УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов[1]

ОБОБЩЕНИЕ ОТКРЫТОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ИЗЛУЧЕНИЕМ

Рассматривается обобщение открытой космологической модели, описывающей вещество и равновесное излучение, которая, в свою очередь, является обобщением открытой модели Фридмана.

Ключевые слова: общая теория относительности и гравитации, точные космологические решения, открытые космологические модели.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

Введение

В [1] для модели открытой Вселенной записаны отдельно решения для некогерентной пыли и равновесного излучения в синхронной системе отсчета в параметрическом виде, что несколько затрудняет исследование. Кроме того, каждое из упомянутых космологических решений уравнений тяготения справедливо для определенной области изменения временного параметра и не переходит одно в другое. При этом эти решения отвечают разным уравнениям состояния, то есть каждое из них описывает конкретную материальную среду. Поэтому вполне естественно стремиться получить космологическое решение для открытой Вселенной, которое было бы свободно от этих недостатков.

Найденные в работах ([2]- [3]) точные космологические решения, могут служить такими примерами. Эти решения описывают для больших времен асимптотическое поведение пылевой материи (с давлением пыли $p_{dust} = 0$) и равновесного излучения с уравнения состояния $p_{rad} = \varepsilon_{rad}/3$ (p_{rad} – давление и ε_{rad} – энергетическая плотность равновесного излучения).

Подход, использованный в ([2]- [3]) связан, в частности, с [4], где метрика, конформная метрике Минковского (конформно-галилеева метрика), используется для описания открытой космологической модели Фридмана (с отрицательной скалярной кривизной)

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{0.1}$$

где $\sigma = \sigma(S)$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1;-1;-1;-1)$; $\mu,\nu = 0,1,2,3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице.

Система уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{0.2}$$

с тензором энергии-импульса идеальной жидкости (ТЭИ)

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{0.3}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; $\varkappa$ – эйнштейновская гравитационная постоянная, равная здесь 8π; $u_\mu = exp(\sigma)b_\mu$ – 4-скорость с $u_\mu u^\mu = 1$; $b_\mu = S_{,\mu}$; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ – 3-проектор на 3-пространство, а $b_{\mu\nu}u^\mu = 0$, может быть сведена к системе из двух уравнений путем проектирования на временноподобную мировую линию и пространственноподобную поверхность, ортогональную временноподобному направлению:

$$3\left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2\right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma); \tag{0.4}$$

$$-2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = \varkappa p \cdot exp(2\sigma) \equiv 4h(S), \tag{0.5}$$

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

где штрих обозначает производную по переменной S, а $h(S)$ является некоторой функцией, связанной с давлением.

В дальнейшем уравнение (0.4) будет служить определением плотности энергии. Уравнение (0.5) заменой $\sigma = 2 \cdot ln(y)$ преобразуется в уравнение типа Штурма-Лиувилля,

$$y'' + \frac{2}{S} y' + h(S) y = 0, \tag{0.6}$$

где $y = y(S)$.

Проведение аналогии с движением частицы единичной массы для новой переменной $x = 1/S$ в силовом поле [6],

$$F = -\frac{d}{dy} U = h(x) y \equiv B^2 y, \tag{0.7}$$

с $B = const$, позволяет переписать уравнение (0.6) в форме уравнения для осциллятора

$$y'' + B^2\, y = 0, \tag{0.8}$$

где в дальнейшем штрих будет обозначать производную по переменной x.

Решение этого уравнения [2] может быть представлено в виде

$$y(x) = exp(\sigma/2) = (1/cos\alpha_0) \cdot cos(Bx + \alpha_0) = \sqrt{1 + (A/B)^2} \cdot cos(Bx + \alpha_0), \tag{0.9}$$

где $tg\, \alpha_0 = A/B$; A и B – параметры, связанные, соответственно, с наблюдаемой плотностью вещества и равновесным излучением. Конформный множитель из (0.1) отвечает открытой Вселенной, заполненной веществом и равновесным излучением и связан с функцией $y(x)$ как $y^4 = exp(2\sigma)$ ([2]- [3]). При этом постоянная A входит в решение Фридмана для открытой модели Вселенной (см., [4]), которое может быть получено из (0.9) при $B \to 0$,

$$exp(2\sigma) \to exp(2\sigma_F) = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4. \tag{0.10}$$

Уместно подчеркнуть, что метрика (0.1) в форме Фока может быть сведена к записи метрики в синхронной системе отсчета из [1],

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + sh\chi^2 (d\theta^2 + sin\theta^2 d\varphi^2)), \tag{0.11}$$

путем перехода в кинеметрическую систему отсчета [5]. Здесь t – временная переменная; a, χ, θ, φ суть четырехмерные сферические координаты, где $a(t)$ есть радиус кривизны Вселенной.

Кроме того, решение [2] в записи (0.9) можно связать с функцией Бесселя полуцелого порядка. Такое обобщение проведено в работе [3].

1. Метод Дарбу

Воспользуемся методом Дарбу ([7]; [8], с.176), чтобы получить обобщение решения [2]. Суть этого метода для уравнений типа уравнения Штурма-Лиувилля в применении к данной задаче состоит в следующем.

Без ограничения общности перепишем общее решение (0.9) уравнения (0.8) в виде

$$Y_{total}(x) \equiv Y = Y_0 \cdot sin(Bx + \varphi_0), \tag{1.1}$$

где φ_0 – новый сдвиг фазы.

Возьмем одно из частных решений уравнения (0.8)

$$Y_{partial}(x) \equiv \tilde{Y}(x) = \cos(B\xi x), \tag{1.2}$$

где ξ – некоторая положительная постоянная.

Тогда уравнение

$$Y''_{xx} + \Omega^2(x)\, Y \equiv Y''_{xx} + [B^2 + W(x)]\, Y = 0, \tag{1.3}$$

обобщающее уравнение (0.8), имеет следующее общее решение:

$$Y_{total}(x) = Y'_x - Y \cdot (\ln \tilde{Y})'_x, \tag{1.4}$$

при этом функция $W(x)$ обязана быть равной

$$W(x) = 2 \cdot (\ln \tilde{Y})''_{xx} = -2B^2\xi^2 \sec^2(B\xi x) \tag{1.5}$$

2. Новое космологическое решение для открытой Вселенной

Применим описанный здесь метод Дарбу к решению [2]. В исходных обозначениях обобщение открытой Вселенной Фридмана на случай присутствия излучения представляет собой решение,

$$y(x) = y_0 B\ (\cos(Bx + \varphi_0) + \xi\ \sin(Bx + \varphi_0)\ \mathrm{tg}(\xi Bx))\,, \tag{2.1}$$

уравнения

$$y'' + B^2(1 - 2\,\xi^2\ \sec^2(\xi Bx))\,y = 0, \tag{2.2}$$

которое при $\xi = 0$ переходит в (0.8), где y_0 – некоторая постоянная.

Естественное требование, накладываемое на полученное решение, – это асимптотическое прохождение данного решения через фридмановское (0.10) ($S \to \infty$ или $x \to 0$). Это требование приводит к системе алгебраических уравнений на параметры решения:

$$\begin{gathered} y_0 B \cos(\varphi_0) = 1; \\ (1 - \xi^2) \cdot y_0 B \sin(\varphi_0) = A. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Отсюда получаем соотношение

$$\mathrm{tg}(\varphi_0) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0}{1 - \xi^2}, \tag{2.4}$$

связывающее начальную фазу нового решения с начальной фазой решения [2].

С учетом (2.3) выражение (2.1) переписывается в виде, аналогичном записи (0.9),

$$y(x) = (1/\cos\varphi_0) \cdot (\cos(Bx + \varphi_0) + \xi\ \sin(Bx + \varphi_0)\ \mathrm{tg}(\xi Bx))\,, \tag{2.5}$$

Ясно, что для найденного решения можно записать и новые результирующие распределения плотности энергии и давления вещества и излучения.

Перепишем гравитационные уравнения для плотности энергии и давления (0.4) и (0.5) через новые переменные $y(x)$ и x :

$$\varkappa\varepsilon(x) = \frac{12Bx^3}{y(x)^4}\frac{g(x,\xi)}{f(x,\xi)}\left(xB\frac{g(x,\xi)}{f(x,\xi)} - 1\right); \tag{2.6}$$

$$\varkappa p(x) = \frac{4B^2x^2}{y(x)^4}\left(1 - 2\xi^2\sec^2(B\xi x)\right), \tag{2.7}$$

где

$$g(x,\xi) = (\xi^2 - 1)\,\mathrm{tg}(Bx + \varphi_0) + \xi\,\mathrm{tg}(\xi Bx) \cdot f(x,\xi); \tag{2.8}$$

$$f(x,\xi) = 1 + \xi\,\mathrm{tg}(Bx + \varphi_0) \cdot \mathrm{tg}(\xi Bx). \tag{2.9}$$

Выражение для плотности энергии (2.6) при $\xi = 0$ совпадает с плотностью энергии в [2]:

$$\varkappa\varepsilon_{BS}(x) = \frac{12Bx^3}{y(x)^4}\,\mathrm{tg}(Bx + \alpha_0)(1 + Bx \cdot \mathrm{tg}(Bx + \alpha_0) \tag{2.10}$$

и асимптотически ($S \to \infty$ или $x \to 0$) превращается в сумму плотностей энергии вещества и излучения

$$\varkappa\varepsilon_{BS}(x) = \varkappa\varepsilon_{dust} + \varkappa\varepsilon_{rad} = 12Ax^3(1 + Ax) + B^2x^4 = 12A(1/S)^3(1 + A/S) + B^2(1/S)^4. \tag{2.11}$$

Найденное давление (2.7) для асимптотики принимает вид

$$\varkappa p(x) = 4B^2(1-\xi^2)x^4 = 4B^2(1-\xi^2)(1/S)^4 \tag{2.12}$$

и при $\xi = 0$ переходит в асимптотическое выражение для давления равновесного излучения p_{rad} в работе [2].

Введем функцию состояния, то есть функцию, которая в каждый момент времени представляет собой уравнение состояния,

$$\beta(x,\xi) = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{3}\frac{Bx\cdot(1-\xi^2 sec^2(B\xi x))\cdot f^2(x,\xi)}{g(x,\xi)\cdot(Bx\cdot g(x,\xi)-f(x,\xi))} \tag{2.13}$$

Функция $\beta(x,\xi)$ в пределе $\xi \to 0$ переходит в функцию состояния для случая [2],

$$\beta(x,\xi) \to \beta_{BS}(x) = \frac{1}{3}\frac{Bx\,\mathrm{ctg}(Bx+\alpha_0)}{(1+Bx\,\mathrm{tg}(Bx+\alpha_0))}, \tag{2.14}$$

которая, в свою очередь, при $A = 0$, то есть $\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 0$, (вещество отсутствует) асимптотически равна

$$\beta_{BS}(x) \to \frac{1}{3}. \tag{2.15}$$

3. Заключение

С помощью метода Дарбу ([7]- [8]) получено новое космологическое решение для открытой модели Вселенной. Это решение является обобщением космологического решения, найденного ранее и описывающего открытую Вселенную с веществом и излучением (см. [2]), переходя в него для предельных значений параметров, входящих в полученное новое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Классическая теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена // Изв. вузов. Физика. 1984. №7. С.32–35.
3. Баранов А.М., Жабрун И.В. Описание конформно-плоских космологических моделей функциями Бесселя // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.1. С.78–83.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.
5. Баранов А.М. Конформно-галилеева 4-метрика и кинеметрические системы отсчета // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.1. С.37–43.
6. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модели открытых Вселенных с переменным уравнением состояния вблизи сингулярности // Изв. вузов (Физика). 1994. №7. С. 51.
7. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 1882. V.94. P.1456–1459.
8. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1939. 719 с.

Поступила в редакцию 18.09.2013

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

A. M. Baranov

Generalization of the open cosmological model with radiation

Keywords: general relativity and gravitation, exact cosmological solutions, open cosmological models.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

The generalisation of the open cosmological model is considered. The new cosmological solution was found by means of the Darboux method and is generalisation of a cosmological solution, which was earlier found. The last solution describes the open Universe with substance and radiation, and, in turn, is generalisation of the open Friedman model.

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical Theory of Fields*, (Nauka, 1988)(in Russian).
2. Baranov A.M. Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Russ. Phys. J.*, 1984, vol.27, no.7, pp. 569–572.
3. Baranov A.M., Zhabrun I.V. The description of conformally-flat open cosmological models by the Bessel functions, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013, no.1, pp. 78–83.
4. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).
5. Baranov A.M. Conformally Galilean 4-metric and Kinemetric Reference Frames, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2013, no.1, pp.37–43.
5. Baranov A.M. Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Russ. Phys. J.*, 1994, vol.37, no.7, pp.640–644.
6. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires, *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)*, 1882, vol.94, pp. 1456–1459.
7. Ince E.L. *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover Publications, Inc.

Received 18.09.2013

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University, 89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Siberian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.

E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru