УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов,[1] *, Е. В. Савельев* [2]

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ. I. ЭВОЛЮЦИЯ МОДЕЛИ КАК ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ В СИЛОВОМ ПОЛЕ

Продемонстрировано сведение проблемы моделирования эволюции открытой Вселенной для конформно-плоской метрики пространства-времени в форме Фока к эквивалентной ей задаче о механическом движении частицы единичной массы в некотором силовом поле. Путем введения ряда «механических» потенциалов получены точные космологические модели, начиная с решения Фридмана, заполненные материей и излучением в приближении идеальной жидкости.

Ключевые слова: открытые космологические модели, частица, уравнение Ньютона, функция состояния.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

Введение

Современные модели Вселенной опираются на известные космологические решения А.Фридмана ([1], [2]) уравнений Эйнштейна, без учета которых нельзя построить реалистичную модель. На сегодняшний день исходным для обсуждения космологических моделей наблюдаемой Вселенной является второе решение [2] для изотропного пространства с отрицательной кривизной, описывающее расширяющуюся Вселенную, заполненную некогерентной пылью (давление отсутствует).

При этом решение А.Фридмана [2] принадлежит конформно-плоским решениям, то есть для них конформный тензор кривизны Вейля (см., например, [3]) равен нулю. Это предполагает запись метрики четырехмерного пространства времени в конформно-плоском виде. В большинстве случаев для записи этого решения используются синхронные координаты (см., например, [4]). Однако подход Фока ([5], [6]) позволяет переписать эту метрику в виде, конформном галилеевой метрике. Кроме того, оказалось, как показано в общем виде в [7], такой переход эквивалентен переходу от синхронной системы отсчета к кинеметрической ([8]- [14]).

Далее, в работе [15] получено, что при использовании подхода Фока, в котором метрика 4-мерного пространства-времени является конформно-галилеевой и конформный множитель есть функция одной переменной, возможна запись решения уравнений Эйнштейна, описывающих однородную изотропную Вселенную, заполненную материей с произвольным уравнением состояния, в виде квадратур. Такую запись можно использовать для моделирования эволюции модели Вселенной на различных этапах. Но особый интерес для исследователя представляют точные решения уравнений Эйнштейна, обобщающие уже известные.

Примененный в ([16]- [17]) подход Фока позволил найти обобщение решения Фридмана для открытой Вселенной на случай наличия как вещества, так и равновесного светоподобного излучения (подобного электромагнитному) с отличным от нуля давлением без введения конкретного уравнения состояния. Продолжение такого подхода было реализовано в дальнейших работах ([18]- [21]).

1. Уравнения гравитационного поля

Рассмотрим теперь возможность получения точных решений с использованием подхода Фока, отличную от того, как это было проделано в ([16], [17]).

Таким образом, мы исходим из того, что метрика записывается в виде:

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1}$$

где $exp(2\sigma)$ – конформный множитель; $\sigma = \sigma(S)$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1; -1; -1; -1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\varkappa = 8\pi$.

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru
[2]E-mail: editor@stfi.ru

Правую часть уравнений Эйнштейна (без космологической постоянной)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{1.2}$$

запишем в приближении идеальной жидкости с тензором энергии-импульса (ТЭИ)

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = exp(\sigma) b_\mu$ пропорциональна градиенту переменной S как функции координат x^μ : $b_\mu = S_{,\mu}$; $u_\mu u^\mu = 1$ – условие нормировки 4-скорости; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ есть 3-проектор на 3-пространство, который играет роль метрического тензора для 3-пространства, при этом выполняется условие ортогональности 3-пространства и временноподобной конгруэнции u^μ : $b_{\mu\nu} u^\mu = 0$.

В результате (1+3)-расщепления система уравнений (1.2) сведется к системе двух дифференциальных уравнений в полных производных:

$$3 \left(2 \frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2 \right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma); \tag{1.4}$$

$$2 \left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2} \right) = -\varkappa p \cdot exp(2\sigma), \tag{1.5}$$

где штрих обозначает производную d/dS.

Расщепление 4-уравнений гравитационного поля осуществлялось с помощью монадного формализма ([8]- [14]) путем проектирования системы (1.2) на временноподобную мировую линию и пространственноподобную поверхность, ортогональную временноподобному направлению. В качестве монады использован вектор 4-скорости u_μ. В итоге была получена система из двух дифференциальных уравнений: одно определяет плотность энергии, а другое – давление.

Вообще говоря, для решения этой системы необходимо задать уравнение состояния вещества, то есть связь между плотностью энергии и давлением. Эта связь, очевидно, является функцией точки пространственно-временного континуума (в данном подходе – функцией переменной S). Подавляющее большинство космологических моделей строится в предположении, что эта связь -= величина постоянная, хотя и различная на разных этапах эволюции моделей. Такое предположение, на наш взгляд, является препятствием к построению действительно эволюционных моделей, когда вещество (а соответственно, и уравнение состояния) меняется по мере развития таковых. Мы постараемся продемонстрировать, что, опираясь на вид самих уравнений, возможно получить точные решения с переменным уравнением состояния, описывающие Вселенную, содержащую различные состояния материи на разных этапах своей эволюции.

Прежде всего отметим, что систему (1.4)-(1.5) можно свести к уравнению Риккати для переменной S, введя явным образом функцию состояния как (см. [15])

$$\beta(S) = \frac{p(S)}{\varepsilon(S)}. \tag{1.6}$$

В предположении об определенной зависимости давления от переменной S в ([16], [17]) найдено точное решение этого уравнения.

2. Сведение моделирования Вселенной к задаче о движении частицы в силовом поле

Здесь мы пойдем несколько иным путем. Заменой $\sigma = 2 \cdot ln(y)$ система (1.4)-(1.5) сводится к более простой

$$12 \cdot y' \left(y' + \frac{1}{S} \cdot y \right) = \varkappa\varepsilon \cdot y^6; \tag{2.1}$$

$$4 \cdot \left(y'' + \frac{2}{S} y' \right) = -\varkappa p \cdot y^5. \tag{2.2}$$

Легко увидеть, что в уравнении (2.2), содержащему давление, можно избавиться от первой производной с помощью замен:

$$y = z_1(1/S) \qquad \text{либо} \qquad y = z_2(S)/S, \tag{2.3}$$

где z_1 и z_2 - некоторые функции.

Здесь уместно провести аналогию с внешней и внутренней задачами в теории потенциала, где внешнее решение (решение уравнения Лапласа) зачастую ищется в первом виде, а внутреннее решение (решение уравнения Пуассона) – во втором.

При этом уравнение (2.1) (определение плотности энергии) для обоих случае подстановки примет следующий вид :

$$\frac{dz}{dx}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x}\right) = \varkappa \frac{z^6}{12x^4} \cdot \varepsilon, \tag{2.4}$$

где $x = 1/S$ для первой замены, а $x = S$ – для второй.

Уравнение (2.2) в любом случае преобразуется к общему виду

$$\frac{d^2z}{dx^2} = F(x, z, p), \tag{2.5}$$

где

$$F(x, z, p) = -\varkappa \frac{z^5}{4x^4} \cdot p. \tag{2.6}$$

Считая переменную x новой «временной» переменной, а функцию z как своеобразную обобщенную координату, то получаем возможность интерпретировать (2.5) как уравнение Ньютона для одномерного движения частицы единичной массы под действием силы F из (2.6).

Зная функцию F и интегрируя это уравнение, приходим к «закону движения» $y = y(x)$. Другими словами, таким путем можно найти конформный множитель $exp(2\sigma) = y^4$, а, значит, легко определить все интересующие нас величины в космологической модели. При этом конкретному «механическому» движению частицы единичной массы будет соответствовать конкретная эволюция Вселенной. Подчеркнем, что силовая функция в механике может зависеть и от скорости, например, при описании осциллятора с диссипацией (в частности, см. получение космологического решения с вязкостью в [22], [23]).

Таким образом, появляется возможность *замены проблемы моделирования эволюции открытой Вселенной на эквивалентную ей задачу о механическом движении частицы единичной массы в некотором силовом поле.*

Наиболее распространенными силовыми полями являются потенциальные поля, поэтому рассмотрению их здесь и в последующих работах и будет посвящено дальнейшее исследование. В частности, если $F = -dU/dz$, то тогда давление оказывается напрямую связанным с выбором зависимости функции U :

$$\varkappa p = 4\frac{x^4}{z^5} \cdot \frac{dU}{dz}. \tag{2.7}$$

Остановимся здесь на первой замене, то есть перейдем к новой переменной $x = 1/S$, оставив за безразмерной «обобщенной координатой» z обозначение через y, то есть везде ниже будем считать $z \equiv y$, зная, что решение Фридмана для открытой Вселенной как раз отвечает такой зависимости от S.

Если потенциал оказывается функцией только «координаты» z, то уравнение (2.5) легко интегрируется с помощью соответствующего «закона сохранения», в котором «полная энергия» будет определяться выбранными начальными условиями. Это позволяет моделировать различные сценарии открытой Вселенной.

Движение по инерции есть простейший пример движения, для которого $F = 0$ ($U \equiv U_0 = const$. Тогда в такой «механистической» интерпретации решение Фридмана будет отвечать равномерному движению или движению в поле постоянного потенциала:

$$p = 0; \quad \frac{dU}{dy} = 0; \quad y = 1 - Ax = 1 - \frac{A}{S}; \quad A > 0, \tag{2.8}$$

где A, с одной стороны, есть постоянная «скорость» (в «механической» интерпретации, где x – «временная переменная», меняющаяся от $0 \iff S = \infty$ до $1/A \iff S = A$), а с другой, это –

постоянная, связанная с плотностью пылевидного вещества, то есть вещества, не «создающего» давления и заполняющего фридмановскую Вселенную.

Конформный множитель метрики (1.1) здесь равен

$$exp(2\sigma) = y^4 = (1 - \frac{A}{S})^4 \tag{2.9}$$

и совпадает с полученным в [5] для фридмановской открытой модели Вселенной.

В ([5], [6]) решение (2.8) достаточно подробно рассмотрено. Поэтому здесь мы не будем останавливаться на анализе решения Фридмана в такой записи. Напомним лишь, что условие положительности плотности энергии требует положительности постоянной A, поэтому приведем здесь точное выражение для плотности энергии некогерентной пыли фридмановского решения

$$\varkappa\varepsilon = \frac{12Ax^3}{(1 - Ax)^6}. \tag{2.10}$$

Получение выше приведенного результата на базе «механического» подхода наталкивает на мысль, что «неравномерное движение» в этом подходе должно приводить к обобщению решения Фридмана.

Следующим простым «потенциалом» является линейная функция (с постоянными a и b),

$$U = ay + b, \tag{2.11}$$

то есть реализуется равнозамедленное движение частицы единичной массы под действием постоянной тормозящей силы:

$$F = -\frac{dU}{dy} = -a, \tag{2.12}$$

где a – постоянная, совпадающая с ускорением в механическом подходе.

Тогда немедленно находим безразмерный «путь», проходимый этой частицей.

$$y = C_0 + Cx - \frac{a}{2}x^2, \tag{2.13}$$

где C и C_0 – постоянные интегрирования, соответственно интерпретируемые как скорость и начальное безразмерное расстояние при $x = 0$.

С другой стороны выражение (2.13) есть точное решение космологических уравнений уравнений (2.1)-(2.2).

Учитывая, что при $x \to 0$ ($S \to \infty$) должно выполняться условие галилеевости и асимптотическое прохождение решения через решение Фридмана для открытой Вселенной, получаем, что входящие в (2.13) постоянные соответственно будут равны: $C_0 = 1$ и $C = -A$, то есть можно переписать выражение для y как

$$y = 1 - Ax - \frac{a}{2}x^2. \tag{2.14}$$

Такая запись функции y при положительности параметра a обеспечивает для g_{00} компоненты метрического тензора при всех $S < \infty$ (или $x > 0$) условие $g_{00} < 1$. В нашем случае такое условие справедливо для конформного множителя, который принимает вид

$$exp(2\sigma) = \left(1 - Ax - \frac{a}{2}x^2\right)^4 = \left(1 - \frac{A}{S} - \frac{a}{2S^2}\right)^4. \tag{2.15}$$

Очевидно, что поведение модели будет определяться соотношением между постоянными A и a. Полное исследование данного точного решения отнесем к более поздним публикациям. Здесь же укажем только отдельные интересные, на наш взгляд, моменты.

Давление запишется как

$$\varkappa p(x) = \frac{4ax^4}{y^5}. \tag{2.16}$$

Справедливости ради необходимо отметить, что при отрицательности постоянной a давление отрицательно, то есть знак давления определяется знаком «ускорения» a.

Плотность энергии из (2.4) теперь запишется в виде

$$\varkappa\varepsilon(x) = 12x^3\frac{(A+ax)(1+ax^2/2)}{y^6}. \tag{2.17}$$

Трехмерная скалярная кривизна в данном подходе вычисляется по формуле

$${}^3R = -\frac{3\sigma'_S}{S}exp(-2\sigma) = \frac{6x^3y'_x}{y^5} \tag{2.18}$$

и для нашего случая будет иметь вид

$${}^3R = -\frac{6x^3(A+ax)}{(1-Ax-ax^2/2)^5}. \tag{2.19}$$

Точка сингулярности в данной модели (момент, когда конформный множитель обращается в нуль, трехмерная скалярная кривизна в бесконечность) будет соответствовать при учете неотрицательности x

$$x_0 = 1/S_0 = \frac{-A+\sqrt{(A^2+2a)}}{a}. \tag{2.20}$$

Кроме того, точка сингулярности при стремлении параметра a к нулю ($a \to 0$) в пределе становится равной $x_0 = 1/A$.

Функция состояния (1.6) при этом принимает вид

$$\beta(x) = \frac{p(x)}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{3}\frac{ax(1-Ax-ax^2/2)}{(A+ax)(1+ax^2/2)}, \tag{2.21}$$

откуда легко увидеть, что $\beta(x)$ обращается в нуль на концах отрезка: и в точке $x = 0$, и в точке сингулярности x_0. И это не смотря на то,что в точке сингулярности и давление, и плотность энергии принимают бесконечные значения.

Обращение в нуль $\beta(x)$ на концах отрезка означает, что некоторой точке отрезка функция состояния достигает своего максимального значения, зависящего от соотношения между величинами A и a. В окрестности точки $x = 0$ для функции состояния справедливо соотношение

$$\beta(x) \approx \frac{1}{3}\frac{a}{A}x. \tag{2.22}$$

В частности, если теперь в выражении (2.21) положить $A = 0$, то есть предположить, что Вселенная заполнена только материей, «создающей» отличное от нуля давление, то получим функцию

$$y = 1 - a^2x^2/2 \tag{2.23}$$

и соответствующую функцию состояния

$$\beta = \frac{1}{3}\frac{\left(1-a^2x^2/2\right)}{(1+a^2x^2/2)}, \tag{2.24}$$

для которой максимальное значение $\beta = 1/3$ будет достигаться при стремлении x к нулю ($S \to \infty$).

В самом деле, запишем соответствующие давление и плотность энергии для случая $A = 0:$

$$\varkappa p = \frac{4ax^4}{(1-ax^2/2)^5}; \tag{2.25}$$

$$\varkappa\varepsilon = 12ax^4\frac{(1+ax^2/2)}{(1-ax^2/2)^6}. \tag{2.26}$$

Асимптотические поведение выражений (2.25) и (2.26) вблизи $x = 0$ ($S \to \infty$) могут быть представлены как

$$\varkappa p \approx 4ax^4 \tag{2.27}$$

и

$$\varkappa\varepsilon \approx 12ax^4. \tag{2.28}$$

Это означает, что заполняющая Вселенную непылевая материя, которая «создает» отличное от нуля давление и связана с параметром a, есть материя, асимптотически подчиняющаяся ультрарелятивистскому уравнению состояния

$$\varepsilon_{rad} = 3p. \tag{2.29}$$

Аналогичное рассмотрение поведения давления (2.16) и плотности энергии (2.17) вблизи $x = 0$ $(S \to \infty)$ приводят к следующим результатам:

$$\varkappa p \approx 4ax^4 \tag{2.30}$$

и

$$\varkappa\varepsilon \approx 12Ax^3(1 + 6Ax) + 12ax^4, \tag{2.31}$$

или

$$\varepsilon \approx \varepsilon_{dust} + \varepsilon_{rad}, \tag{2.32}$$

где ε_{dust} и ε_{rad} суть соответственно плотности энергии некогерентной пыли, полученной асимптотически при $a = 0$ (совпадающей с асимптотикой соотношения (2.10)) и ультрарелятивистской материи $(a \neq 0)$.

3. Модель открытой Вселенной как осциллятор

Сделаем следующий шаг – рассмотрим квадратичный потенциал или колебательное движение:

$$U = B^2y^2/2 + U_0, \tag{3.1}$$

где B – постоянная, имеющая в механической интерпретации смысл коэффициента жесткости пружины.

Из уравнения (2.5), которое принимает вид уравнения «колебаний», сразу получаем точное решение, приведенное в ([16], [17]) и найденное там более сложным путем решения уравнения Риккати:

$$y = \sqrt{(1 + A^2/B^2)}\,\cos(Bx + \alpha_0) = \frac{\cos(Bx + \alpha_0)}{\cos\,\alpha_0}, \tag{3.2}$$

где $\operatorname{tg}^2\alpha_0 = A^2/B^2 = 1 - 1/\cos^2\alpha_0,\ A = const,\ B = const.$

Конформный множитель запишется как

$$exp(2\sigma) = \left(1 + A^2/B^2\right)^2\cos^4\left(Bx + \alpha_0\right) = \left(1 + A^2/B^2\right)^2\cos^4\varphi(x) = \left(\frac{\cos\,\varphi(x)}{\cos\,\alpha_0}\right)^4, \tag{3.3}$$

где $\varphi \equiv B/S + \alpha_0 = Bx + \alpha_0$.

Из (3.1) и (2.7) сразу приходим к выражению для давления:

$$\varkappa p = \frac{4B^2/S^4}{\left(1 + A^2/B^2\right)^2\cos^4\varphi(S)} = 4B^2x^4\left(\frac{\cos\,\alpha_0}{\cos\,\varphi(x)}\right)^4, \tag{3.4}$$

а из (2.1) – к выражению для плотности энергии:

$$\varkappa\varepsilon = \frac{12B}{S^3}\frac{\operatorname{tg}\varphi(S)\left(1 + \dfrac{B}{S}\operatorname{tg}\varphi(S)\right)}{\left(1 + A^2/B^2\right)^2\cos^4\varphi(S)} = 12Bx^3\operatorname{tg}\varphi(x)\left(1 + Bx\operatorname{tg}\varphi(x)\right)\left(\frac{\cos\,\alpha_0}{\cos\,\varphi(x)}\right)^4. \tag{3.5}$$

Откуда видно, что функция состояния принимает вид:

$$\beta = \frac{1}{3}Bx\frac{\operatorname{ctg}\varphi(x)}{(1 + Bx\operatorname{tg}\varphi(x))} \tag{3.6}$$

Трехмерная скалярная кривизна для этого решения запишется как

$$^3R = -6Bx^3 \operatorname{tg}\varphi(x)\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\varphi(x)}\right)^4 = -\frac{\varkappa\varepsilon}{2\left(1 + Bx\operatorname{tg}\varphi(x)\right)}. \tag{3.7}$$

Для интерпретации решения (3.3) необходимо рассмотреть асимптотическое поведение конформного множителя, плотности энергии и давления. Нужно понять, с чем связаны постоянные A и B.

Ограничим свое рассмотрение промежутком $0 \leq (Bx + \alpha_0) < \pi/2$. Другими словами, точка сингулярности (то есть когда конформный множитель обращается в нуль, а давление и плотность энергии – в бесконечность) в нашей модели будет соответствовать

$$x_0 = 1/S_0 = \frac{(\pi/2 - \alpha_0)}{B}. \tag{3.8}$$

При стремлении x к нулю ($S \to \infty$) конформный множитель естественным образом стремится к единице.

При этом для сравнения с наблюдательными данными о плотностях вещества и излучения в современную эпоху мы должны связать координатную переменную S с собственным (физическим) временем

$$\tau = \int\limits_{S_0}^{S} u_\mu dx^\mu = \int\limits_{S_0}^{S} y^2 dS = \left(1 + A^2/B^2\right)\int\limits_{S_0}^{S}\cos^2\left(\frac{B}{S} + \alpha_0\right)dS = -\frac{B}{\cos^2\alpha_0}\int\limits_{\pi/2}^{\varphi}\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi - \alpha_0}\right)^2 d\varphi, \tag{3.9}$$

Нетрудно видеть, что асимптотически $\tau \approx S$. Вместе с тем, разлагая давление и плотность энергии в ряд по степеням x (или $(1/S)$) с точностью $O(x^5)$, получаем

$$\varkappa p \approx 4B^2x^4; \tag{3.10}$$

$$\varkappa\varepsilon \approx 12Ax^3(1 + 6Ax) + 12B^2x^4 = \varkappa\varepsilon_{dust} + \varkappa\varepsilon_{rad}, \tag{3.11}$$

где $\varkappa\varepsilon_{rad} = 3\varkappa p$ – плотность энергии ультрарелятивистского состояния материи, а $\varkappa\varepsilon_{dust}$ – плотность энергии некогерентной пыли, совпадающая в этом приближении с асимптотикой плотности энергии фридмановского решения (см. (2.10)).

Отсюда ясно, что постоянные A и B определяют вещество и излучение соответственно. Плотность энергии при этом асимптотически распадается на прямую сумму плотности энергии пыли и плотности энергии равновесного излучения (3.11). Причем уравнение состояния совпадает (в этом приближении) с уравнением состояния ультрарелятивисткого газа, что нетрудно получить, разлагая в ряд функцию состояния (3.6).

Но если постоянная B отвечает за наличие излучения в модели, то устремляя ее к нулю, мы должны получить в пределе решение Фридмана. Действительно, в предельном случае $B \to 0$ получаем решение Фридмана (2.9) и тем самым убеждаемся, что постоянная A из (3.3) как раз и есть фридмановская постоянная, о которой упоминалось в предыдущем разделе.

$$\lim_{B\to 0}\left(\sqrt{(1 + A^2/B^2)}\cos\left(\frac{B}{S} + \alpha_0\right)\right) = 1 - A/S = 1 - Ax. \tag{3.12}$$

Если теперь разложить выражение (3.2) для функции y в ряд по степеням x вблизи точки $x = 0$ и ограничиться точностью $O(x^3)$, то получим фактически выражение (2.13),

$$y(x) \approx 1 - Ax - \frac{B^2x^2}{2}, \tag{3.13}$$

при условии, что $a = B^2$.

Таким образом, выбор потенциала (3.1) привел к обобщению рассмотренного ранее случая.

Следовательно, обсуждаемое решение (3.2), (3.3) является точным решение уравнений Эйнштейна, описывающим стадии эволюции Вселенной, когда имеются вещество и излучение. Однако такой вывод следует из асимптотических выражений. Что же касается более раннего поведения модели, то необходимо исследовать, в частности, отношение давления к плотности энергии, которое при фиксированном S представляет собой уравнение состояния в малой окрестности данного значения S.

4. Заключение

В работе рассмотрена возможность получения точных космологических решений уравнений Эйнштейна для открытой Вселенной путем сведения проблемы к эквивалентной задаче по движению массивной частицы в силовом поле. Рассматриваемая космологическая модель заполнена материей в приближении идеальной жидкости с отличным от нуля давлением. Метрика четырехмерного пространства-времени выбирается в форме Фока как метрика, конформная метрике Минковского с зависимостью от одной переменной, квадрат которой есть произведение опережающего и запаздывающего времен.

Использование механической интерпретации для одного из двух уравнений тяготения приводит к возможности рассмотрения различных силовых полей из механики, в частности потенциальных, с последующей физической интерпретацией получаемых точных космологических решений.

Прежде всего рассматривается движение свободной частицы единичной массы (механическая сила отсутствует), то есть частица движется по инерции. Четвертая степень найденного закона движения при учете галилеевости пространства-времени есть конформный множитель космологической метрики. Этот случай соответствует точному космологическому решению без давления, совпадающему с известным решением Фридмана для открытой Вселенной.

Затем рассматривается силовое поле, приводящее к равнозамедленному движению частицы, то есть выбирается соответствующий силовой потенциал в виде линейной функции, тангенс угла наклона графика которой совпадает с ускорением частицы. Такое исследование заканчивается записью точного космологического решения, асимптотически описывающего как некогерентную пыль, так и ультрарелятивистскую материю, которую можно было бы на асимптотике интерпретировать как равновесное излучение.

Далее в качестве потенциала выбирается квадратичная функция без линейного члена. Такой потенциал можно интерпретировать как потенциал свободного осциллятора отвечающего линейной по смещению силе (силе Гука). Решение соответствующего уравнения движения записывается в виде функции косинуса с некоторой начальной фазой, связанной с отношением параметров, определяющих пылевидную и ультрарелятивистскую материю. Этот вывод становится очевиден после асимптотического рассмотрения давления и плотности энергии. Кроме того, разложение в ряд корня четвертой степени из конформного множителя асипмтотически совпадает с законом равнозамедленного движения предыдущего случая, что указывает на частный его характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фридман А.А. О кривизне пространства // ЖРФХО, часть физич. 1924/25. Т. 56. Вып. 1. С.59–68.
2. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной // УФН. 1963. Т. 80. Вып. 3. С.447–452.
3. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
5. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.
6. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.
7. Баранов А.М. Конформно-галилеева 4-метрика и кинеметрические системы отсчета // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.1. С.37–43.
8. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
9. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.
10. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности // ДАН СССР. 1956. Т.107. № 6. С. 815–818.
11. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты. Rehoboth, New Mexico: Amer. Research Press, 2006. 227 с.
12. Зельманов А.Л. Ортометрическая форма монадного формализма и ее отношение к хронометричесим и кинеметрическим инвариантам // ДАН СССР. 1976. Т.227. С.78–81.
13. Мицкевич Н.В. Системы отсчета и конструктивный подход к наблюдаемым в общей теории относительности // Эйнштейновский сборник, 1971. М.: Наука, 1972. С.67–87.

14. Зельманов А.Л. Кинеметрические инварианты и их отношение к хронометрическим инвариантам в теории тяготения Эйнштейна // ДАН СССР. 1973. Т.209. № 4. С. 822–825.
15. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоская открытая модель Вселенной с произвольной функцией состояния // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №.4. С.22–27.
16. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена // Изв.вузов (Физика). 1984. №7. С. 32–35.
17. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times // Russ. Phys. J. 1984. – V. 27. – No 7. – P.569–572.
18. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модель открытой Вселенной с переменным уравнением состояния // Изв.вузов (Физика). 1994. №1. С.89–94.
19. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state // Russ. Phys. J. 1994. V. 37. №1. P. 80–84.
20. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модели открытых Вселенных с переменным уравнением состояния вблизи сингулярности / Изв.вузов (Физика). 1994. №7. С.51–55.
21. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity // Russ. Phys. J. 1994. V. 37. №7. P. 640–644.
22. Баранов А.М., Жабрун И.В., Савельев Е.В. Точное решение для открытой Вселенной с вязкостью // Известия вузов (Физика). 1995. №1. С. 79–83.
23. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity // Russ. Phys. J. 1995. V. 38. №1. P. 68–71.

Поступила в редакцию 01.04.2014

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева,
660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89 ;
Сибирский государственный технологический университет, 660049, Россия, г.Красноярск, пр.Мира, 82.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Савельев Евгений Викторович, к. ф.-м. н., доцент,
ООО «ПРОФИЛЬ - 2С», 123060, Москва, 1-ый Волоколамский проезд, 15/16
E-mail: editor@stfi.ru

A. M. Baranov, Eu. V. Saveljev

Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field

Keywords: open cosmological models, particle, Newton's equation, function of state.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

The problem reduction of an evolution modelling of the open Universe for conformally flat space-time metric in Fock's form to an equivalent problem of a particle movement with mass in a force field is demonstrated. The exact cosmological models filled with a substance and radiation in an approximation of the perfect fluid are found since the Friedman solution by an introduction of set "mechanical"potentials.

In the article possibility of deriving of exact cosmological solutions of the Einstein equations for the open Universe by the reducing problem to the equivalent problem of a mass particle's movement in the force field is considered. The cosmological model is filled by substance in the approximation of perfect fluid with nonzero pressure, generally speaking. The metric of four-dimensional space-time is taken in the Fock form as metric, conformal to the Minkowski metric. This metric has dependence on one variable. A square of this variable is product of advanced and retarded times.

The using of mechanical interpretation of the gravitation equations leads to possibility of consideration of various mechanical force fields with the subsequent physical interpretation of the found exact cosmological solutions.

First of all movement of the free particle with an unit mass (mechanical force is absent) is considered, that is to say the particle moves on inertia. The fourth degree of discovered law of movement is a conformal factor of cosmological metric which is conformally-flat. This case corresponds to the exact cosmological solution without pressure, coinciding with known the Friedman solution for the open Universe.

After that the force field leading to uniformly delayed movement of particle is considered. The force potential is taken in the form of linear function. The tangent of a slope angle of the function diagramme coincides with particle acceleration. Such research leads to the exact cosmological solution asymptotically describing both an incoherent dust, and the ultrarelativistic substance which could be interpreted as an equilibrium radiation.

Further a square-law function without a linear term is taken as the potential. Such potential can be interpreted as potential of the free oscillator. The solution of corresponding equation of motion is written in the form of a cosine function with some initial phase related to the ration of parameters, defining dustlike and ultrarelativistic substances. This conclusion becomes obvious after asymptotic considering of pressure and energy density. Besides, the series development of a root of the fourth degree from conformal factor asymptoticly coincides with the law of uniformly delayed movement of the previous case that specifies in its private character.

REFERENCES

1. Friedman A.A. Über die Krümmung des Raumes, *Z. Phys.*, 1922, vol. 10, Lief., no. 6, pp.377–387.

2. Friedman A.A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, *Z. Phys.*, 1924, vol. 21, Lief., no. 1, pp.326–333.

3. Petrov A.Z. *New Methods in General Relativity*, Moscow: Nauka, 1966, 495 p. (in Russian).

4. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The classical Theory of Fields*, Moskow: Nauka, 1988 (in Russian).

5. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).

6. Mitskievich N.V. *Physical Fields in General Relativity*, Moskow: Nauka, 1969, 563 p. (in Russian).

7. Baranov A.M. Conformally Galilean 4-metric and Kinemetric Reference Frames, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2013, no.1, pp.37-43.

8. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.(in Russian)

9. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

10. Zelmanov A.L. Chronometric Invariants and co-moving coordinates in general relativity, *DAN USSR*, 1956, vol.107, no.6, pp. 815–818.

11. Zelmanov A. *Chronometric Invariants. Dissertation, 1944*. Rehoboth, New Mexico: Amer.Research Press, 2006. 233 p.

12. Zelmanov A.L. Orthometric Form Of Monadic Formalism And Its Relation To Chronometric And Kinemetric Invariants, *DAN USSR*,1976, vol.227, no.1, pp.78–81.

13. Mitskievich N.V. Reference frames and the constructional approach to observed magnitudes in general relativity, *Einstein collected book, 1971*, Moscow: Nauka, 1972. pp.67–87.

14. Zelmanov A.L. Kinemetric Invariants And Their Relation To Chronometric Invariants Of Einstein Theory Of Gravity, *DAN USSR*, 1973, vol.209, no.4, pp. 822–825.

15. Baranov A.M. Saveljev E.V. Conformally flat model of the open Universe with an arbitrary function of state, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2013, no.1, pp.22-2-7.

16. Baranov A.M. Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1984, no.7, pp. 32–35.

17. Baranov A.M. Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Russ. Phys. J.*, 1984, vol.27, no.7, pp. 569–572.

18. Baranov A.M. Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1994, no. 1, pp. 89–94.

19. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Russ. Phys. J.*, 1994, V. 37, no. 1, pp. 80–84.

20. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1994, no. 7, pp. 51–55.

21. Baranov A.M. Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Russ. Phys. J.*, 1994, vol.37, no.7, pp.640–644.

22. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1995, no. 1, pp. 79–83.

23. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Russ. Phys. J.*, 1995, V. 38, no. 1, pp. 68–71.

Received 01.04.2014

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev,
89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Siberian State Technological University, 82 Mira Av., Krasnoyarsk, 60049, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Saveljev Eugene Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor,
OOO "PROFILL - 2S 15/16 1-st Volokolamsk passage, Moscow, 123060, Russia.
E-mail: editor@stfi.ru