УДК 530.182+51-71+537.871+532.1-4

В. М. Журавлев[1]

МНОГОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И КОМПЛЕКСНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе устанавливается связь между комплексными квазилинейными уравнениями первого порядка и многомерными нелинейными гиперболическими и эллиптическими уравнениями второго порядка, которые описывают явления распространения волн различного типа в нелинейных средах в многомерных пространствах. Строятся точные решения, которые в общем случае являются многозначными. Анализируется их пространственная структура и динамика вдоль комплексных характеристик. Исследуются границы областей однозначности решений.

Ключевые слова: Точные решения многомерных гиперболических и эллиптических уравнений, опрокидывающиеся волны, многозначные решения, гидродинамические и электромагнитные волны в среде с нелинейной поляризацией.

PACS: 03.65.Ge, 02.30.Ik , 03.50.De, 04.30.Nkб 47.35.+i

Введение

В работе [1] был найден класс решений скалярных многомерных нелинейных уравнений гиперболического типа, обладающих многозначными решениями, которые были названы ривертонами. Областью приложения этой теории является теория электромагнитных волн в нелинейных диэлектриках без дисперсии, нелинейная акустика и некоторые другие области физики. Для теории электромагнитных волн в диэлектриках и других средах важное значение имеет возможность описания волн с различными типами поляризации, когда напряженность электрического поля в волне описывается двумя независимыми компонентами вектора. Векторные квазилинейные уравнения, с которыми связываются многозначные решения, для размерности координатного пространства $n = 1$ (1+1) рассматривались в рамках обобщенного метода годографа [2] и размерности $n = 2$ (1+2) методом гидродинамических редукций [3, 4]. В этих работах исследовались условия интегрируемости таких систем и анализировались их общие свойства. Однако такой подход несколько отличается от того, который был рассмотрен в [1], где решения были получены для скалярных волновых уравнений. Таким образом, возникает задача распространения развитой в [1] теории на случай векторных уравнений, которые можно было бы использовать при решении определенного круга задач в нелинейной теории электромагнитных волн и в других прикладных задачах. Комплексные квазилинейные уравнения являются одним из простых вариантов векторных уравнений. Как показывается в данной работе, рассмотрение именно комплексного случая приводит к естественному переносу основных результатов, полученных в [1], на случай эллиптических уравнений, что дает основания для специального рассмотрения такой постановки задачи. Исследование комплексного расширения решений уравнений Д'Аламбера, рассмотренных в [1], интересно так же и в связи с возможностью их сопоставления с решениями, используемыми в теории твисторов и теории гравитации [5, 6]. Эти задачи и решаются в данной работе.

1. Общая связь систем квазилинейных уравнений первого порядка с уравнениями второго порядка

Рассмотрим по аналогии с [1] систему уравнений первого порядка относительно скалярной функции $E(\mathbf{x}, t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = A_\alpha(\mathbf{x}, t)E_t, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \Big(A_1(\mathbf{x}, t), \ldots, A_n(\mathbf{x}, t)\Big)$ - вектор-функция координат $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и времени t. Свойства вектор-функции $\mathbf{A}$ частично определяются самой формой системы уравнений (1.1). При

[1] E-mail: zhvictorm@gmail.com

этом оставшийся произвол в выборе вида этой функции определяет характер решений этой системы уравнений. В частности, в [1] исследовалась вектор-функция $\mathbf{A}$ вида: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(E)$, что позволяет построить общий вид решений (1.1) такого выбора вектор-функции $\mathbf{A}$ и установить связь между этими уравнениями и нелинейными волновыми уравнениями второго порядка. Такая связь устанавливается с помощью вычисления дифференциальных следствий (1.1).

Вычисляя дивергенцию от уравнений (1.1), находим:

$$\Delta E = \Big(\mathrm{div}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^2\Big)E_t + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\mathbf{A}^2 E_t\Big). \tag{1.2}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее

<u>**Утверждение 1**</u>. Каждое решение $E(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений (1.1), имеющее в заданной области производные второго порядка, является так же решением уравнения (1.2). В общем случае это уравнение относится к классу телеграфных уравнений и имеет гиперболический характер. В случае выполнения условия:

$$\mathrm{div}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}^2 = 0 \tag{1.3}$$

это уравнение будет чисто гиперболическим, что вполне согласуется с тем, что решениями его являются решения гиперболической системы первого порядка (2.1). В частности, уравнение (1.3) обращается в тождество при условии $\mathbf{A} = \mathbf{A}(E)$, где E удовлетворяет уравнению (2.1), что и было рассмотрено в [1].

Однако наиболее интересным свойством уравнения (1.2) является то, что это уравнение может менять свой тип, если расширить область значений функций E и $\mathbf{A}$. В частности, если функции E и $\mathbf{A}$ являются комплексными: $E = u + iv,\ \mathbf{A} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, то в случае $n \geq 2$ могут выполняться условия:

$$\Re\{\mathbf{A}^2\} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 \leq 0, \quad \Im\{\mathbf{A}^2\} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \tag{1.4}$$

что в случае $\Re\{\mathbf{A}^2\} < 0$ приводит уравнение (1.2) к эллиптическому типу. Можно было бы ожидать, что условия:

$$\mathbf{A}^2 = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{A} \neq 0 \tag{1.5}$$

позволяют указать связь параболических уравнений с квазилинейными уравнениями первого порядка. Однако, как показывает простой анализ, эти условия не могут быть выполняться для векторных полей $\mathbf{A}(E, \mathbf{x}, t)$, для которых строятся решений гиперболических и эллиптических уравнений в данной работе, поэтому задача анализа условий (1.5) выходит за рамки данной работы.

2. Комплексные системы квазилинейных уравнений и их решения

Для решения поставленных в данной работе задач исследуем систему квазилинейных уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x_\alpha} = A_\alpha(E, \mathbf{x})E_t, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

относительно неизвестной комплексной функции $E = u + iv$. Эта система является частным случаем системы уравнений (1.1), но обобщает системы аналогичных уравнений, которые рассматривались в [1]. В данной работе нас будет интересовать уравнения (1.1) с вектор-функцией $\mathbf{A} = \mathbf{A}(E, \mathbf{x})$, являющейся аналитической функцией своих аргументов. Особый интерес представляют такие системы уравнений (1.1), которые имеют решения интеграл движения следующего общего вида:

$$H\Big(E, t + \Phi(E, \mathbf{x})\Big) = 0, \tag{2.2}$$

где $\Phi(E, \mathbf{x})$ - так же аналитическая функция комплексного аргумента E и координат на $\mathcal{R}^n$. Отметим, что частный случай $\Phi = (\mathbf{A}(E), \mathbf{x}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(E)x^\alpha$ рассматривался в работах [1]. Вычисляя производные функции $H(X, Y)$ $(X = E,\ Y = t + \Phi(E, \mathbf{x}))$ по x^α и t:

$$\begin{aligned} &E_{,\alpha}H_{,X} + (\Phi_{,\alpha} + \Phi_{,E}E_\alpha)\,H_{,Y} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n;\\ &E_{,t}H_{,X} + \Big(1 + \Phi_{,E}E_{,t}\Big)H_{,Y} = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

и исключая из полученных соотношений производные $H_{,X}$ и $H_{,X}$ приходим к системе уравнений (1.1) с вектор-функцией $\mathbf{A}$ вида:

$$A_\alpha(E,\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial\Phi(E,\mathbf{x})}{\partial x^\alpha}\right|_{E=const}, \tag{2.4}$$

где производные по координатам x^α берутся при условии $E = \mathrm{const}$. В силу аналитичности $\Phi(E,\mathbf{x})$ имеем:

$$\Phi(E,\mathbf{x}) = \phi(u,v,\mathbf{x}) + i\psi(u,v,\mathbf{x}), \quad \mathbf{A} = \mathbf{a}(u,v,\mathbf{x}) + i\mathbf{b}(u,v,\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

так что для вещественных функций ϕ и ψ и компонент векторных полей $\mathbf{a}(u,v,\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(u,v,\mathbf{x})$ выполнены условия связи:

$$a_\alpha(u,v,\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial\phi(u,v,\mathbf{x})}{\partial x^\alpha}\right|_{u,v=const}, \quad b_\alpha(u,v,\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial\psi(u,v,\mathbf{x})}{\partial x^\alpha}\right|_{u,v=const}$$

и условия Коши:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{\partial\phi}{\partial v}. \tag{2.6}$$

Соответственно, условия Коши выполняются и для компонент векторных полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и их комбинаций:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)}{\partial u} = 2\frac{\partial(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial v}, \quad \frac{\partial(\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2)}{\partial v} = -2\frac{\partial(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\partial u}. \tag{2.7}$$

Таким образом, из требования $\Im\mathbf{A}^2 = \mathrm{const}$ вытекает: $\Re\mathbf{A}^2 = \mathrm{const}$, и наоборот из $\Re\mathbf{A}^2 = \mathrm{const}$ вытекает $\Im\mathbf{A}^2 = \mathrm{const}$. Поэтому, для того, что бы выполнялись соотношения $\mathbf{A}^2 = 0$, достаточно выбрать поля $\mathbf{a}(u,v,\mathbf{x})$ и $\mathbf{b}(u,v,\mathbf{x})$ ортогональными и одинаковой длины в $\mathcal{R}^n$.

3. Уравнения второго порядка

Системы квазилинейных уравнений (2.1), имеющие решения (2.2), позволяют расширить класс уравнений второго порядка, решения которых совпадают с (2.2). Подставляя (2.4) в (1.2) находим:

$$\Delta E = \overline{\Delta}\Phi(E,\mathbf{x})E_t + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A}^2 E_t\right). \tag{3.1}$$

Здесь и далее $\overline{\Delta}\Phi(E,\mathbf{x})$ - оператор Лапласа от функции $\Phi(E,\mathbf{x})$ на $\mathcal{R}^n$, вычисляемый при условии $E = \mathrm{const}$. Анализ уравнения (3.1) показывает, что среди этих уравнений имеются гиперболические, эллиптические и параболические уравнения.

Утверждение 2. Каждое решение системы квазилинейных уравнений (2.1) с вектор-функцией $\mathbf{A}(E,\mathbf{x})$, определенной соотношением (2.4), для заданной аналитической вектор-функции $\Phi(E,\mathbf{x}) = \phi(u,v,\mathbf{x}) + i\psi(u,v,\mathbf{x})$ одного комплексного аргумента $E = u + iv$ имеющее вид (2.2) является решением комплексного уравнения (3.1). Обратное утверждение не верно.

Уравнения гиперболического и эллиптического типов соответствуют выбору:

$$\overline{\Delta}\Phi(E,\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{A}^2 \neq 0. \tag{3.2}$$

В этом случае уравнение (3.1) превращается в уравнение:

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A}^2 E_t\right). \tag{3.3}$$

В частности, при условии $\mathbf{A}^2 = p + iq = \mathrm{const}$, приходим к уравнениям Лапласа и Д'Аламбера. Выполнение первого условия в (3.2) приводит к произвольной гармонической функции $\Phi(E,\mathbf{x})$ координат $\mathbf{x}$ с произвольными аналитическими коэффициентами, зависящими от комплексного аргумента E, частным случаем которой является линейная функция $\Phi(E,\mathbf{x}) = (\mathbf{A}(E),\mathbf{x})$. Этот частный случай линейной функции $\Phi(E,\mathbf{x})$ простым образом дает возможность выполнить условие $\mathbf{A}^2 = p + iq = \mathrm{const}$. В случае более общих гармонических функций от $\mathbf{x}$ выполнение такого условия и даже более общего условия автономности $\mathbf{A}^2 = P(E)$, оказывается сложной задачей, исследование которой выходит за рамки данной статьи.

Как и в вещественном случае, из системы уравнений (2.1) прямым дифференцированием находим:

$$\Delta E = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A}^2 E_t\right), \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{A}^2(E) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha^2(E) = \sum_{\alpha=1}^{n}\Big(a_\alpha^2 - b_\alpha^2 + 2i a_\alpha b_\alpha\Big).$$

Введем обозначения:

$$R(u,v) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha^2 - b_\alpha^2), \quad I(u,v) = 2\Big(\mathbf{a},\mathbf{b}\Big) = 2\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha b_\alpha.$$

Тогда (3.4) эквивалентно двум уравнениям с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\Delta u - \frac{\partial}{\partial t}\left(R(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(I(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}\right) = 0,\\
\Delta v - \frac{\partial}{\partial t}\left(R(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(I(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Еще одним представлением уравнения (3.4) или (3.5) является следующая его форма:

$$c^2\Delta E - E_{tt} = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{P}(E), \tag{3.6}$$

где аналитическая функция $\mathcal{P}(E)$ комплексного аргумента $E = u + iv$ имеет вид:

$$\mathcal{P}(E) = \frac{c^2}{4\pi}\int \mathbf{A}^2(E)dE - E = P(u,v) + iQ(u,v). \tag{3.7}$$

Это же уравнение можно представить в виде пары вещественных уравнений:

$$c^2\Delta u - u_{tt} = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(u,v), \qquad c^2\Delta v - v_{tt} = 4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}Q(u,v). \tag{3.8}$$

Функции $P(u,v)$ и $Q(u,v)$, как и компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, удовлетворяют условиям Коши (2.6). Уравнения (3.8) можно рассматривать как уравнения произвольно поляризованной электромагнитной волны в диэлектрике с вектором поляризации с компонентами P, Q вдоль соответствующих направлений поляризации, нелинейным образом зависящих от напряженности поля с компонентами u, v.

4. Некоторые следствия

По аналогии с вещественным случаем из системы комплексных квазилинейных уравнений (2.1) можно получить в качестве простого следствия комплексное уравнение эйконала.

Утверждение 3. Каждое решение системы квазилинейных уравнений (2.1) для заданной вектор-функции $\mathbf{A}(E)$ является решением комплексного уравнения эйконала:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(E_{,\alpha}\Big)^2 = \mathbf{A}^2(E)\Big(E_t\Big)^2. \tag{4.1}$$

Это утверждение является прямым следствием системы (2.1).

Уравнение (4.1) эквивалентно паре вещественных связанных уравнений типа уравнений эйконала:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\Big(u_{,\alpha}\Big)^2 - \Big(v_{,\alpha}\Big)^2\right] = R(u,v)\left(\Big(u_t\Big)^2 - \Big(v_t\Big)^2\right) - I(u,v)u_t v_t,\\
2\sum_{\alpha=1}^{n} u_{,\alpha}v_{,\alpha} = I(u,v)\left(\Big(u_t\Big)^2 - \Big(v_t\Big)^2\right) + 2R(u,v)u_t v_t.
\end{aligned}$$

Следствие. В случае $\mathbf{A}^2 = 0$ система уравнений (4.1) принимает вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\left(u_{,\alpha}\right)^2 - \left(v_{,\alpha}\right)^2\right] = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} u_{,\alpha} v_{,\alpha} = 0.$$

Еще одно следствие можно получить из (2.1) с помощью дифференцирования его по t и комбинирования с самой этой системой уравнений. Оно имеет вид, аналогичный уравнениям Эйлера, но с комплексными функциями и векторами.

Утверждение 4. Вектор-функция $\mathbf{U} = \{U^1, \ldots, U^n\}$ с компонентами:

$$U^\alpha = -\frac{1}{\mathbf{A}^2} A^\alpha(E), \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

и функция $\rho = \mathbf{A}^2 E_t$ удовлетворяют системе однородных комплексных уравнений, аналогичных по форме уравнениям Эйлера для потока идеальной жидкости со скоростью $\mathbf{U}$ и плотностью ρ:

$$\frac{\partial U^\alpha}{\partial t} + U^\beta \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\rho U^\alpha\right) = 0. \tag{4.2}$$

Справедливость первого уравнения устанавливается прямым дифференцированием вектор-функции $\mathbf{U}$ и последующим использованием исходной системы уравнений (2.1). Второе уравнение эквивалентно уравнению (3.4) при использовании определения для функции ρ и $\mathbf{U}$. Отметим так же, что к этой системе можно добавить еще один дифференциальный закон сохранения (1.3) с сохраняющейся плотностью $\rho_1 = \mathbf{A}^2/2$ и тем же полем скоростей $\mathbf{U}$.

5. Уравнения Д'Аламбера и Лапласа в размерности $n = 2$

Как показывает предварительный анализ полученных решений, размерность координатного пространства $n = 2$ является выделенной. Поэтому рассмотрим сразу несколько важных примеров, которые иллюстрируют структуру решений в этой размерности.

Рассмотрим условия, при которых выполнено следующее равенство:

$$I(u, v) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0. \tag{5.1}$$

Для случая $n = 2$ это условие эквивалентно следующим общим формулам для компонент векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= D_1(u, v)\cos\Phi(u, v), \quad a_2 = D_1(u, v)\sin\Phi(u, v), \\ b_1 &= D_2(u, v)\sin\Phi(u, v), \quad b_1 = -D_2(u, v)\cos\Phi(u, v). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ должны удовлетворять соотношениям (2.6), что приводит к следующим уравнениям на функции $D_1(u, v)$, $D_2(u, v)$ и $\Phi(u, v)$:

$$\frac{1}{D_2}\frac{\partial D_1}{\partial u} = \frac{1}{D_1}\frac{\partial D_2}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \qquad \frac{1}{D_2}\frac{\partial D_1}{\partial v} = \frac{1}{D_1}\frac{\partial D_2}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}.$$

Из этих соотношений следует:

$$D_2^2 = D_1^2 - C_0, \tag{5.3}$$

где $C_0 = \mathrm{const}$. Отсюда:

$$\begin{aligned} &D_1 = \sqrt{C_0}\,\mathrm{ch}\,\Psi(u, v), \quad D_2 = \pm\sqrt{D_1^2 - C_0} = \pm\sqrt{C_0}\,\mathrm{sh}\,\Psi(u, v), \quad C_0 > 0; \\ &D_1 = \sqrt{|C_0|}\,\mathrm{sh}\,\Psi(u, v), \quad D_2 = \pm\sqrt{C_0 - D_1^2} = \pm\sqrt{|C_0|}\,\mathrm{ch}\,\Psi(u, v), \quad C_0 < 0, \\ &D_1 = \pm D_2, \quad \Psi = \ln D_2, \quad C_0 = 0. \end{aligned}$$

Оставшиеся соотношения принимают стандартный вид условий Коши для пары функций Φ и Ψ:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \tag{5.4}$$

т.е. эти функции являются гармоническими:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=0,\quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2}=0.$$

Из соотношения (5.3) следует:

$$R(u,v)=D_1^2-D_2^2=C_0. \tag{5.5}$$

В результате из соотношений (5.1) и (5.5) уравнения (3.5) превращаются в уравнения:

$$\Delta u=C_0u_{tt},\quad \Delta v=C_0v_{tt}, \tag{5.6}$$

где Δ - двумерный оператор Лапласа. Эти уравнения являются гиперболическими при $C_0>0$ и эллиптическими $C_0\le 0$. Следовательно, условие ортогональности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в двумерном случае автоматически приводит к линейным уравнениям для функций u и v.

Утверждение 5. Для любого заданного аналитического решения $\Phi(u,v)$, $\Psi(u,v)$ уравнений Коши (5.4) решение уравнений (5.6) можно представить в виде решения комплексного алгебраического трансцендентного уравнения:

$$H\Big(u+iv,\theta(x,y,t,u,v)\Big)=0, \tag{5.7}$$

где для гиперболического случая $C_0>0$:

$$\begin{gathered}\theta(x,y,t,u,v)=\\ t+\sqrt{|C_0|}\left[\operatorname{ch}\Psi(u,v)\Big(x\cos\Phi+y\sin\Phi\Big)\pm i\operatorname{sh}\Psi(u,v)\Big(x\sin\Phi-y\cos\Phi\Big)\right].\end{gathered} \tag{5.8}$$

и для эллиптического $C_0<0$:

$$\begin{gathered}\theta(x,y,t,u,v)=\\ t+\sqrt{|C_0|}\left[\operatorname{sh}\Psi(u,v)\Big(x\cos\Phi+y\sin\Phi\Big)\pm i\operatorname{ch}\Psi(u,v)\Big(x\sin\Phi-y\cos\Phi\Big)\right].\end{gathered} \tag{5.9}$$

6. Многозначные решения уравнения Лапласа и физические поля

Особый интерес представляет решение уравнения Лапласа с многозначными решениями. Как следует из уравнения (5.6) в случае $C_0=0$ это уравнение превращаются в уравнение Лапласа исключительно по пространственным координатам. При этом решение (5.7) является обобщением известного решения двумерного уравнения Лапласа $E=u+iv=f(x+iy)$ с произвольной функцией $f(z)$ $(z=x+iy)$. Это решение имеет следующий вид:

$$u+iv=H\Big(D_1e^{\pm i\Phi}(x\mp iy)\Big)=0. \tag{6.1}$$

Следствие. Поскольку уравнения (5.6) линейные, то их общим решением является линейная суперпозиция решений (5.7), отвечающая различным не эквивалентным решениям $\Psi(u,v)$ и $\Phi(u,v)$ уравнений Коши (5.4) относительно u,v при фиксированных значениях C_0.

Как известно, уравнение Лапласа тесно связано с уравнениями Пуассона, которые играют важную роль в теории электромагнитных и гравитационных полей. Появление многозначных решений у данного уравнения означает, что существуют такие сингулярные источники в правой части уравнения Лапласа, т.е. источники с носителями меры нуль, которые создают в некоторых областях пространства или во всем пространстве многозначные поля. Поскольку уравнение Лапласа является линейным, то дополнение в правую часть этого уравнения обычных источников поля не меняет ситуации и приводит к возможности существования многозначных решений уравнений Пуассона как для гравитационного, так и для электрического полей в случае обычных распределений заряда и массы. Условием существования многозначных решений в этом случае будет требование существование в пространстве сингулярных источников, соответствующих решениям (6.1). Аналогичная ситуация имеет место и для случай уравнения Д'Аламбера и уравнения электромагнитных волн в нелинейных диэлектриках без дисперсии, рассмотрение многозначных решений которых началось в работе [1].

Задача вычисления сингулярных источников выходит за рамки данной работы. Единственно, что можно сказать заранее - это то, что сингулярные источники должны быть связано с границами областей многозначности решений, вычисление которых будет изложено в следующих разделах данной статьи.

7. Общие свойства решений системы комплексных квазилинейных уравнений для $n > 2$

В дальнейшем будем заранее предполагать, что вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны почти во всех точках $\mathcal{R}^n$. Случай, когда эти вектора коллинеарны, фактически эквивалентен вещественному случаю. В отличие от решений вещественных квазилинейных уравнений вида (2.1), которые в [1] были названы ривертонами, решения комплексных уравнений (2.1) обладают подобной, но уже более сложной структурой. Каждое решение $E(\mathbf{x}, t)$ уравнений (2.1) имеет одну комплексную характеристику или две вещественных характеристики:

$$\xi(u, v) = t + \Big(\mathbf{a}(u, v), \mathbf{x}\Big), \quad \eta(u, v) = \Big(\mathbf{b}(u, v), \mathbf{x}\Big). \tag{7.1}$$

Рассматривая значения u и v как параметры, из этих уравнений можно определить геометрию фронтов волн и областей однозначности решений уравнений (2.1). В частности, из этих уравнений следует, что множество точек, в которых одновременно обе функции u и v имеют некоторые фиксированные значения, определяют гиперплоскость размерности $n - 2$.

Если фиксировать значение только одного из параметров u или v, то изменяя второй, мы получим гиперповерхность размерности $n - 1$, являющейся поверхностиью уровня соответствующей функции u или v. Эта гиперповерхнось в отличие от вещественного случая, уже не будет, вообще говоря, гиперплоскостью. Это усложняет описание динамики волн в рассматриваемых системах. Уравнения гиперповерхностей уровня $u = u_0$ и $v = v_0$ имеют вид:

$$\xi(u_0, v) = t + \Big(\mathbf{a}(u_0, v), \mathbf{x}\Big), \quad \eta(u_0, v) = \Big(\mathbf{b}(u_0, v), \mathbf{x}\Big), \tag{7.2}$$

и

$$\xi(u, v_0) = t + \Big(\mathbf{a}(u, v_0), \mathbf{x}\Big), \quad \eta(u, v_0) = \Big(\mathbf{b}(u, v_0), \mathbf{x}\Big). \tag{7.3}$$

Эти уравнения линейны по координатам $\mathbf{x}$, но нелинейны, соответственно, по v и u.

Множество точек пересечения гиперповерхностей уровня функции u, соответствующих ее значениям $u = u_1$ и $u = u_2$, можно описать с помощью системы уравнений:

$$\begin{aligned} \xi(u_1, v) &= t + \Big(\mathbf{a}(u_1, v), \mathbf{x}\Big), \quad \eta(u_1, v) = \Big(\mathbf{b}(u_1, v), \mathbf{x}\Big), \\ \xi(u_2, v') &= t + \Big(\mathbf{a}(u_2, v'), \mathbf{x}\Big), \quad \eta(u_2, v') = \Big(\mathbf{b}(u_2, v'), \mathbf{x}\Big). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Здесь v и v' пробегают независимо все возможные значения функции v для каждой из гиперповерхностей отдельно. Эта система четырех уравнений относительно параметров $\mathbf{x}$, v и v' общим числом $n + 2$, определяет в $\mathcal{R}^n$ гиперповерхность размерности $n - 2$. Это означает, что в случае $n = 2$ пересечения гипрповерхностей возможны лишь в конечном числе точек при строго определенных значениях v и v', т.е. лишь для исключительных гиперповерхностей $v = \mathrm{const}$, которые следует отыскивать непосредственно из формы самого решения (2.2).

8. Структура областей многозначности в размерности $n = 3$

Поскольку трехмерный случай играет важную роль в прикладных задачах, рассмотрим его отдельно. В случае размерности $n = 3$ система уравнений (7.4) может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} &a_1(u_1, v)x_1 + a_2(u_1, v)x_2 + a_3(u_1, v)x_3 = \xi(u_1, v) - t, \\ &b_1(u_1, v)x_1 + b_2(u_1, v)x_2 + b_3(u_1, v)x_3 = \eta(u_1, v), \\ &a_1(u_2, v')x_1 + a_2(u_2, v')x_2 + a_3(u_2, v')x_3' = \xi(u_2, v') - t, \\ &b_1(u_2, v')x_1 + b_2(u_2, v')x_2 + b_3(u_2, v')x_3' = \eta(u_2, v'). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Для удобства записи полезно представить решения первой и второй пар уравнений в следующем виде:

$$x_1 = F_1(u_1, v) + H_1(u_1, v)x_3, \quad x_2 = F_2(u_1, v) + H_2(u_1, v)x_3,$$
$$x_1 = F_1(u_2, v') + H_1(u_2, v')x_3, \quad x_2 = F_2(u_2, v') + H_2(u_2, v')x_3,$$

где

$$F_1(u, v, t) = \frac{1}{\Delta_0}\Big(b_2(u, v)(\xi(u, v) - t) - a_2(u, v)\eta(u, v)\Big),$$
$$F_2(u, v, t) = -\frac{1}{\Delta_0}\Big(b_1(u, v)(\xi(u, v) - t) - a_1(u, v)\eta(u, v)\Big),$$
$$H_1(u, v) = -\frac{1}{\Delta_0}\Big(b_2(u, v)a_3(u, v) - a_2(u, v)b_3(u, v)\Big),$$
$$H_2(u, v) = \frac{1}{\Delta_0}\Big(b_1(u, v)a_3(u, v) - a_1(u, v)b_3(u, v)\Big),$$

$\Delta_0 = b_2(u, v)a_1(u, v) - a_2(u, v)b_1(u, v)$. Отсюда находим:

$$x_3 = -\frac{F_1(u_2, v', t) - F_1(u_1, v, t)}{H_1(u_2, v') - H_1(u_1, v)} = -\frac{F_2(u_2, v') - F_2(u_1, v)}{H_2(u_2, v') - H_2(u_1, v)}. \tag{8.2}$$

Последнее из этих двух уравнений служит для вычисления параметра v' в зависимости от параметров u_1, u_2 и v. Выбор координат x_1 и x_2 осуществляется из условия того, что $\Delta_0 \neq 0$ для почти всех значений u и v. Такой выбор всегда возможен, если вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. В результате имеет место:

Утверждение 6. Граница области многозначности функции $u(\mathbf{x}, t)$, т.е. множества точек пересечения поверхностей уровня функции u, для размерности координатного пространства $n = 3$ определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{F_1(u, v, t)H_1(u, v') - F_1(u, v', t)H_1(u, v)}{H_1(u, v') - H_1(u, v)}, \\ x_2 &= \frac{F_2(u, v, t)H_2(u, v') - F_2(u, v', t)H_2(u, v)}{H_2(u, v') - H_2(u, v)}, \\ x_3 &= -\frac{F_1(u, v', t) - F_1(u, v, t)}{H_1(u, v') - H_1(u, v)}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\frac{F_1(u, v', t) - F_1(u, v, t)}{H_1(u, v') - H_1(u, v)} = \frac{F_2(u, v', t) - F_2(u, v, t)}{H_2(u, v') - H_2(u, v)}. \tag{8.4}$$

Доказательство. Уравнение огибающей множества точек пересечения получается из (8.2) предельным переходом: $u_1 \to u_2 = u$, что приводит к уравнениям (8.3). При этом, последнее уравнение служит для вычисления значения параметра v' в зависимости от u и v. Остальные три уравнения описывают поверхность размерности $d = 2$, которая и является границей области многозначности решений для функции $u(\mathbf{x}, t)$ в данный момент времени t. По аналогии выписываются уравнения для вычисления границы области многозначности для функции $v(\mathbf{x}, t)$, которые здесь не приводятся.

Замечание 1. Области многозначности, вообще говоря, будут зависеть от времени в отличие от вещественного случая, рассмотренного в [1], что является следствием того, что поверхности уровня функций u и v не являются в общем случае плоскостями.

Замечание 2. Переход в уравнениях (8.3) к пределу $v' \to v$ приводит к уравнениям кривых самопересечения поверхностей уровня функции $u(\mathbf{x}, t)$ (и аналогично, функции $v(\mathbf{x}, t)$), которые возможны для некоторых значений самой функции $u(\mathbf{x}, t)$, которые являются решениями этих уравнений.

9. Структура областей многозначности в размерности $n > 3$

В случае $n > 3$ вычисления строятся по аналогичной схеме. Уравнения для гиперповерхностей уровня функции $u(\mathbf{x}, t)$ в момент времени t можно записать в виде:

$$x_1 = F_1(u, v) + \Big(\mathbf{m}_1(u, v), \mathbf{x}\Big)_\perp, \quad x_2 = F_2(u, v)t + \Big(\mathbf{m}_2(u, v), \mathbf{x}\Big)_\perp, \tag{9.1}$$

где

$$F_1(u,v,t) = \frac{1}{\Delta_0}\Big(b_2(u,v)(\xi(u,v)-t) - a_2(u,v)\eta(u,v)\Big),$$
$$F_2(u,v,t) = -\frac{1}{\Delta_0}\Big(b_1(u,v)(\xi(u,v)-t) - a_1(u,v)\eta(u,v)\Big),$$
$$\mathbf{m}_1 = -\frac{1}{\Delta_0}\Big(b_2(u,v)\mathbf{a}(u,v) - a_2(u,v)\mathbf{b}(u,v)\Big),$$
$$\mathbf{m}_2 = \frac{1}{\Delta_0}\Big(b_1(u,v)\mathbf{a}(u,v) - a_1(u,v)\mathbf{b}(u,v)\Big),$$

$\Delta_0 = b_2(u,v)a_1(u,v) - a_2(u,v)b_1(u,v)$,

$$(\mathbf{m}_1(u,v),\mathbf{x})_\perp = \sum_{k=3}^{n} m_1^k(u,v)x_k, \quad (\mathbf{m}_2(u,v),\mathbf{x})_\perp = \sum_{k=3}^{n} m_2^k(u,v)x_k.$$

По аналогии с трехмерным случаем для функции $u(\mathbf{x},t)$ доказывается:

Утверждение 7. Уравнения для границы области многозначности функции $u(\mathbf{x},t)$ в момент времени в случае $n>3$ имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} x_1 = F_1(u,v,t) + \Big(\mathbf{m}_1(u,v),\mathbf{x}\Big)_\perp, \quad x_2 = F_2(u,v,t) + \Big(\mathbf{m}_2(u,v),\mathbf{x}\Big)_\perp, \\ F_1(u,v',t) - F_1(u,v,t) + \Big(\mathbf{m}_1(u,v') - \mathbf{m}_1(u,v),\mathbf{x}\Big)_\perp = 0, \\ F_2(u,v',t) - F_2(u,v,t) + \Big(\mathbf{m}_2(u,v') - \mathbf{m}_2(u,v),\mathbf{x}\Big)_\perp = 0. \end{gathered} \tag{9.2}$$

Отличием случая $n>3$ от $n=3$ состоит в том, что последние два уравнения можно рассматривать как линейные относительно двух произвольных подходящих координат из набора $x_3,\dots,x_n$. Замечания, сделанные по поводу Утверждения 6 имеют место и в случае $n>3$.

10. Решения линейных уравнений второго порядка

Кроме структурной многозначности, которая была рассмотрена в предыдущих двух разделах, важным элементом описания динамики волн в рассматриваемых системах является явление опрокидывания фронтов и формирование ударных волн. В вещественном случае (см. [1]) явления опрокидывания фронта и многозначности решений, связанные с пересечением фронтов, можно описывать раздельно. Решения с фиксированной геометрией траекторий распространения волн названы в [1] ривертонами. Для них опрокидывание фронта описывается одномерным уравнением Хопфа вдоль траектории распространения фронта. В рассматриваемом комплексном случае информацию о возникновении многозначности за счет опрокидывания фронтов проще получать прямо из решения (2.2), поскольку фронты волн, соответствующие гиперповерхностям уровня функций $u(\mathbf{x},t)$ и $v(\mathbf{x},t)$, не являются плоскими, а уравнения ортогональных к ним кривых, оказываются сложными.

Все точки пространства, в которых происходит ветвление решения или опрокидывание его фронта, определяются из условия обращения производных функций $u(\mathbf{x},t)$ и $v(\mathbf{x},t)$ по координатам в бесконечность. Представим (2.2) (без ограничения общности) в виде:

$$E = G\Big(t + (\mathbf{A}(E),\mathbf{x})\Big)$$

Тогда:

$$E_{,\alpha} = \frac{A_\alpha G'(z)}{1-(\mathbf{A}',\mathbf{x})G'(z)},$$

где $z = t + (\mathbf{A}(E),\mathbf{x}) = \xi + i\eta$. Отсюда, находим общее уравнение для поверхности ветвления решения:

$$1-(\mathbf{A}',\mathbf{x})G'(z) = 0, \quad E = G(z). \tag{10.1}$$

Геометрия таких поверхностей целиком определяется функциональной зависимостью $\mathbf{A} = \mathbf{A}(E)$ и должна анализироваться в каждом конкретном случае отдельно. По аналогии с вещественным случаем рассмотренные решения будем называть **комплексными ривертонами**.

Среди уравнений (3.4) особый интерес представляют уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, среди которых могут быть гиперболические и эллиптические уравнения. Такие уравнения соответствуют общему условию: $\mathbf{A}^2(E) = p + iq = \text{const}.$ где p и q - вещественные постоянные, или двум вещественным соотношениям:

$$\mathbf{a}^2(u,v) - \mathbf{b}^2(u,v) = p = \text{const}, \qquad 2(\mathbf{a}(u,v), \mathbf{b}(u,v)) = q = \text{const}, \tag{10.2}$$

при выполнении условий Коши (2.6). Легко проверяется, что при условии выполнения условий Коши (2.6), одно из условий (10.2) выполняется автоматически, при выполнении второго. Выполнено первое из условий (10.2), тогда:

$$(\mathbf{a}'_u, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}'_u, \mathbf{b}), \quad (\mathbf{a}'_v, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}'_v, \mathbf{b}).$$

Используя (2.6), получаем из последних равенств:

$$(\mathbf{b}'_v, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}'_v, \mathbf{b}), \quad (\mathbf{b}'_u, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}'_u, \mathbf{b}),$$

что эквивалентно производным по u и v от второго соотношения (10.2). Аналогично доказывается и обратное утверждение. В результате, если представить вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в виде:

$$\mathbf{a} = N(u,v)\mathbf{n}(u,v), \quad \mathbf{b} = M(u,v)\mathbf{k}(u,v), \tag{10.3}$$

где $\mathbf{n}^2 = 1$ и $\mathbf{k}^2 = 1$, то из условия $M^2 - N^2 = p$, следует:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \frac{q}{NM}. \tag{10.4}$$

Уравнение (3.4) превращается в пару уравнений Д'Аламбера координатной размерностью n в случае $p > 0, \quad q = 0$ и в уравнение Лапласа с координатной размерностью $n+1$ в случае $p < 0, \quad q = 0$ и с координатной размерностью n, если $p = 0, \quad q = 0$. В случае $p = 0, q \neq 0$ уравнения (3.4) сводятся к паре уравнений вида:

$$\Delta\Delta u + q^2 u_{tttt} = 0, \quad \Delta\Delta v + q^2 v_{tttt} = 0.$$

Решения во всех этих случаях могут быть записаны в виде:

$$E = G(\xi + i\eta), \tag{10.5}$$

где

$$\xi = t + N(u,v)\sum_{\alpha=1}^{n} n_\alpha(u,v)x_\alpha, \quad \eta = \pm\sqrt{N^2(u,v) - p}\sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha(u,v)x_\alpha. \tag{10.6}$$

а единичные вещественные вектора $\mathbf{n}(u,v)$ и $\mathbf{k}(u,v)$, должны удовлетворять одному условию (10.4). При этом значению $\text{sign}(p) = +1$ будет соответствовать случай уравнения Д'Аламбера, а $\text{sign}(p) = -1$ - уравнение Лапласа. В случае $p = 0, q = 0$, функции ξ и η будут иметь такой вид:

$$\xi = t + \sum_{\alpha=1}^{n} N(u,v)n_\alpha(u,v)x_\alpha, \quad \eta = \pm\sum_{\alpha=1}^{n} N(u,v)k_\alpha(u,v)x_\alpha. \tag{10.7}$$

Все такие решения являются комплексными ривертонами, т.е. многозначными и для них справедливы выводы, которые были сделаны относительно таких решений в общем случае. В частности, в отличие от вещественного случая, комплексные ривертоны как решения уравнений Д'Аламбера и Лапласа могут допускать опрокидывание фронта. Таким образом, можно сформулировать следующее:

Утверждение 8. Для любого $n > 1$ уравнение:

$$\Delta E = pE_{tt},$$

имеет решения $E(\mathbf{x}, t)$ в виде комплексных ривертонов (10.5) для произвольных вектор-функций $\mathbf{n}(u,v)$ и $\mathbf{k}(u,v)$ и функции $N(u,v)$, удовлетворяющих (10.2) при условии $q = 0$. При этом в случае $p > 0$ это уравнение является уравнением Д'Аламбера, а в случае $p \leq 0$ - уравнением Лапласа. Поскольку уравнения Д'Аламбера и Лапласа линейные, то для них выполняется линейный принцип суперпозиции. Это означает, что любая линейная комбинация полученных решений является решением этих уравнений.

11. Решения уравнений Д'Аламбера и Лапласа в размерности $n = 3$

Поскольку размерность $n = 3$ является важной с прикладной точки зрения, то опишем в явном виде решения типа комплексных ривертонов уравнений Д'Аламбера и Лапласа в этой размерности. Для этого представим поля **a** и **b** в следующем виде:

$$\mathbf{a} = N\Big(\cos\Phi(u,v)\sin\Theta(u,v), \cos\Phi(u,v)\sin\Theta(u,v), \cos\Theta(u,v)\Big), \tag{11.1}$$
$$\mathbf{b} = M\Big(\cos\Phi(u,v)\cos\Theta(u,v), \cos\Phi(u,v)\cos\Theta(u,v), -\sin\Theta(u,v)\Big),$$

где $N = \sqrt{|p|}\,\mathrm{ch}\,\Psi(u,v)$, $M = \sqrt{|p|}\,\mathrm{sh}\,\Psi(u,v)$ для случая $p > 0$ и $N(u,v) = \sqrt{|p|}\,\mathrm{sh}\,\Psi(u,v)$, $M(u,v) = \sqrt{|p|}\,\mathrm{ch}\,\Psi(u,v)$ для случая $p < 0$. В случае $p = 0$: $N(u,v) = M(u,v) = \exp(\Psi)$. Эти соотношения эквивалентны (10.2) при условиях $p = 0,\ q = 0$.

Подставляя выражения для компонент векторов **a** и **b** в (2.6), приходим к соотношениям:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial u} = -\frac{\partial\Theta}{\partial v}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial v} = \frac{\partial\Theta}{\partial u}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{\partial\Phi}{\partial v} = 0. \tag{11.2}$$

Соотношения (11.1) при выполнении уравнений (11.2) могут быть теперь использованы для вычисления решений в форме (2.2) или (10.5).

Построенные решения можно сопоставить решениям уравнений Д'Аламбера вида:

$$H(E, \zeta E + s_-, \zeta^* + E s_+) = 0, \tag{11.3}$$
$$\zeta = x + iy,\ \zeta^* = x - iy,\ s_- = z - t,\ s_+ = z + t,$$

где H(E,X,Y) - произвольная функция трех комплексных аргументов. Эти решения были найдены в [5]. Решения (10.5) определяются двумя произвольными независимыми функциональными параметрами $G(\xi + i\eta)$, $\Psi(u,v) + i\Theta(u,v)$, а решения (11.3) одной функцией с двумя комплексными аргументами, но имеющими простой функциональный вид относительно $E = u + iv$. Поэтому можно предположить, что эти решения связаны между собой, однако анализ такой связи выходит за рамки данной работы.

Заключение

В работе исследованы системы нелинейных комплексных квазилинейных уравнений первого порядка в произвольной координатной размерности и установлена общая их связь с нелинейными гиперболическими и эллиптическими уравнениями второго порядка. Эти результаты обобщают результаты [1]. Наиболее важной особенностью построенных решений - комплексных ривертонов, является то, что они оказываются решениями не только гиперболических уравнений, но и эллиптических в произвольной конечной размерности координатного пространства. Этот результат важен для анализа физических полей, описание которых связано с уравнениями Пуассона. Так же в работе показано, что среди уравнений, обладающих многозначными решениями имеются и нелинейные телеграфные уравнения, которые описывают процессы с диссипацией в нелинейной среде. Исследована геометрическая структура поверхностей уровня таких решений и областей их пересечения, в которых решения оказываются многозначными. В явном виде найдены уравнений выделяющие области многозначности решений. Показано, что уравнения Д'Аламбера и Лапласа в координатной размерности пространства $n > 1$ обладают комплексными ривертонами, т.е. многозначными решениями, возможно, с опрокидыванием фронта, что не имело места в вещественном случае. Полученные результаты могут быть использованы для описания решений уравнений произвольно поляризованных волн в нелинейных диэлектриках и других прикладных задачах нелинейной динамики.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00747-а) и Министерства образования и науки РФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями. // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174. N 2 – С. 236–246
2. С. П. Царев. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа.// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. В. 5 – С. 1048–1068

3. Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов. Классификация интегрируемых (2 + 1)-мерных квазилинейных иерархий.// Теоретическая и математическая физика. 2005. Т. 144. № 1 – С. 35–43
4. E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova. // Commun. Math. Phys. 2004. V. 248. P.187–206; J. Phys. A. 2004. V. 37. P.2949–2963; J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 2365–2377
5. R. Prnrose, W. Rindler. Spinors and space-time. Spinor and twistor methods in space-time geometry. Cambridge University Press, 1986.
6. V.V. Kassandrov, in: Space-Time Structure: Algebra and Geometry, eds. D.G. Pavlov et al. – Lilia Print, Moscow, 2007. P. 422; Physics of Atomic Nuclei. 2009. V. 72. N. 5. P. 813–827.
7. И.Г. Катаев. Ударные электромагнитные волны. М.: Советское радио, 1963. 148 С.

Поступила в редакцию 22.12.2013

Журавлев Виктор Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра Теоретической физики, Ульяновский государственный университет, 432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л.Толстого, 42.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

V. M. Zhuravlev
Nonlinear wave equations and first order complex quasilinear equations

Keywords: Exact solutions of multidimensional hyperbolic and elliptic equations, breaking wave, multivalued solutions, hydrodynamic and electromagnetic waves in a medium with nonlinear polarization.

PACS: 03.65.Ge, 02.30.Ik , 03.50.De, 04.30.Nkб 47.35.+i

In this paper, we establish a connection between the complex quasi-linear first-order equations and multidimensional nonlinear hyperbolic and elliptic equations that describe wave propagation phenomena of various types in nonlinear media in multidimensional spaces. Multivalued exact solutions are constructed . Spatial structure and dynamics of multivalued exact solutions along the complex characteristics are analyzed. The boundaries of the uniqueness of solutions are explored.

REFERENCES

1. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations with multivalued solutions. *Teoret. Mat. Fiz.* 2013. V. 174. N. 2. pp. 236–246.
2. S. P. Tsarev, The geometry of harniltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 1990. 54:5. pp. 1048–1068.
3. E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, M. V. Pavlov, Classification of Integrable (2+1)-Dimensional Quasilinear Hierarchies. *Teoret. Mat. Fiz*. 2005. 144:1. pp.-35–43.
4. E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova. *Commun. Math. Phys*. 2004. V.248 -pp.187–206; J. Phys. A. 2004. V. 37. pp.2949–2963; J. Math. Phys. 2004. V.45. -pp.2365–2377.
5. R. Prnrose, W. Rindler. Spinors and space-time. *Spinor and twistor methods in space-time geometry.* Cambridge University Press, 1986.
6. V.V. Kassandrov, in: *Space-Time Structure: Algebra and Geometry*, eds. D.G. Pavlov et al. – Lilia Print, Moscow, 2007, p. 422; Physics of Atomic Nuclei. 2009. V.72. N. 5. pp. 813–827.
7. I.G. Kataev. *Shock electromagnetic waves*. M.: Soviet radio. 1963. 148 p.

Received 22.12.2013

Zhuravlev Victor Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Theoretical Physics department, Ulyanovsk State University, ul. Leo Tolstoy, 42, Ulyanovsk, 432017, Russia.
E-mail: zhvictorm@gmail.com