение системы получаем:

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{3}r\Phi' + \frac{4}{3}r' - 2r'\right) = 0, \tag{3.2}$$

отсюда получаем выражение для Φ:

$$\Phi = \ln r^2\psi^2, \tag{3.3}$$

где $\psi = \psi(t)$ – произвольная функция интегрирования.
Четвертое уравнение дает выражение для Ω:

$$\Omega = \ln \frac{r'^2}{r^2 k'^2}, \tag{3.4}$$

где $k = k(R)$ – произвольная функция интегрирования.
Теперь с помощью (2.3) можно записать вид метрики для однородной анизотропной идеальной жидкости в случае отсутствия сдвига:

$$ds^2 = \frac{\dot{r}^2}{r^2\psi^2}dt^2 - r^2(k'^2 dR^2 + d\sigma^2). \tag{3.5}$$

Используя (3.3) (3.4) находим массовую функцию:

$$m = r(1 + r^2\psi^2 - \frac{r'^2}{r^2 k'^2}). \tag{3.6}$$

С учетом первого уравнения системы (2.5) получаем:

$$\varepsilon\frac{r^3}{3} = r + r^3\psi^2 - \frac{r'^2}{rk'^2} \tag{3.7}$$

А отсюда следует выражение для $r = r(R,t)$:

$$r = 2(e^{k+\eta} - \zeta e^{-k-\eta})^{-1}, \tag{3.8}$$

$$\zeta = \psi^2 - \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{3.9}$$

В зависимости от знака ζ (3.8) принимает вид:

$$\begin{aligned} r^{-1} &= \sqrt{\zeta}\sinh(k+\theta), \zeta > 0,\\ r^{-1} &= \sqrt{|\zeta|}\cosh(k+\theta), \zeta < 0,\\ r^{-1} &= e^{k+\theta}, \zeta = 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $e^\theta = \sqrt{|\zeta|}e^\eta$.

В отличае от модели Фридмана, где существует три непереходящих друг в друга решения, здесь существует общее решение, а тип пространства определяется функцией ζ. К тому же, решение для однородной анизотропной идеальной жидкости переходит в однородное изотропное пылевидное решение [12] при $\zeta = 0$. При $\zeta \neq 0$ переход происходит при:

$$\begin{aligned} &\dot\eta = 0, \quad \psi = \frac{\dot a}{a},\\ &k = \ln\operatorname{ctg}\frac{R}{2}, \zeta < 0,\\ &k = \ln\operatorname{cth}\frac{R}{2}, \zeta > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Решение для идеальной жидкости имеет достаточно много произвольных функций интегрирования: $k(R)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. На первый взгляд может показаться, что произвольных функций слишком много, но анализ решения (3.5) показал, что возможно понять смысл каждой из них и выбрать их вид исходя из физических соображений.

$k(R)$, вообще-то, можно выбрать любым удобным образом, т.к. тот или иной выбор вида этой функции ведет просто-напросто к переходу в другую систему координат. В метрике (3.5) замена $k'^2(R)dR^2$ на dk^2 есть ничто иное как переход от координаты R к координате k. Эту произвольную функцию можно выбрать так, что пространственная часть метрики (3.5) будет конформна пространственной части одного из трех однородных и изотропных пространств:

$$dk^2 + d\sigma^2 = \frac{1}{\sinh^2(R_1)}(dR_1^2 + \sinh^2(R_1)d\sigma^2) = \frac{1}{\sin^2(R_2)}(dR_2^2 + \sin^2(R_2)d\sigma^2) = \\ = \frac{1}{R_3^2}(dR_3^2 + R_3^2 d\sigma^2). \tag{3.12}$$

Выбор $\eta(t)$ тоже относиться к чисто координатным преобразованиям. Так метрика (3.5) может быть переписана в виде:

$$ds^2 = \frac{r_\eta^2}{r^2\psi^2}d\eta^2 - r^2(k'^2 dR^2 + d\sigma^2), \tag{3.13}$$

где $r_\eta = \frac{\partial r}{\partial\eta}$.

Анализ инвариантов тензора пространственной кривизны метрики (3.5) показал, что инварианты зависят только лишь от произвольной функции $\zeta(t)$. Так, например, пространственная кривизна и инвариант Кречмана:

$$R = 6\zeta(t), \tag{3.14}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma}R^{\mu\nu\lambda\sigma} = 12\zeta^2(t). \tag{3.15}$$

Таким образом можно считать $\zeta(t)$ функцией, которая определяет пространственную кривизну. Тот факт, что Вселенная, описываемая этим решением, является открытой, закрытой или плоской полностью определяется функцией $\zeta(t)$. Этот факт также обсуждался в статьях [14], [15].

$\psi(t)$ имеет смысл критической плотности энергии. Когда пространственная скалярная кривизна равна нулю, то соответственно $\zeta(t) = 0$ (3.14). И, согласно (3.9):

$$\psi^2(t) = \frac{1}{3}\varepsilon_c(t). \tag{3.16}$$

4. Сшивка решения однородной анизотропной идеальной жидкости и решения де Ситтера

Итак, как уже упоминалось, метрика для однородной анизотропной идеальной жидкости имеет вид:

$$dS_{pf}^2 = \frac{\dot{r}^2}{r^2\psi^2}d\tau^2 - r^2\left(dk^2 + d\sigma^2\right), \tag{4.1}$$

где $r = r(k,\tau)$, $\psi = \psi(\tau)$, точка – производная по времени.

Сшивка происходит по гиперповерхности $\tau = const$.

Касательные к поверхности:

$$\zeta_i^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Нормаль находим из уравнений:

$$\begin{cases} \nu_\mu\nu^\mu = 1, \\ \nu_\mu\zeta_i^\mu = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Единственная ненулевая нормаль:

$$\nu_0 = \frac{\dot{r}}{r\psi}. \tag{4.4}$$

Получаем первую и вторую квадратичные формы:

$$dl_1^2 = r^2dk^2 + r^2d\sigma^2, \tag{4.5}$$

$$dl_2^2 = r^2\psi dk^2 + r^2\psi d\sigma^2. \tag{4.6}$$

Теперь находим квадратичные формы для метрики де Ситтера:

$$dS_s^2 = \left(1 - \frac{r_s^2}{a^2}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s^2}{a^2}}dr_s^2 - r_s^2d\sigma^2, \tag{4.7}$$

коор: $r_s = r_s(k,\tau)$, $t = t(k,\tau)$, $a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$.

Касательные к гиперповерхности:

$$\zeta_i^\mu = \begin{pmatrix} 0 & t' & 0 & 0 \\ 0 & r_s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Черточка – производная по координате k. С помощью уравнения (4.3) находим нормали:

$$\nu_0 = -\frac{r_s'}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}, \tag{4.9}$$

$$\nu_1 = \frac{t'}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}, \tag{4.10}$$

где $A = 1 - \frac{r_s^2}{a^2}$.

Теперь находим первую и вторую квадратичные формы для де Ситтера:

$$dl_1^2 = \left(A^{-1}r_s'^2 - At'^2\right)dk^2 + r_s^2 d\sigma^2, \tag{4.11}$$

$$dl_2^2 = \frac{\frac{r_s}{a^2}t'\left(t'^2A - 3r_s'^2A^{-1}\right)}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}dk^2 + \frac{r_sAt'}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}d\sigma^2. \tag{4.12}$$

Из равенства первых и вторых квадратичных форм на гиперповерхности сшивки получаем следующие условия:

$$r^2 = r_s^2, \tag{4.13}$$

$$r^2 = A^{-1}r_s'^2 - At'^2, \tag{4.14}$$

$$r^2\psi = \frac{\frac{r_s}{a^2}t'\left(t'^2A - 3r_s'^2A^{-1}\right)}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}, \tag{4.15}$$

$$r^2\psi = \frac{r_sAt'}{\sqrt{A^{-1}r_s'^2 - At'^2}}. \tag{4.16}$$

Итак, были получены условия сшивки на гиперповерхности постоянного времени решения для однородной идеальной жидкости и решения де Ситтера. Существование условий сшивки свидетельствует о том, что на гиперповерхности сшивки геодезические остаются непрерывными. Выполнение этих условий на гиперповерхности сшивки является критерием существования космологической модели построенной на основе используемых решений.

5. Плотность энергии на гиперповерхности сшивки

Из (4.15), (4.16) следует равенство:

$$r_sAt' = \frac{r_s}{a^2}t'\left(t'^2A - 3r_s'^2A^{-1}\right), \tag{5.1}$$

с учетом (4.14) получаем:

$$A = \frac{1}{a^2}\left(-r_s^2 - 2r_s'^2A^{-1}\right), \tag{5.2}$$

$$r_s'^2 = \frac{r_s^2 - a^2}{2}. \tag{5.3}$$

Используя (3.7) и (4.13) получаем значение энергии на гиперповерхности сшивки:

$$\varepsilon_{pf} = \frac{1}{a^2}. \tag{5.4}$$

Известно, что плотность энергии для пространства де Ситтера не зависит от времени и имеет постоянное значение:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{a^2}. \tag{5.5}$$

В итоге получаем равенство плотностей энергии на гиперповерхности сшивки для используемых решений:

$$\varepsilon_{pf} = \varepsilon_s \tag{5.6}$$

Это означает, что в предложенной модели отсутствует скачок плотности энергии на гиперповерхности сшивки.

Заключение

Построена космологическая модель, в которой отсутствует первоначальная сингулярность, т.е. Большой взрыв. Если в инфляционных теориях на ранней стадии развития Вселенной, после Большого взрыва, Вселенная находилась в неустойчивом вакуумноподобном состоянии с уравнением состояния $\varepsilon + p = 0$, т.е. описывалась решением де Ситтера, то в рассматриваемой космологической модели Большой взрыв отсутствует, Вселенная путем фазового перехода переходит из вакуумноподобного состояния в состояние, описываемое рассматриваемой космологической моделью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromillo, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, John Tonry // Astron. J. 1998. Vol.116. P. 1009–1038.

2. Lichnerovicz A. Les theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme. 1955.

3. Bonnor W.B., Vickers P.A. Junction conditions in general relativity // Gen. Relativity Gravitation 1981. Vol.13. №1. P. 29–36.

4. Burlikov V.V., Boots S.V., Korkina M.P. Model of a Fluid Sphere // Gravit. Cosmol. 1996. Vol.2, №2 P. 167–173.

5. Чернин А.Д. Космический вакуум // Успехи физических наук. 2001. Том 171, №11. С. 1153–1175.

6. Hernandes W.C., Misner G.C. Observer Time as a Coordinate in Relativistic Spherical Hydrodynamics // Astrophys. J. 1968. Vol.143 P. 452.

7. Cahill M.E., Mc.Vittie G.C. Spherical Symmetry and Mass?Energy in General Relativity. I. General Theory // J.Math.Phys. 1970. Vol.11 P. 1382.

8. Glass E.N. Shear?free gravitational collapse // J.Math.Phys. 1979. Vol.20 P. 1508.

9. Knutsen H. Physical properties of an exact spherically symmetric solution with shear in general relativity // Gen. Relativity Gravitation 1992. Vol.24 P. 1297.

10. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Под ред. Шмутцера Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. [Пер. с англ.] М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.

11. Roberto A. Sussman On spherically symmetric shear?free perfect fluid configurations (neutral and charged). I // J. Math. Phys. 1987. Vol.28. №5 P. 1118–1136.

12. Roberto A. Sussman On spherically symmetric shear?free perfect fluid configurations (neutral and charged). II. Equation of state and singularities // J. Math. Phys. 1988. Vol.29. №4 P. 945–970.

13. Roberto A. Sussman On spherically symmetric shear?free perfect fluid configurations (neutral and charged). III. Global view // J. Math. Phys. Vol.29. №5 1988. P. 1177–1211.

14. Cook M.W. On a Class of Exact Spherically Symmetric Solutions to the Einstein Gravitational Field Equations // Aust.J.Phys. 1975. Vol.28 P. 413.

15. Krasinski A. On the global geometry of the stephani universe // Gen. Relativity Gravitation 1983. Vol.15 P. 673.

Поступила в редакцию 29.05.2013

Коркина Марина Петровна, д.ф.-м.н., профессор, кафедра теоретической физики, Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, 49010, Украина, г. Днепропетровск, пр. Гагарина, 72.
E-mail: 958korkin@rambler.ru

Iegurnov Oleksii Oleksandrovich, postgraduate student, Department of Physics, Electronics and Computer Sciences, Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 72 Gagarina Ave., Dnipropetrovsk 49010, Ukraine.
E-mail: iegurnov@gmail.com

M. P. Korkina, O. O. Iegurnov

Cosmological model with perfect fluid and de Sitter universe

Keywords: cosmological model, Lichnerowicz-Darmois matching conditions, perfect fluid with nonuniform presure, de Sitter metric.

PACS: 04.20.Jb, 98.80.-k

Shear-free cosmological models are too simple for cosmological purposes and they contain all the classical FLRW cosmological models, also with pressure. They are capable of reproducing the classical cosmological results in the limit. The cosmiological model based on the shear-free spherically symmetric solution of Einstein's equations for the perfect fluid with uniform density but with nonuniform pressure is very attractive for many reasons. Special interest is the fact, that for the homogeneous anisotropic perfect fluid exist common solution, which containe three types of spaces as special cases. The spatial curvature and other invariants of the curvature tensor of the homogeneous anisotropic perfect fluid depends on time only by the function $\zeta(t)$. This solutions also extremely close to the FLRW solutions.

The composite cosmological model has been built. The de Sitter solution and shear-free solution of perfect fluid are fitting on the hypersurface $\tau = const$. The Lichnerowicz-Darmois matching conditions are used. It was found, that energy density of considered model on the boundary equals to the energy density of the de Sitter's solution, i.e. this cosmological model has no initial singularity.

REFERENCES

1. Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromillo, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, John Tonry.*Astron. J.* Vol.116 (1998): 1009-1038.

2. Lichnerovicz A. *Les theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme* (1955).

3. Bonnor W.B., Vickers P.A. *Gen. Relativity Gravitation* Vol.13, No.1 (1981): 29–36.

4. Burlikov V.V., Boots S.V., Korkina M.P. *Gravit. Cosmol.* Vol.2, No.2 (1996): 167–173.

5. Chernin A.D. *Phys. Usp.* Vol.171, No.11, (2001): 1153–1175.

6. Hernandes W.C., Misner G.C. *Astrophys. J.* Vol.143 (1968): 452.

7. Cahill M.E., Mc.Vittie G.C. *J.Math.Phys.* Vol.11 (1970): 1382.

8. Glass E.N. *J.Math.Phys.* Vol.20 (1979): 1508.

9. Knutsen H. *Gen. Relativity Gravitation* Vol.24 (1992): 1297.

10. Kramer D., Stephani H., MacCallum M.A.H., Herlt E., Exect solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

11. Roberto A. Sussman *J. Math. Phys.* Vol.28, No.5 (1987): 1118–1136.

12. Roberto A. Sussman *J. Math. Phys.* Vol.29, No.4 (1988): 945–970.

13. Roberto A. Sussman *J. Math. Phys.* Vol.29, No.5 (1988): 1177–121.1

14. Cook M.W. *Aust.J.Phys.* Vol.28 (1975): 413.

15. Krasinski A. *Gen. Relativity Gravitation* Vol.15 (1983): 673.

Received 29.05.2013

Korkina Maria Petrovna, Doktor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Physics, Electronics and Computer Sciences, Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 72 Gagarina Ave., Dnipropetrovsk 49010, Ukraine.
E-mail: 958korkin@rambler.ru
E-mail: 958korkin@rambler.ru

Iegurnov Oleksii Oleksandrovich, postgraduate student, Department of Physics, Electronics and Computer Sciences, Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, 72 Gagarina Ave., Dnipropetrovsk 49010, Ukraine.
E-mail: iegurnov@gmail.com