УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов,[1] *Е. В. Савельев* [2]

КОНФОРМНО-ПЛОСКАЯ ОТКРЫТАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ СОСТОЯНИЯ

Для конформно-плоской метрики пространства-времени рассматривается открытая космологическая модель, заполненная материей в приближении идеальной жидкости и описываемая функцией состояния общего вида. Решение уравнений Эйнштейна для такой модели записывается в виде квадратуры с произвольной функцией состояния. Обсуждаются частные случаи.

Ключевые слова: открытые космологические модели, функция состояния.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

Введение

Найденное А.Фридманом решение уравнений Эйнштейна для открытой модели Вселенной [1] еще не охватывает всех возможных такого рода решений космологических уравнений для изотропного пространства отрицательной кривизны. Это решение является исходным для обсуждения космологических моделей и имеет уравнение состояния некогерентной пыли, то есть в нем отсутствует давление. Можно было бы сказать, что фридмановская модель заполнена веществом в приближении идеальной жидкости с нулевым давлением. При этом, решение А.Фридмана относится к конформно-плоским решениям, для которых конформный тензор кривизны Вейля (см., например, [2]) равен нулю, что предполагает запись метрики в конформно-плоском виде для четырехмерного пространства-времени. Однако зачастую метрику этого решения записывают в синхронных координатах (см., например, [3]), несмотря на трудности, связанные как с анализом решения для пылевидной материи, записанного в параметрическом виде, так и с другими уравнениями состояния при рассмотрении обобщений модели Фридмана.

С другой стороны, подавляющее большинство космологических моделей, основанных на точных решениях уравнений Эйнштейна, получено а предположении, что уравнение состояния вещества, то есть связь между плотностью энергии и давлением, в модели есть величина постоянная. Очевидно, что динамическая модель Вселенной должна содержать фукциональное уравнение состояния. Другими словами, уравнение состояния вещества в этом случае должно быть функцией точки пространственно-временного континуума или функцией состояния.

Кроме того, В.Фок предложил подход ([4]– [5]) к описанию открытой фридмановской модели, связанный с введением конформной метрики метрике Минковского четырехмерного пространства-времени, то есть конформно-плоской или конформно-галилеевой метрики. При этом им были указаны преобразования, связывающие такую запись метрики с записью в синхронной системе отсчета. Оказывается, как показано в [6], эти преобразования эквивалентны переходу от синхронной системы отсчета к кинеметрической ([7]– [13]). Далее, при обобщении решения Фридмана на случай наличия равновесного светоподобного излучения (подобного электромагнитному) в ([14]– [15]) был использован подход В.Фока для нахождения точного космологического решения с излучением и тензором энергии-импульса в приближении идеальной жидкости с отличным от нуля давлением без введения конкретного уравнения состояния. Анализ функции состояния для этого случая выявил катастрофическое поведение космологической модели в зависимости от параметра, связанного с плотностью вещества. Согласно теории катастроф (см., например, [16]) такое поведение физической системы описывается катастрофой сборки и является аналогом фазового перехода второго рода в конденсированных средах. В дальнейших работах ([17]– [20]) применение данного подхода было продолжено, а в [21] для описания открытой космологической модели были еще использованы функции Бесселя полуцелого порядка, что позволило получить решение ([14]– [15]) как частное. Следующее обобщение решения Фридмана на случай наличия как излучения, так и вязкости среды было найдено в ([22]– [23]).

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru ;
[2]E-mail: editor@stfi.ru ;

1. Уравнения гравитационного поля для открытой космологической модели

Упомянутый выше подход В.Фока ([4]– [5]) для описания открытых космологических моделей основан на записи 4-метрики пространства-времени в следующем виде:

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1}$$

где $exp(2\sigma)$ – конформный множитель; $\sigma = \sigma(S)$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1; -1; -1; -1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\varkappa = 8\pi$.

Перейдем к рассмотрению системы уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

с тензором энергии-импульса в приближении идеальной жидкости (ТЭИ)

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = exp(\sigma)b_\mu$ пропорциональна градиенту переменной S как функции координат x^μ : $b_\mu = S,_\mu$; $u_\mu u^\mu = 1$ – условие нормировки 4-скорости; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ есть 3-проектор на 3-пространство, который играет роль метрического тензора для 3-пространства, при этом выполняется условие ортогональности 3-пространства и временноподобной конгруэнции u^μ : $b_{\mu\nu}u^\mu = 0$.

Воспользовавшись монадным формализмом ([7]– [13]) и проведя (1+3)-расщепление системы (1.2) путем проектирования ее на временноподобную мировую линию и пространственноподобную поверхность, ортогональную временноподобному направлению, получим два уравнения:

$$3\left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2\right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma); \tag{1.4}$$

$$2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = -\varkappa p \cdot exp(2\sigma), \tag{1.5}$$

где роль монады выполняет вектор 4-скорости u_μ; штрих обозначает производную по переменной S.

В итоге, при таком (1+3)-расщеплении пришли к двум уравнениям: одно определяет плотность энергии, а другое – давление.

2. Функция состояния

Прежде чем интегрировать полученную систему уравнений (1.4)–(1.5) введем функцию состояния

$$\beta(S) = \frac{p(S)}{\varepsilon(S)}, \tag{2.1}$$

на которую можно наложить условие $|\beta(S)| \leq 1$, если потребовать выполнения энергодоминатности: $\varepsilon(S) \geq p(S)$.

Функцию состояния (2.1) для каждого фиксированного значения S можно рассматривать как «мгновенное» уравнение состояния, с одной стороны, а, с другой, на тех промежутках значений переменной S, где происходит достаточно медленное и плавное изменение $\beta(S)$, можно вводить уравнения состояний, то есть конкретные физически интерпретируемые соотношения между плотностью энергии $\varepsilon(S)$ и давлением $p(S)$.

После умножения уравнения (1.4) на функцию состояния $\beta(S)$ сложим его с уравнением (1.5). В результате получим

$$\sigma'' + \frac{1}{S}\,\sigma'(2 + 3\beta(S)) + \frac{1}{2}\,(\sigma')^2(1 + 3\beta(S)) = 0. \tag{2.2}$$

Вводя замены $Z = \sigma'$ и $\xi(S) = (1 + 3\beta(S))$, сведем (2.2) к уравнению Риккати,

$$Z' = -\frac{1}{2}\xi(S)\, Z^2 - \frac{1}{S}\,(1 + \xi(S))\, Z, \tag{2.3}$$

которое помощью подстановки

$$Z = E(S)\, U(S) \tag{2.4}$$

трансформируется в уравнение Бернулли

$$U' = -\frac{1}{2}\,\xi(S)\, E(S)\, U^2, \tag{2.5}$$

где

$$E(S) = exp\left(-\int \frac{1}{S}\,(1 + \xi(S))\, dS\right) = \frac{C}{S}\, exp\left(-\int \frac{\xi(S)}{S} dS\right) = \frac{C}{S^2}\, exp\left(-\int \frac{3\,\beta(S)}{S} dS\right) \tag{2.6}$$

и $C = const$.

Интегрирование (2.5) позволяет получить

$$U(S) = -\frac{1}{C_1 + \dfrac{C}{2} exp\left(-\int \dfrac{\xi(S)}{S} dS\right)} \tag{2.7}$$

и

$$Z(S) = \sigma' = U(S)\, E(S) = -\frac{\dfrac{C}{S}\, exp\left(-\int \dfrac{\xi(S)}{S} dS\right)}{C_1 + \dfrac{C}{2} exp\left(-\int \dfrac{\xi(S)}{S} dS\right)} = -\frac{\dfrac{C}{S^2}\, exp\left(-\int \dfrac{3\,\beta(S)}{S} dS\right)}{C_1 + \dfrac{C}{2S} exp\left(-\int \dfrac{3\,\beta(S)}{S} dS\right)} \tag{2.8}$$

или

$$\sigma(S) = -2 \int \frac{\dfrac{C}{S^2}\, exp\left(-\int \dfrac{3\,\beta(S)}{S} dS\right)}{2C_1 + C\, exp\left(-\int \dfrac{3\,\beta(S)}{S} dS\right)} dS + C_2, \tag{2.9}$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Полученное решение для показателя степени конформного множителя необходимо «откалибровать», то есть выбрать постоянные интегрирования C, C_1, C_2 такими, чтобы при стремлении переменной $S \to \infty$ конформный множитель $exp(2\,\sigma(S))$ стремился к решению Фридмана для открытой модели Вселенной в форме Фока

$$exp(2\sigma_F) = \left(1 - \frac{A}{S}\right)^4, \tag{2.10}$$

где A постоянная из решения Фридмана , связанная с наличием в модели вещества ($A > 0$).

Другими словами, на полученное решение (2.9) накладывается физическое требование: при расширении открытая космологическая модель должна проходить через фридмановскую стадию некогерентной пыли, то есть через стадию с $\beta = 0$. Кроме того, в пределе $S = \infty$ пространство-время должно быть плоским, то есть метрика должна совпадать с метрикой Минковского.

Эти требования удовлетворяются при следующем выборе постоянных: $C = -A$; $C_1 = 1/2$; $C_2 = 0$, и окончательно получаем следующий общий вид показателя степени конформного множителя для произвольной функции состояния $\beta(S)$:

$$\sigma(S) = 2 \int \frac{\dfrac{A}{S^2} \cdot exp\left(-3 \int \dfrac{\beta(S)}{S} dS\right)}{1 - \dfrac{A}{S} exp\left(-3 \int \dfrac{\beta(S)}{S} dS\right)} dS. \tag{2.11}$$

Как уже упоминалось выше, открытая модель Фридмана описывается уравнением состояния некогерентной пыли $p = 0$ ($\beta(S) = 0$), которое является частным случаем линейного уравнения состояния, нередко используемого в физике,

$$p(S) = \beta_0 \cdot \varepsilon(S), \tag{2.12}$$

с $|\beta_0| \leq 1$; $\beta_0 = const$.

В частности, для целых положительных значений $n = 3(1 + \beta_0)$ выражение (2.11) легко интегрируется, и в результате находим

$$\sigma(S) = \frac{2}{n-2}\, ln\left(1 - \frac{A}{S^{n-2}}\right) = \frac{2}{n-2}\, ln(y(S)). \tag{2.13}$$

Отсюда видно, что функция

$$y(S) = 1 - \frac{A}{S^{n-2}}, \tag{2.14}$$

которая связана с конформным множителем как

$$exp(2\sigma(S)) = y(S)^{(4/n-2)} = \left(1 - \frac{A}{S^{n-2}}\right)^{(4/n-2)}, \tag{2.15}$$

представляет собой гармоническую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа для «сферически симметричного» случая в пространстве размерности n, к которому сводится уравнение (2.2),

$$\frac{1}{S^{(n-1)}}\frac{d}{dS}\left(S^{(n-1)}\frac{dy}{dS}\right) = y'' + \frac{n-1}{S}\, y' = 0. \tag{2.16}$$

Другими словами, космологические уравнения (1.4)-(1.5) для такого выбора уравнения состояния могут быть сведены к многомерному уравнению Лапласа. При этом оказывается, что корень четвертой степени из решения Фридмана (2.10) есть гармоническая функция $y = 1 - A/S$ для $n = 3$, а давление из (1.5) тождественно равно нулю для такой функции y.

Рассмотрение открытых космологических моделей с линейным уравнением состояния и их связь с гармоническими функциями было предпринято в работах ([24]- [27]). В работах [28]- [29] сделана попытка использовать выражение (2.11).

3. Заключение

В работе рассмотрена открытая космологическая модель, заполненная материей в приближении идеальной жидкости в общем случае с отличным от нуля давлением. Соответствующая 4-метрика записана в форме Фока как конформная метрике Минковского и зависит только от одной переменной, квадрат которой представляет собой произведение запаздывающего и опережающего времен. Известное решение Фридмана для открытой Вселенной, заполненной некогерентной пылью, является частным случаем для такой метрики.

С помощью монадного формализма уравнения Эйнштейна расщепляются на два уравнения. Затем эта система решается в общем случае для произвольной функции состояния. Полученное решение в виде квадратуры калибруется относительно решения Фридмана. Такую запись легко использовать в численном моделировании различных сценариев динамики моделей открытой Вселенной. Ограничиваясь линейным уравнением состояния, приходим к ранее полученным результатам по введению гармонических функций для описания открытой Вселенной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной // ЖРФХО, часть физич. 1924. Т. 56. Вып. 1. С.59.
2. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.
5. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.
6. Баранов А.М. Конформно-галилеева 4-метрика и кинеметрические системы отсчета // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.1. С.37–43.
7. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.

8. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

9. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности // ДАН СССР. 1956. Т.107. № 6. С. 815–818.

10. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты. Rehoboth, New Mexico: Amer. Research Press, 2006. 227 с.

11. Зельманов А.Л. Ортометрическая форма монадного формализма и ее отношение к хронометричесим и кинеметрическим инвариантам // ДАН СССР. 1976. Т.227. С.78–81.

12. Мицкевич Н.В. Системы отсчета и конструктивный подход к наблюдаемым в общей теории относительности // Эйнштейновский сборник, 1971. М.: Наука, 1972. С.67–87.

13. Зельманов А.Л. Кинеметрические инварианты и их отношение к хронометрическим инвариантам в теории тяготения Эйнштейна //ДАН СССР. 1973. Т.209. № 4. С. 822–825.

14. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена //Изв.вузов (Физика). 1984. №7. С. 32–35.

15. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times // Russ. Phys. J. 1984. – V. 27. – No 7. – P.569–572.

16. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.М.: Мир, 1984. Т.1. 350 с.

17. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модель открытой Вселенной с переменным уравнением состояния // Изв.вузов (Физика). 1994. №1. С.89–94.

18. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state // Russ. Phys. J. 1994. V. 37. №1. P. 80–84.

19. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модели открытых Вселенных с переменным уравнением состояния вблизи сингулярности // Изв.вузов (Физика). 1994. №7. С.51–55.

20. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity // Russ. Phys. J. 1994. V. 37. №7. P. 640–644.

21. Баранов А.М., Жабрун И.В. Описание открытой модели вселенной функциями Бесселя // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.1. С.78–83.

22. Баранов А.М., Жабрун И.В., Савельев Е.В. Точное решение для открытой Вселенной с вязкостью // Известия вузов (Физика). 1995. №1. С. 79–83.

23. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity // Russ. Phys. J. 1995. V. 38. №1. P. 68–71.

24. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. 1.Четырехмерное пространство-время /Краснояр.гос. ун-т. Красноярск, 1988. 20 с. Деп. в ВИНИТИ СССР 11.07.1988, №5914-В88.

25. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. 2.Многомерное пространство-время /Краснояр. гос. ун-т. Красноярск,1990. 12 с. Деп. в ВИНИТИ СССР 09.04.1990, №2096-В90.

26. Баранов А.М., Савельев Е.В. Об описании гармоническими функциями открытых космологических моделей с веществом // Известия вузов (Физика). 1990. №9. С.62–65.

27. Baranov A.M., Saveljev E.V. Description of open cosmological models with matter by harmonic functions // Russ. Phys. J. 1990. V. 33. №9. P. 773–776.

28. Baranov A.M. On stratiform structure's model of the open Universe // Astrophysics & Cosmology after Gamow - Theory and Observations: Abstracts of Gamov Memorial Intern. Conf. dedicated to 100-th anniversary of George Gamow. Odessa State Univ. Odessa-Moscow, 2004. P. 19–20.

29. Баранов А.М. О слоистой структуре открытой модели Вселенной // Новейшие проблемы теории поля: труды XVII Международн.летн. шк-семинара «Волга-17'06» по современ. проблемам теор. и мат. физики (Петровские чтения). Казанский гос.ун-т. Казань, 2007. Т.5. С.118–121.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет им.В.П. Астафьева,
660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Савельев Евгений Викторович, к. ф.-м. н., доцент,
ООО «ПРОФИЛЬ - 2С», 123060, Москва, 1-ый Волоколамский проезд, 15/16
E-mail: editor@stfi.ru

A. M. Baranov, Eu. V. Saveljev
Conformally flat model of the open Universe with an arbitrary function of state

Keywords: open cosmological models, function of state.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

The open cosmological model for a conformally flat space-time metric filled with a substance in perfect fluid approximation and a nonvanishing pressure in general case is considered. The corresponding metric is written in the Fock form as conformal to the Minkowski metric and depends only on one variable, quadrate of which represents a product of advanced and retarded times. Well-known Friedman's solution for the open Universe, filled with an incoherent dust, is a special case for such metric. A function of state in general form is introduced into the model. With the help of the monad formalism the Einstein equations are splitted on two equations. Then this system is solved in the general case for an arbitrary function of state. In other words the Einstein equations' solution of the model is a quadrature with an arbitrary function of state. The found solution is gauged concerning of the Friedman solution. If to restrict an equation of state only by the linear form, then we come to earlier the found results on the introduction of harmonic functions for description of the open Universe.

REFERENCES

1. Friedman A.A. On possibility of the world with a constant negative curvature, *Z. Phys.*, 1922, vol. 10, Lief., no. 6, p.376.

2. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p. (in Russian).

3. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical Theory of Fields*, (Nauka, 1988) (in Russian).

4. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).

5. Mitskievich N.V. *Physical Fields in General Relativity*, Moskow: Nauka, 1969, 563 p. (in Russian).

6. Baranov A.M. Conformally Galilean 4-metric and Kinemetric Reference Frames, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2013, no.1, pp.37–43.

7. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.(in Russian)

8. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

9. Zelmanov A.L. Chronometric Invariants and co-moving coordinates in general relativity, *DAN USSR*, 1956, vol.107, no.6, pp. 815–818.

10. Zelmanov A. *Chronometric Invariants. Dissertation, 1944.* Rehoboth, New Mexico: Amer.Research Press, 2006. 233 p.

11. Zelmanov A.L. Orthometric Form Of Monadic Formalism And Its Relation To Chronometric And Kinemetric Invariants, *DAN USSR*,1976, vol.227, no.1, pp.78–81.

12. Mitskievich N.V. Reference frames and the constructional approach to observed magnitudes in general relativity, *Einstein collected book, 1971*, Moscow: Nauka, 1972. pp.67–87.

13. Zelmanov A.L. Kinemetric Invariants And Their Relation To Chronometric Invariants Of Einstein Theory Of Gravity, *DAN USSR*, 1973, vol.209, no.4, pp. 822–825.

14. Baranov A.M. Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1984, no.7, pp. 32–35.

15. Baranov A.M. Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Russ. Phys. J.*, 1984, vol.27, no.7, pp. 569–572.

16. Gilmore R. *Catastrophe theory for scientists and engineers*, New York-Chichester-Brisbane-Toronto: A Wiley-Interscience Publication, 1981.

17. Baranov A.M. Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1994, no. 1, pp. 89–94.

18. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Russ. Phys. J.*, 1994, V. 37, no. 1, pp. 80–84.

19. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1994, no. 7, pp. 51–55.

20. Baranov A.M. Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Russ. Phys. J.*, 1994, vol.37, no.7, pp.640–644.

21. Baranov A.M., Zhabrun I.V. A description of the open Universe model by the Bessel functions, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2013, no.1, pp. 78–83.

22. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1995, no. 1, pp. 79–83.

23. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Russ. Phys. J.*, 1995, V. 38, no. 1, pp. 68–71.

24. Baranov A.M., Saveljev E.V. Conformally-flat models and equations of state. 1. The four-dimension space-time, KrasSU, Krasnoyarsk, 1988, 20 p., Deposited in VINTI USSR 11.07.1988, no. 5914-B88.

25. Baranov A.M., Saveljev E.V. Conformally-flat models and equations of state. 1. Multidimensional space-time, KrasSU, Krasnoyarsk, 1990, 12 p., Deposited in VINTI USSR 09.04.1990, no. 2096-B90.

26. Baranov A.M., Saveljev E.V. On description of open cosmological models with matter by harmonic functions, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1990, no. 9, pp. 62–65.

27. Baranov A.M., Saveljev E.V. Description of open cosmological models with matter by harmonic functions, *Russ. Phys. J.*, 1990. V. 33. №9. P. 773–776.

28. Baranov A.M. On stratiform structure's model of the open Universe, *Astrophysics & Cosmology after Gamow - Theory and Observations: Abstracts of Gamov Memorial Intern. Conf. dedicated to 100-th anniversary of George Gamow*, Odessa State Univ., Odessa-Moscow, 2004, pp. 19–20.

29. Baranov A.M. On stratiform structure's model of the open Universe, *XVII Petrov's meeting («'Volga-17'06», Kazan, 2006): proceedings of XVI Inter. the Summer School-seminar upon Modern Problems of Theor. and Math. Phys.*, Kazan, 2007, vol.5, pp. 99–103.

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astaf'ev,
89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Saveljev Eugene Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor,
OOO «PROFILL - 2S», 15/16 1-st Volokolamsk passage, Moscow, 123060, Russia.
E-mail: editor@stfi.ru