УДК 530.12: 531.51

Н. Н. Паклин,[1] *М. С. Соколова* [2]

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ В ВАКУУМЕ

Статья посвящена исследованию симметрий и законов сохранения уравнений Эйнштейна в вакууме. В работе рассмотрен случай, когда метрика зависит от двух переменных. В частности, этот случай соответствует плоским гравитационным волнам.

Ключевые слова: гравитация, симметрии, законы сохранения.

PACS: 04.20.-q

Введение

В работе рассмотрен случай метрики, зависящей от двух переменных. Гравитационные поля, описываемые такой метрикой включают в себя следующие варианты: нестационарное поле, т.е. одна из переменных — временная; стационарное поле, т.е. метрический тензор не зависит от времени.

Нестационарный вариант описывает: плоско-симметричные гравитационные волны; цилиндрические гравитационные волны.

Стационарный вариант описывает: аксиально симметричное поле; трансляционно симметричное поле (поле обобщеннго цилиндра, т.е. не зависящее от одной пространственной переменной).

В работе применен биметрический подход, т.е. квадрат линейного элемента записан в виде:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad i,k = 0,1; \quad \alpha,\beta = 2,3, \tag{0.1}$$

где обе компоненты метрики g_{ik}, $g_{\alpha\beta}$ зависят только от переменных x^0, x^1 либо x^2, x^3. При биметрическом подходе система вакуумных уравнений тяготения является существенно нелинейной, но интегрируемой с точки зрения солитонной математики, что показано в работах [1], [2]. В этих же работах отмечено, что уравнения Эйнштейна при биметрическом подходе могут быть записаны в виде законов сохранения. Однако, законов сохранения может быть больше, чем уравнений. Согласно теореме Нетер, это связано с количеством вариационных симметрий.

Далее будем использовать следующие обозначения: $x^0 = t$, $x^1 = z$, $x^2 = x$, $x^3 = y$. Пусть метрический тензор зависит только от переменных t и z, производные по этим переменным будем обозначать точкой и штрихом соответственно.

В общем случае двумерная компонента метрики g_{ik} имеет вид:

$$ds^2 = g_{00}(t,z)dt^2 + 2g_{01}(t,z)dtdz + g_{11}(t,z)dz^2 \tag{0.2}$$

такое представление фиксирует выбор координат с точностью до преобразований $t \to f_1(t,z)$, $z \to f_2(t,z)$, которые позволяют нам выбрать две метрические функции произвольным образом, не нарушающим заданную сигнатуру и размерность. Пусть $g_{01} = 0$ и $|g_{11}| = g_{00}$, либо $g_{01} \neq 0$, а $g_{11} = g_{00} = 0$, тогда двумерная компонента метрики g_{ik} приобретает конформно-плоский вид.

В работах [3], [4], [5] изучались симметрии, рассматриваемых здесь уравнений тяготения, в различных аспектах. Изучая симметрии уравнений поля и функционала (действия), было замеченно, что удобно выбрать метрику в следующем виде:

$$ds^2 = 2e^u dtdz - e^v \left(dx^2 + \left[f^2 + w^2 e^{-2v}\right] dy^2 - 2f dxdy\right) \ , \tag{0.3}$$

здесь новые переменные t и z имеют смысл запаздывающего и опережающего времени: ($t \sim x^0 - x^1$, $z \sim x^0 + x^1$), а функции u, v, w, f зависят от переменных t и z. В стационарном случае такое преобразование метрических коэффициентов при dx^2 и dy^2 называется переходом в класс Вейля ([6], С. 410).

[1]E-mail: npaklin@sfu-kras.ru
[2]E-mail: m_silver@list.ru

В стационарном случае все рассмотренные выше варианты отличаются только обозначением переменных, т.е. совпадают по форме или преобразуются друг в друга с помощью комплексных подстановок. Поэтому мы ограничимся нестационарным вариантом для плоско симметричных гравитационных волн. Такой выбор определяется соображениями удобства, кроме того этот случай интересен с физической точки зрения, поскольку гравитационное излучение от островного (пространственно ограниченного) источника на большом расстоянии становится плоско симметричным.

1. Уравнения гравитационного поля

Как было отмечено, удобно записать метрику в виде (0.3). Определим тензор Риччи как свертку тензора Римана-Кристоффеля по первому и последнему индексам $R_{kl} = R^j_{klj}$. Тогда вакуумные уравнения Эйнштена $R_{ik} = 0$ — это система из шести уравнений. Бесследовость тензора Риччи означает, что любое из уравнений может быть представлено как комбинация остальных пяти уравнений. Вместо системы $R_{ik} = 0$, удобно использовать эквивалентную ей систему уравнений

$$\dot{w}' = 0\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{f}' + \dot{f}\,(v' - w'/2w) + f'\,(\dot{v} - \dot{w}/2w) = 0\,, \tag{1.2}$$

$$\dot{v}' + \dot{v}w'/2w + v'\dot{w}/2w - \dot{f}f'e^{2v}/w^2 = 0\,, \tag{1.3}$$

$$2\dot{u}' + \dot{v}v' - \dot{v}w'/w - v'\dot{w}/w + \dot{f}f'e^{2v}/w^2 = 0\,. \tag{1.4}$$

$$u' + v' - (\ln w')' = \frac{1}{2}\frac{wv'^2}{w'} + \frac{1}{2}\frac{f'^2e^{2v}}{ww'}\,, \tag{1.5}$$

$$\dot{u} + \dot{v} - (\ln \dot{w})^{\cdot} = \frac{1}{2}\frac{w\dot{v}^2}{\dot{w}} + \frac{1}{2}\frac{\dot{f}^2e^{2v}}{w\dot{w}}\,. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5) и (1.6) позволяют выразить функцию u через криволинейный интеграл

$$u = -v + \ln(\dot{w}w') + \frac{1}{2}\left[\int \left(w^2\dot{v}^2 + \dot{f}^2e^{2v}\right)\frac{dt}{w\dot{w}} + \left(w^2v'^2 + f'^2e^{2v}\right)\frac{dz}{ww'}\right]\,. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.4) выполняется тождественно с учетом остальных уравнений. В результате остается замкнутая система трех уравнений (1.1), (1.2) и (1.3) для трех функций w, v и f.

Фактически, эта система сводится к двум уравнениям (1.2) и (1.3) для функций v и f, а общее решение уравнения (1.1) позволяет выразить функцию w как $w(t,z) = w_1(t) + w_2(z)$.

2. Уравнения Эйлера-Лагранжа

Удобно представить уравнения Эйнштейна как систему уравнений поля, полученные из вариационного принципа $\delta S = 0$, т.е. как уравнения Эйлера-Лагранжа. В данном разделе потребуется метрика общего вида:

$$ds^2 = e^u\left(hdt^2 + 2dtdz - rdz^2\right) - e^v\left(dx^2 + \left[e^{-2v}w^2 + f^2\right]dy^2 - 2fdxdy\right)\,. \tag{2.1}$$

Функционал в данной работе определен выражением $S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}dtdz$, где плотность функции Лагранжа будем обозначать как $L \equiv \sqrt{-g}\mathcal{L}$ с якобианом $\sqrt{-g} = we^u\sqrt{1+hr}$.

Лагранжиан $\mathcal{L}$ следует вычислять с помощью метрики общего вида по формуле ([6], С. 362):

$$\mathcal{L} = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)\,. \tag{2.2}$$

Если раскрыть суммы и подставить компоненты символа Кристоффеля, то получим явный вид для плотности функции Лагранжа:

$$L = \frac{1}{\sqrt{1+hr}}\left(L_0 + L_1 + \frac{2w}{1+hr}[\dot{r}h' - r'\dot{h}]\right) , \tag{2.3}$$

$$L_0 = (\dot{u}+\dot{v})w' + (u'+v')\dot{w} + w\dot{v}v' - \dot{f}f'e^{2v}/w , \tag{2.4}$$

$$L_1 = \dot{r}\dot{w} - h'w' + r\left[(\dot{u}+\dot{v})\dot{w} - \frac{w\dot{v}^2}{2} - \frac{\dot{f}^2e^{2v}}{2w}\right] - h\left[(u'+v')w' - \frac{wv'^2}{2} - \frac{f'^2e^{2v}}{2w}\right] . \tag{2.5}$$

Для метрики (0.3) уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид $E_\alpha(L) = 0$, где оператор Эйлера выражается через плотность функции Лагранжа как

$$E_\alpha(L) = \lim_{h,r\to 0}\left[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{,i}}\right)\right] , \tag{2.6}$$

здесь $u^\alpha = (u,v,w,f,h,r)$, $u^\alpha_{,i} \equiv \partial u^\alpha/\partial x^i$, $x^i = (t,z)$, а D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x^i. Выпишем явный вид оператора полного дифференцирования для данного случая

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{6} u^\alpha_{,i}\frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{k=0}^{1}\sum_{\alpha=1}^{6} u^\alpha_{,ik}\frac{\partial}{\partial u^\alpha_{,k}} , \tag{2.7}$$

где $u^\alpha_{,ik} \equiv \partial^2 u^\alpha/\partial x^i \partial x^k$.

Обнаружено, что уравнения поля в случае $h, r = 0$ проще получить как

$$\frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha_{,i}}\right) = 0 , \ \alpha = 1,2,3,4 ; \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial u^\alpha} - D_i\left(\frac{\partial L_1}{\partial u^\alpha_{,i}}\right) = 0 , \ \alpha = 5,6 . \tag{2.9}$$

Это связано со структурой плотности функции Лагранжа L. Если функции h и r считать малыми первого порядка, то плотность функции Лагранжа можно разложить в ряд как

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n = L_0 + L_1 + ... \tag{2.10}$$

Функция L_0 не зависит от величин h и r, а функция L_1 зависит от этих величин линейно. После дифференцирования переменные h и r уже не содержатся в уравнениях поля. Этот результат будет использован ниже.

3. Симметрии и законы сохранения

Исследование симметрий уравнений поля помогает находить точные решения, а так же позволяет глубже понять структуру самих уравнений. Исследуем симметрии полученных уравнений относительно точечных преобразований. Под симметрией понимается непрерывная группа (группа Ли) точечных преобразований, оставляющая уравнения поля неизменными по виду. Преобразования будем описывать формулами

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^i, u^\alpha, a) , \quad \bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(x^i, u^\alpha, a) , \tag{3.1}$$

где a — групповой параметр. Формулы (3.1) переходят в тождественные преобразования при $a = 0$. Для вычисления явного вида преобразований (3.1) воспользуемся методом теории групп Ли [7].

Сначала вычислим бесконечно малые преобразования. Такие преобразования принято описывать генератором (инфинитезимальным оператором)

$$\vec{V} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial z} + \phi^1\frac{\partial}{\partial u} + \phi^2\frac{\partial}{\partial v} + \phi^3\frac{\partial}{\partial w} + \phi^4\frac{\partial}{\partial f} , \tag{3.2}$$

где функции τ, ξ и ϕ^α $(\alpha = 1,2,3,4)$ зависят от переменных (t,z,u,v,w,f) и являются коэффициентами при первой степени группового параметра a при разложении преобразований (3.1) в степенной ряд по групповому параметру a. Вычисления дали следующий результат:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau(t)\,; & \xi &= \xi(z)\,; \\ \phi^1 &= C_5 - \dot\tau(t) - \xi'(z)\,; & \phi^2 &= C_1 - C_3 + 2C_2 f\,; \\ \phi^3 &= C_1 w\,; & \phi^4 &= C_4 + C_3 f + C_2 w^2 e^{-2v} - C_2 f^2\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные. Из полученных результатов видно, что генератор является линейной суперпозицией базисных генераторов $\vec V_n$ с постоянными C_n $(n = 1,2,3,4,5)$.

Алгебра Ли — это линейное пространство, построенное на базисных генераторах:

$$\vec V_1 = \frac{\partial}{\partial u}\,; \quad \vec V_2 = \frac{\partial}{\partial f}\,; \quad \vec V_3 = \frac{\partial}{\partial v} - f\frac{\partial}{\partial f}\,; \quad \vec V_4 = \frac{\partial}{\partial v} + w\frac{\partial}{\partial w}\,; \quad \vec V_5 = 2f\frac{\partial}{\partial v} + \left(w^2 e^{-2v} - f^2\right)\frac{\partial}{\partial f}\,. \tag{3.4}$$

$$\vec V_6 = \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(z)\frac{\partial}{\partial z} - [\dot\tau(t) + \xi'(z)]\,\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{3.5}$$

Пять базисных генераторов $\vec V_n$ $(n = 1,2,3,4,5)$, образуют конечную часть алгебры Ли, а базисный генератор $\vec V_6$ является бесконечномерной частью алгебры Ли. Произвольные функции $\tau(t)$ и $\xi(z)$ в шестом генераторе — это следствие анормальности вакуумных уравнений тяготения, в соответствие со второй теоремой Нетер.

Восстановим группу Ли (3.1) для нашей системы уравнений поля. Удобно описывать группу Ли набором однопараметрических групп G_n, отвечающих базисным генераторам $\vec V_n$. Для этого необходимо, для каждого базисного генератора, решить систему уравнений Ли. В результате получены следующие выражения для подгрупп Ли G_n:

$$\vec V_1 \to G_1: \quad \bar u = u + a\,, \quad \bar f = f\,, \quad \bar t = t\,, \quad \bar z = z\,, \quad \bar v = v\,, \quad \bar w = w\,. \tag{3.6}$$

$$\vec V_2 \to G_2: \quad \bar f = f + a\,, \quad \bar t = t\,, \quad \bar z = z\,, \quad \bar u = u\,, \quad \bar v = v\,, \quad \bar w = w\,. \tag{3.7}$$

$$\vec V_3 \to G_3: \quad \bar v = v + a\,, \quad \bar f = f e^{-a}\,, \quad \bar t = t\,, \quad \bar z = z\,, \quad \bar u = u\,, \quad \bar w = w\,. \tag{3.8}$$

$$\vec V_4 \to G_4: \quad \bar v = v + a\,, \quad \bar w = w e^{a}\,, \quad \bar t = t\,, \quad \bar z = z\,, \quad \bar u = u\,, \quad \bar f = f\,. \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} \vec V_5 \to G_5: \quad \bar t = t\,, \quad \bar z = z\,, \quad \bar u = u\,, \quad \bar w = w, \\ \bar v = v + \ln\left(1 + 2af + a^2[f^2 + w^2 e^{-2v}]\right)\,, \quad \bar f = \frac{f + a[f^2 + w^2 e^{-2v}]}{(1 + af)^2 + a^2 w^2 e^{-2v}}\,. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Генератор $\vec V_6$ содержит произвольные функции $\tau(t)$, $\xi(z)$ и порождает бесконечномерную часть группы.

Законы сохранения. Законы сохранения являются следствием уравнений поля, их вычисление дает важную информацию об изучаемом поле и представляет самостоятельный интерес. Условия существования законов сохранения тесно связаны с симметриями уравнений поля и описываются теоремой Нетер [7], [8].

В полевых теориях закон сохранения определяется как $Div\vec P = 0$, где $\vec P$ называется сохраняющийся или нетеров ток. Если одна из независимых переменных имеет смысл времени, то закон сохранения удобно представить в виде уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\vec J = 0\,, \quad \vec P = \left(\rho, \vec J\,\right)\,. \tag{3.11}$$

Величина ρ называется плотностью. Если $\vec J$ быстро убывает с расстоянием, а объемный интеграл $I = \int \rho dV$ сходится, то величину I называют интегралом движения. В нашем случае уравнение непрерывности будет записываться как $\partial\rho/\partial t + \partial J/\partial z = 0$.

Пусть функционал $S = \int L dt dz$ обладает вариационной симметрией, описываемой генератором

$$\vec{V} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \,. \tag{3.12}$$

Производящей функцией (характеристикой), отвечающей генератору $\vec{V}$ называется выражение

$$Q^\alpha = \phi^\alpha - u_i^\alpha \xi^i \,. \tag{3.13}$$

Согласно теореме Нетер законы сохранения и уравнения Эйлера-Лагранжа связаны соотношением

$$Div\vec{P} = \vec{Q} \cdot \vec{E}(L) \quad \text{или} \quad \sum_i D_i P^i = \sum_\alpha Q^\alpha E_\alpha(L) \,. \tag{3.14}$$

Это соотношение называется законом сохранения в характеристической форме.

Если плотность функции Лагранжа L зависит от производных первого порядка, то сохраняющийся (нетеров) ток вычисляется по формуле:

$$P^i = -\left(L\xi^i + \sum_\alpha Q^\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} \right) \,. \tag{3.15}$$

Условие, с помощью которого проверяется вариационность генератора $\vec{V}$, называется критерием вариационности и выглядит как

$$\mathbf{pr}\vec{V}(L) + L \cdot Div\vec{\xi} = 0 \,, \tag{3.16}$$

где выражение $\mathbf{pr}\vec{V}$ называется продолжением генератора, его вычисление описывается во всех руководствах по приложениям теории групп Ли к исследованию симметрий дифференциальных уравнений (см., например, [7]).

На практике, удобно вычислять симметрии самих уравнений Эйлера-Лагранжа, а затем проверять какие из симметрий являются вариационными, т.е. связаны с законами сохранения.

При вычислении законов сохранения удобно воспользоваться разложением (2.10). Вычисления показали, что для конечномерной части алгебры Ли систему законов сохранения удобно представить в виде эквивалентной системы уравнений

$$D_t\,(w') + D_z\,(\dot{w}) = 0 \,, \tag{3.17}$$

$$D_t \left(\frac{e^{2v} f'}{w} \right) + D_z \left(\frac{e^{2v} \dot{f}}{w} \right) = 0 \,, \tag{3.18}$$

$$D_t \left(\frac{e^{2v} f f'}{w} - w v' \right) + D_z \left(\frac{e^{2v} f \dot{f}}{w} - w \dot{v} \right) = 0 \,, \tag{3.19}$$

$$D_t \left(\frac{e^{2v} f^2 f'}{w} + 2f(w' - wv') - wf' \right) + D_z \left(\frac{e^{2v} f^2 \dot{f}}{w} + 2f(\dot{w} - w\dot{v}) - w\dot{f} \right) = 0 \,. \tag{3.20}$$

Если раскрыть скобки в этих выражениях, то, согласно теореме Нетер, получится сумма операторов Эйлера, домноженных на производящие функции вариационных симметрий. В полученных выражениях не содержится функция u, следовательно, в сумме операторов Эйлера будут присутствовать только операторы, порождающие уравнения (1.1), (1.2), (1.3).

Операторы E_5 и E_6 порождают уравнения (1.5) и (1.6), это уравнения первого порядка по переменной u, условие совместности этих уравнений можно рассматривать как закон сохранения, но удобнее выразить из них явно функцию u в виде криволинейного интеграла (1.7).

Таким образом, законов сохранения оказалось больше, чем уравнений, в которых они содержатся. Причина этого очевидна, по теореме Нетер, количество законов сохранения совпадает с количеством вариационных симметрий (производящих функций), содержащихся в уравнениях поля.

Замечание. Набор законов сохранения образует линейное пространство, т.е. каждый из законов сохранения зависит от выбора представления (базиса). Удобно выбирать представление, в котором законы сохранения выглядят проще. Соответственно и правая часть закона сохранения в характеристической форме зависит от выбора представления.

В теории групп Ли принято говорить не о законе сохранения, а о классе эквивалентности законов сохранения. Другими словами, два закона сохранения считаются эквивалентными, если они отличаются на тривиальный закон сохранения. Существует два типа тривиальных законов сохранения.

1. Закон сохранения выполняется независимо от уравнения. Пример: $div\vec{P} \equiv 0$, где $\vec{P} = rot\vec{A}$.

2. Компоненты сохраняющегося тока $\vec{P}$ обращаются в ноль на решениях уравнения. Пример: условие совместности уравнений (1.5) и (1.6) является тривиальным законом сохранения.

4. Случай диагональной метрики

В [9] был рассмотрен случай метрики (0.3), когда $f = 0$. В этом случае метрика записывается как

$$ds^2 = 2e^u dtdz - e^v dx^2 - w^2 e^{-v} dy^2 \,, \tag{4.1}$$

а уравнения поля принимают простой вид:

$$\dot{w}' = 0 \,, \tag{4.2}$$

$$2w\dot{v}' + \dot{v}w' + v'\dot{w} = 0 \,, \tag{4.3}$$

$$2\dot{u}' + \dot{v}v' - \dot{v}w'/w - v'\dot{w}/w = 0 \,, \tag{4.4}$$

$$u' + v' - (\ln w')' = \frac{wv'^2}{2w'} \,, \tag{4.5}$$

$$\dot{u} + \dot{v} - (\ln \dot{w})^{\cdot} = \frac{w\dot{v}^2}{2\dot{w}} \,. \tag{4.6}$$

Система (4.2) — (4.6) сводится к двум выражениям для функций u и w

$$u = -v + \ln(\dot{w}w') + \int \frac{w\dot{v}^2}{2\dot{w}}\, dt + \frac{wv'^2}{2w'}\, dz \,, \quad w(t,z) = \alpha(t) + \beta(z) \tag{4.7}$$

и одному линейному уравнению для функции v:

$$2w\dot{v}' + \dot{v}w' + v'\dot{w} = 0 \,. \tag{4.8}$$

Казалось бы этот простой случай не представляет интереса, потому что уравнения в этом случае получаются как предел нелинейных уравнений при $f \to 0$. Но это не относится к симметриям и законам сохранения. Более того, как оказалось, в линейном случае очень ярко проявляет себя анормальность уравнений Эйнштейна в вакууме, т.е. недоопределенность как следствие общей ковариантности. Такие ситуации описываются второй теоремой Нетер и представляют наибольший интерес для физических теорий поля.

Вторая теорема Нетер доказывает существование связи между анормальностью уравнений Эйлера-Лагранжа и существованием произвольных функций, описывающих симметрии функционала. На практике приходится сталкиваться с очень необычными ситуациями при изучении симметрий и законов сохранения анормальных систем. Ниже будет рассмотрена такая ситуация.

Исследуем симметрии уравнения (4.8) относительно точечных преобразований. Сначала вычислим бесконечно малые преобразования с генератором

$$\vec{V} = \tau(t,z,v)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t,z,v)\frac{\partial}{\partial z} + \phi(t,z,v)\frac{\partial}{\partial v} \,. \tag{4.9}$$

Вычисления дали следующий результат:

$$\begin{aligned} \tau(t,z,v) &= \left[C_1 + 2C_2\alpha(t) + 2C_3\alpha(t)^2\right]\dot{\alpha}(t)^{-1} \,, \\ \xi(t,z,v) &= \left[-C_1 + 2C_2\beta(z) - 2C_3\beta(z)^2\right]\beta'(z)^{-1} \\ \phi(t,z,v) &= \varphi(t,z,v) + \left[C_4 - C_2 - C_3(\alpha(t) - \beta(z))\right] v \,, \end{aligned} \tag{4.10}$$

где $\varphi(t,z,v)$ — произвольное решение уравнения (4.8), C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Из полученных результатов видно, что генератор является линейной суперпозицией базисных генераторов $\vec{V}_i$ с постоянными C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, а пятый базисный генератор $\vec{V}_5 = \varphi(t, z, v)\partial/\partial v$ — это следствие линейности уравнения (4.8) и не включается в конечномерную часть алгебры Ли.

Алгебра Ли, описывающая симметрии уравнения (4.8) — это линейное пространство, построенное на базисных генераторах:

$$\vec{V}_1 = \dot{\alpha}(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - \beta'(z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{4.11}$$

$$\vec{V}_2 = 2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t} + 2\beta(z)\beta'(z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z} - v\frac{\partial}{\partial v}\,, \tag{4.12}$$

$$\vec{V}_3 = 2\alpha(t)^2\dot{\alpha}(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial t} - 2\beta(z)^2\beta'(z)^{-1}\frac{\partial}{\partial z} + [\beta(z) - \alpha(t)]v\frac{\partial}{\partial v}\,, \tag{4.13}$$

$$\vec{V}_4 = v\frac{\partial}{\partial v}\,. \tag{4.14}$$

Некоротые решения уравнения (4.8) не меняются при групповых преобразованиях — остаются инвариантными. Такие инвариантные решения можно найти, если известна алгебра Ли. Алгоритм вычисления инвариантных решений описывается во многих работах (см., например, [7]). Удобно находить решения, инвариантные относительно преобразований, соответствующих базисным генераторам. Ниже $w = \alpha(t) + \beta(z)$.

Первое инвариантное решение

$$u = \frac{1}{2}\ln(\dot{\alpha}\beta') + B^2 \cdot \ln(w)\;, \quad v = A + B \cdot \ln(w)\,. \tag{4.15}$$

Второе инвариантное решение

$$u = \frac{1}{2}\ln(\dot{\alpha}\beta') + \int w \cdot \left(\frac{\dot{v}^2}{\dot{\alpha}}dt + \frac{v\prime^2}{\beta'}dz\right)\,, v = \beta(z)^{-1/2}\left[A \cdot K\left(i\sqrt{\alpha/\beta}\right) + B \cdot CK\left(i\sqrt{\alpha/\beta}\right)\right]\,, \tag{4.16}$$

здесь A, B — постоянные, $K\left(i\sqrt{\alpha/\beta}\right), CK\left(i\sqrt{\alpha/\beta}\right)$ — полные эллиптические интегралы мнимого аргумента (см. [10]).

Третье инвариантное решение

$$u = \frac{1}{2}\ln(\dot{\alpha}\beta') + \int w \cdot \left(\frac{\dot{v}^2}{\dot{\alpha}}dt + \frac{v\prime^2}{\beta'}dz\right)\,, v = [\alpha(t) \cdot \beta(z)]^{-1/2}\left(A + B\ln\left[\alpha(t)^{-1} + \beta(z)^{-1}\right]\right)\,. \tag{4.17}$$

Четвертое инвариантное решение.

$$u = \frac{1}{2}\ln(\dot{\alpha}\beta')\,, \quad v = const\,. \tag{4.18}$$

5. Законы сохранения в случае диагональной метрики

В этом разделе будет показано, что стандартный алгоритм вычисления законов сохранения требует уточнений. Анормальность вакуумных уравнений Эйнштейна приводит к необычной ситуации. В частности, не все вариационные симметрии содержатся в базисном наборе генераторов, описывающих симметрии уравнений поля (4.2) – (4.6). Если вычислить базисный набор генераторов для уравнений (4.2) – (4.4), то все вариационные симметрии обнаруживаются лишь в некоторых представлениях. И только прямое исследование симметрий функционала дает все вариационные симметрии, а значит и все законы сохранения.

В этом разделе удобно переписать метрику в следущей форме:

$$ds^2 = e^{u-v}(hdt^2 - rdz^2 + 2dtdz) - (e^v dx^2 + e^{-v}w^2dy^2)\,, \tag{5.1}$$

что существенно упрощает некоторые выражения. Функционал $S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L}dtdz$ содержит якобиан $\sqrt{-g} = we^{u-v}\sqrt{1 + hr}$. Плотность функции Лагранжа $L \equiv \sqrt{-g}\mathcal{L}$ имеет вид

$$L = \frac{1}{\sqrt{1+hr}} \left(L_0 + L_1 + \frac{w}{2(1+hr)} [\dot{r}h' - r'\dot{h}] \right) , \tag{5.2}$$

где

$$L_0 = \dot{u}w' + u'\dot{w} + w\dot{v}v' , \quad L_1 = \dot{r}\dot{w} - h'w' + r(\dot{u}\dot{w} - w\dot{v}^2/2) - h(u'w' - wv'^2/2) .$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для случая $h, r = 0$ имеют вид $E_\alpha(L) = 0$, где оператор Эйлера выражается через плотность функции Лагранжа сгласно (2.6).

В данном разделе оператор полного дифференцирования определяется формулой

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{5} u^\alpha_{,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{k=0}^{1} \sum_{\alpha=1}^{5} u^\alpha_{,ik} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{,k}} . \tag{5.3}$$

Систему уравнений поля $E_\alpha(L) = 0$ получить проще, если разложить плотность функции Лагранжа в ряд $L = L_0 + L_1 + \dots$.

В результате операторы Эйлера можно представить как

$$E_\alpha(L_0) = \frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L_0}{\partial u^\alpha_{,i}} \right) , \ \alpha = 1,2,3 ; \quad E_\alpha(L_1) = \frac{\partial L_1}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial L_1}{\partial u^\alpha_{,i}} \right) , \ \alpha = 4,5 . \tag{5.4}$$

Или в явном виде:

$$E_1(L_0) = -2\dot{w}' , \quad E_2(L_0) = 2w\dot{v}' + \dot{v}w' + v'\dot{w} , \quad E_3(L_0) = -(2\dot{u}' + \dot{v}v') ; \tag{5.5}$$

$$E_4(L_1) = \dot{u}\dot{w} - w\dot{v}^2/2 - \ddot{w} , \quad E_5(L_1) = w'' - u'w' + wv'^2/2 . \tag{5.6}$$

Непосредственное вычисление симметрий уравнений (4.2) – (4.6) приводит к следующему набору базисных генераторов:

$$\vec{V}_1 = \partial_u ; \quad \vec{V}_2 = \partial_v ; \quad \vec{V}_3 = v\partial_u + \ln w \partial_v ; \quad \vec{V}_4 = w\partial_w ; \quad \vec{V}_5 = \tau(t)\partial_t + \xi(z)\partial_z - (\dot{\tau} + \xi')\partial_u . \tag{5.7}$$

Здесь вариационные симметрии описываются генераторами: $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$. Генератор $\vec{V}_4$ — не вариационная симметрия. Генератор $\vec{V}_5$ — дивергентная симметрия, она хоть и не меняет функционал, но не представляет интереса, так как связана со свободой преобразования переменных t и z. В результате получается три закона сохранения.

Если вычислить симметрии ограниченного набора уравнений (4.2) – (4.4), то алгебра Ли расширяется и получается следующий набор базисных генераторов:

$$\vec{V}_1 = \partial_u , \quad \vec{V}_2 = \partial_v , \quad \vec{V}_3 = v\partial_u + \ln w \partial_v , \ \vec{V}_4 = w\partial_w , \quad \vec{V}_5 = 2u\partial_u + v\partial_v ; \tag{5.8}$$

$$\vec{V}_6 = w\partial_u , \quad \vec{V}_7 = \tau(t)\partial_t + \xi(z)\partial_z + C \cdot \partial_u . \tag{5.9}$$

где C — постоянная. $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ — вариационные симметрии. Остальные генераторы не являются вариационными. Но если составить суперпозицию $\vec{V}_5 - 2\vec{V}_4$, то получится еще одна вариационная симметрия, а следовательно еще один закон сохранения. Однако если не знать заранее о существовании дополнительной вариационной симметрии, то трудно угадать новое представление (базис), в котором она явно присутствует.

В итоге приходим к интересному выводу: если не разбивать общий генератор на базисные, а подставить его в критерий вариационности (инвариантности функционала), то критерий сам выделит представление, содержащее все вариационные симметрии.

Исследование симметрий функционала тоже привело к интересным результатам:

1. Если вычислить симметрии функционала с плотностью функции Лагранжа L, то обнаруживаются только три вариационные симметрии.

2. Если вычислить симметрии функционала с плотностью функции Лагранжа, разложенной в ряд $L = L_0 + L_1$, то снова обнаруживаются только три вариационные симметрии.

3. Если вычислить симметрии функционала с плотностью функции Лагранжа L_0, то обнаруживаются все четыре вариационные симметрии.

Перечислим найденные вариационные симметрии и отвечающие им производящие функции.

$$\vec{V}_1 = \partial_u \iff \vec{Q}_1 = (1,0,0)\ . \tag{5.10}$$

$$\vec{V}_2 = \partial_v \iff \vec{Q}_2 = (0,1,0)\ . \tag{5.11}$$

$$\vec{V}_3 = v\partial_u + \ln w\partial_v \iff \vec{Q}_3 = (v,\ln w,0)\ . \tag{5.12}$$

$$\vec{V}_4 = 2u\partial_u + v\partial_v - 2w\partial_w \iff \vec{Q}_4 = (2u,v,-2w)\ . \tag{5.13}$$

Укажем, в явном виде, какие законы сохранения отвечают вариационным симметриям в линейном случае:

$$\vec{V}_1 \to div\vec{P}_1 = 0 \Longleftrightarrow (w')^{\cdot} + (\dot{w})' = 0\ . \tag{5.14}$$

$$\vec{V}_2 \to div\vec{P}_2 = 0 \Longleftrightarrow (wv')^{\cdot} + (w\dot{v})' = 0\ . \tag{5.15}$$

$$\vec{V}_3 \to div\vec{P}_3 = 0 \Longleftrightarrow (vw' - wv'\ln w)^{\cdot} + (v\dot{w} - w\dot{v}\ln w)' = 0\ . \tag{5.16}$$

$$\vec{V}_4 \to div\vec{P}_4 = 0 \Longleftrightarrow (2uw' - vwv' - 2wu')^{\cdot} + (2u\dot{w} - vw\dot{v} - 2w\dot{u})' = 0\ . \tag{5.17}$$

Теперь мы можем записать законы сохранения в характеристической форме, так как это предписывает теорема Нетер:

$$div\vec{P}_1 = \vec{Q}_1 \cdot \vec{E}(L_0) = \langle 1,0,0|E_1(L_0),E_2(L_0),E_3(L_0)\rangle\ . \tag{5.18}$$

$$div\vec{P}_2 = \vec{Q}_2 \cdot \vec{E}(L_0) = \langle 0,1,0|E_1(L_0),E_2(L_0),E_3(L_0)\rangle\ . \tag{5.19}$$

$$div\vec{P}_3 = \vec{Q}_3 \cdot \vec{E}(L_0) = \langle v,\ln w,0|E_1(L_0),E_2(L_0),E_3(L_0)\rangle\ . \tag{5.20}$$

$$div\vec{P}_4 = \vec{Q}_4 \cdot \vec{E}(L_0) = \langle 2u,v,-2w|E_1(L_0),E_2(L_0),E_3(L_0)\rangle\ . \tag{5.21}$$

Заключение

В заключение проиллюстрируем в наглядной графической форме связи между многообразиями: плотность функции Лагранжа L, уравнения поля EL, группа симметрии $SymL$ и законы сохранения CL.

Функция L является многообразием в пространстве переменных $x_i, u^\alpha, u_i^\alpha$. Вариационная процедура отображает L на многообразие EL в пространстве переменных $x_i, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ik}^\alpha$, т.е. на уравнения Эйлера-Лагранжа. На рис. 1 показано это отображение и отображения на подмногообразия L_0 и EL_0, где $h, r = 0$. На рис. 2 показаны аналогичные отображения между L и $SymL \Leftrightarrow CL$ — симметрии функционала и отвечающие им законы сохранения. Кроме того, показано отображение между множествами L_0 и CL_0. Видно, что диаграмма этих отображений не коммутативна, т.е. законов сохранения CL_0 больше, чем CL. На рис. 3 показана стандартная процедура получения законов сохранения. Итог тот же, эта процедура дает не все законы сохранения, имеющиеся в системе.

Причина сложностей, возникающих при различных методах получения законов сохранения, — это недоопределенность (анормальность) системы уравнений Эйнштейна. Те же нюансы могут возникнуть, если попытаться проанализировать уравнения поля калибровочных теорий Максвелла или Янга-Милса, также являющихся анормальными.

Отметим, что (4.8) получается из (1.2) и (1.3) при $f = const$, $\dot{f} = 0$ либо $f' = 0$. Это позволяет использовать решения (4.8) (включая инвариантные) как затравочные решения в групповом преобразовании для недиагонального случая.

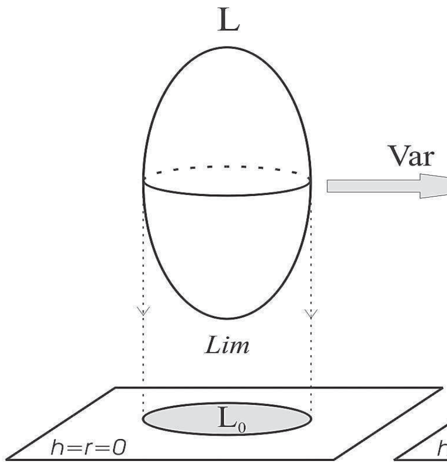

Рис. 1.

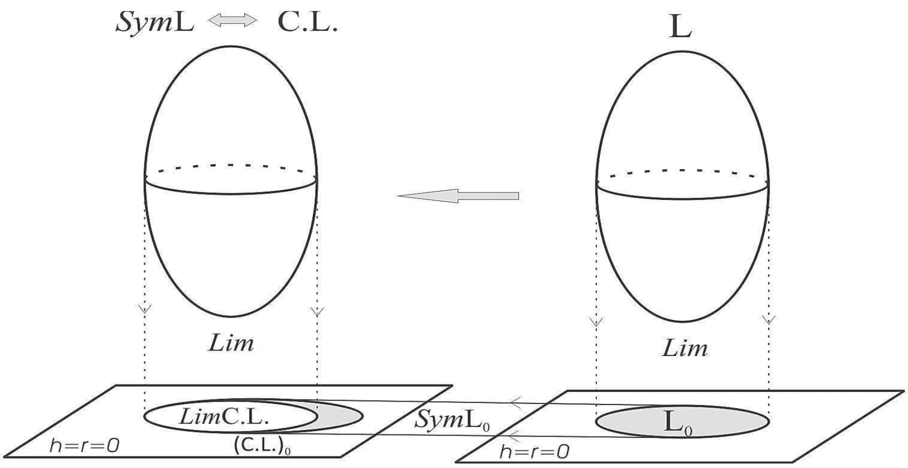

Рис. 2.

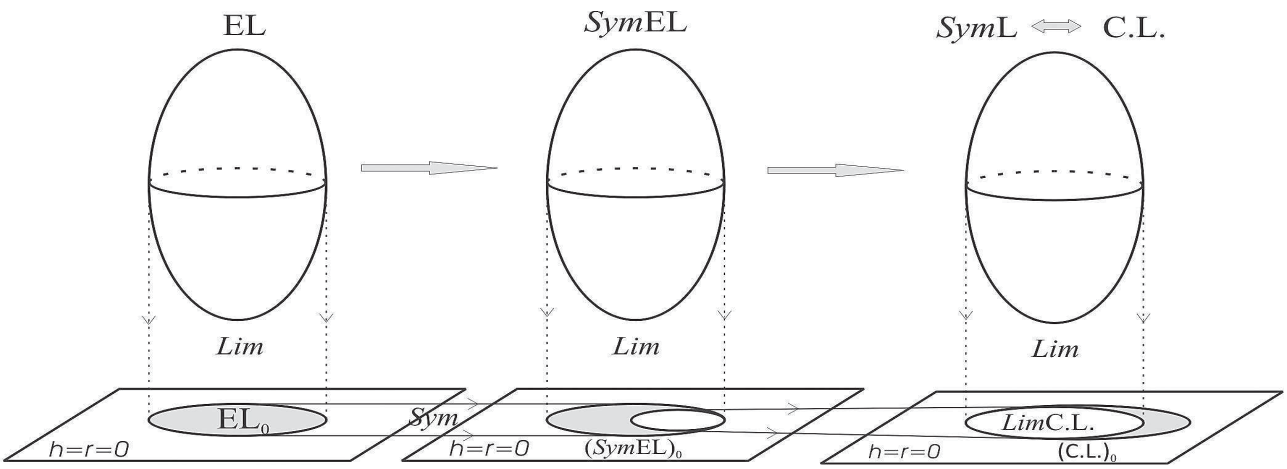

Рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белинский В.А., Захаров В.Е. Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных решений // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 6. С. 1953–1971.
2. Белинский В.А., Захаров В.Е. Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, № 7. С. 3–19.
3. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. Gravitational fields with a non Abelian bidimensional Lie algebra of symmetries / The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 7 p. Preprint DIPS 22.11.2001, № 12.
4. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves I – Local aspects / The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 27 p. Preprint DIPS 22.11.2001, № 13.
5. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves II – Global aspects / The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 217 p. Preprint DIPS 22.11.2001, № 13.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: ФИЗМАЛИТ, 2001. 536 с.
7. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.
8. Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики / под ред. Л.С.Полак. М.: Физматгиз, 1959. С. 611–630.
9. Паклин Н.Н., Соколова М.С. Симметрии и законы сохранения вакуумных уравнений Эйнштейна // 13-я Российская гравитационная конференция: Тезисы докладов. РУДН. М., 2008. С. 46–47.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. С. 757.

Поступила в редакцию 25.02.2013

Паклин Николай Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теоретической физики и волновых явлений, Институт инженерной физики и радиоэлектроники, Сибирский федеральный университет, 660074, Россия, г. Красноярск, ул. Киренского, д. 26.
E-mail: npaklin@sfu-kras.ru

Соколова Мария Сергеевна, Оператор Call-центра ОАО Ростелеком, 660100, Россия, г. Красноярск, ул. Карла Маркса, д. 246
E-mail: m_silver@list.ru

N. N. Paklin, M. S. Sokolova

Symmetries and conservation laws of gravity equations in vacuum

Keywords: gravitation, symmetries, conservation laws.

PACS: 04.20.-q

The article is devoted to the study of symmetries and conservation laws of Einstein's equations in vacuum. In this paper we consider the case where the metric depends on two variables. In particular, this case corresponds to a flat gravitational waves.

REFERENCES

1. Belinskii V.A., Zakharov V.E. Integration of the Einstein equations by means of the inverse scattering problem technique and construction of exact soliton solutions, *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 1978, T. 75. no. 6, pp. 1953–1971.
2. Belinskii V.A., Zakharov V.E. Stationary gravitational solitons with axial symmetry, *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 1979, T. 77. no. 7, pp. 3–19.
3. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. *Gravitational fields with a non Abelian bidimensional Lie algebra of symmetries*. The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 7 p. Preprint DIPS 22.11.2001, no. 12.
4. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. *Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves I – Local aspects*. The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 27 p. Preprint DIPS 22.11.2001, no. 13.
5. Sparano G., Vilasi G., Vinogradov A.M. *Vacuum Einstein metrics with bidimensional Killing leaves II – Global aspects*. The Diffiety Institute. Pereslavl-Zalessky, 2001. 217 p. Preprint DIPS 22.11.2001, no. 13.
6. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoryia polia* (The Classical Theory of Fields), Moscow: FIZMALIT, 2001. 536 p.
7. Olver P. *Prilojenyia grup Lie k differentsial'nym uravnenyaim* (Applications of Lie groups to differential equations), Moscow: Mir, 1989. 639 p.
8. Noether E. Invariant variational problems, *Variacionnye principy mekhaniki: sbornik statei* (Variational principles of mechanics: Transactions, by edit. L.S.Polak), Moscow: Fizmatgiz, 1959. pp. 611–630.

9. Paklin N.N., Sokolova M.S. Symmetries and conservation laws of Einstein's equations in vacuum, *13 Russkaia gravitatsionnaia conferentsia: tez. dokl. konferentsii* (13 Russian gravitational conference: abstracts of conference), PFUR, Moscow, 2008. pp. 46–47.

10. Korn G., Korn T. *Matematicheskiy spravochnik dlia nauchnykh rabotnikov i injenerov* (Mathematical handbook for scientists and engineers), Moscow: Nauka, 1984, p. 757.

Received 25.02.2013

Paklin Nickolay Nickolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Department of theoretical physisc, Siberian Federal University, 79 Svobodny Prospect, Krasnoyarsk, 660041, Russia.
E-mail: npaklin@sfu-kras.ru

Sokolova Mariya Sergeevna, Call-Center Operator, Rostelecom, 246 Karl Marx Street, Krasnoyarsk, 660100, Russia.
E-mail: m_silver@list.ru