УДК 514.824;511.84;530;145

А. П. Ефремов[1]

ПРЕДГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР И КВАТЕРНИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СРЕДА ОБИТАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ

Работа имеет обзорный характер и представляет собой первую (математическую) часть комплексного исследования. В компактной форме даны сведения об алгебрах гиперкомплексных чисел (и поличисел) с ассоциативным умножением: кватернионов, бикватернионов, двойных и дуальных чисел. Показано, что единицы всех этих алгебр, а также алгебр действительных и комплексных чисел могут быть представлены как квадратичные комбинации двумерных векторов локального базиса, определенного на некоторой фундаментальной поверхности. Приведены также основные соотношения дифференциальной геометрии кватернионных пространств.

Ключевые слова: гиперкомплексные числа, базовая поверхность, спиноры, кватернионные пространства.

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

Введение

Цель настоящей работы – в концентрированной форме представить результаты более чем 30-летней работы автора по изучению математики гиперкомплексных чисел и их взаимосвязи с формулировкой физических законов. При этом имеется в виду отнюдь не методическая процедура записи известных законов в новом формате, а поиск и анализ таких имманентно присущих данной математической среде соотношений, которые встречаются в физической науке в виде эмпирических или эвристических формулировок или имеют сходные с ними черты.

Выделенной в этом смысле оказывается математика кватернионов – чисел, удовлетворяющих соотношениям последней по размерности ассоциативной – но уже некоммутативной – алгебре с делением. Исследования предыдущих лет показали удивительное сходство целого ряда формул этой математики с известными «точными» («нестатистическими») законами физики. Возможной причиной этого, вероятно, является почти сверхъестественная «геометричность» кватернионной математики. Детальный анализ показал, что эта математика естественным образом несет в себе не только привычные черты трехмерного физического мира, но, как представляется, и «более фундаментальных», «догеометрических» структур, которые также допускают визуальное представление, облегчая тем самым восприятие и понимание таких абстрактных разделов физики как аналитическая и квантовая механика.

Более того, наличие точных математических соотношений, имеющих внятный геометрический смысл, дает (с известной степенью успеха) шанс вносить коррекцию в формулировки соотношений физики и выстраивать соответствующие модели, в том числе, отличные от традиционных.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приведены общие сведения о гиперкомплексных числах с акцентом на соотношения и специфические черты кватернионной математики, Помимо этого, дано краткое описание бикватернионов и двух известных ассоциативных поличисловых алгебр: двойных и дуальных чисел. В разделе 2 с высокой степенью детализации представлена процедура введения фундаментальной предгеометрической поверхности, единственный локальный базис которой (диада) служит основой для определения единиц всех ассоциативных алгебр. Здесь же введено понятие локальной двумерной (2D) ячейки фундаментальной поверхности и предложен оригинальный вариант геометрического образа комплексного числа (в виде «конической пары»). Подробно исследовано условие сохранения (стабильности) умножения рассматриваемых ассоциативных алгебр при простейших преобразованиях (вращение и растяжение) 2D ячейки. В разделе 3 даны основные сведения о дифференциальной геометрии кватернионных пространств, включая свойства инвариантности векторных кватернионов (и бикватернионов) относительно допустимых преобразований единиц соответствующих алгебр.

[1] E-mail: a.yefremov@rudn.ru

1. Общие сведения о гиперкомплексных числах

Для описания результатов физических экспериментов, имеющих дело с реальными объектами и измеряемыми величинами, традиционно (и обоснованно) используются действительные числа. В то же время комплексные числа активно используются «на промежуточном» вычислительном уровне в целом ряде физических теорий, сформулированных в XX веке и актуальных сегодня. К таковым относятся квантовая механика, классическая теория фермионных полей, квантовая теория поля и др.; определенная тенденция к применению комплексных чисел наметилась даже в классической теории гравитации.

Алгебры действительных и комплексных чисел хорошо изучены и по свойствам похожи: это коммутативные и ассоциативные (по умножению) алгебры с делением, хотя два этих множества чисел базируются на различном числе единиц. Известны и соответствующие геометрические образы, для действительных чисел – это непрерывная бесконечная линия, для комплексных чисел бесконечная или конечная (сфера Римана) поверхность. Впрочем, ниже будет показано, что детальное изучение структуры мнимых единиц приводит к еще одному – весьма нетрадиционному – образу комплексного числа в виде «конической пары».

Гиперкомплексными естественно называть числа, имеющими большее число базовых единиц, чем числа комплексные. К таким числам обычно относят числа, подчиненные «хорошим» алгебрам: кватернионы, имеющие четыре базовые единицы, и октонионы (алгебра Кэли), базирующиеся на восьми единицах. Однако в сегодняшней научной литературе к гиперкомплексным зачастую относят и специфические поличисла с двумя базовыми единицами (дуальные и двойные числа), а также бикватернионы, построенные на кватернионных единицах, но с комплексными коэффициентами.Четыре «хорошие» алгебры – действительных, комплексных, кватернионных и октонионных чисел иногда называют исключительными. Размерность этих алгебр задается числом базовых единиц, ее можно представить показательным рядом с основанием 2 и целым показателем степени.

Алгебра	Размерность алгебры $n = 2^p$	Показатель степени p
Действительные числа	$1 = 2^0$	0
Комплексные числа	$2 = 2^1$	1
Кватернионы	$4 = 2^2$	2
Октонионы	$8 = 2^3$	3

Здесь особое внимание будет уделено кватернионам.

1.1. Кватернионы

Кватернион (в декартовой гамильтоновой форме) – это математический объект вида $q = a + b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$, где a, b, c, d – действительные числа, причем a есть множитель действительной единицы 1 (обычно опускается в записи), величины $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – три разные мнимые единицы: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$. Для кватернионных единиц постулированы такие правила умножения

$$1\mathbf{i} = \mathbf{i}1 = \mathbf{i}, \quad 1\mathbf{j} = \mathbf{j}1 = \mathbf{j}, \quad 1\mathbf{k} = \mathbf{k}1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}; \qquad (1)$$

видно, что умножение, вообще говоря, некоммутативно. Таким образом, полная таблица умножения кватернионных единиц (вместе с $1^2 = 1$) постулируется в виде 16 равенств. Запись кватернионных соотношений в гамильтоновой форме громоздка; она более компактна при задании мнимых единиц в векторной форме $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \to \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 \to \mathbf{q}_k$, где строчные латинские индексы принимают значения $j, k, l, m, n... = 1, 2, 3$. Тогда кватернион общего вида есть сумма скалярной (a) и векторной ($b_k\mathbf{q}_k$) частей $q \equiv a + b_k\mathbf{q}_k$, $a, b_k \in \mathbf{R}$, а таблица умножения (1) записывается короче

$$1\,\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k 1 = \mathbf{q}_k, \quad \mathbf{q}_k\mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj}\mathbf{q}_j; \qquad (2)$$

здесь по повторяющимся индексам есть суммирование, δ_{kl}, ε_{jkl}, – 3D-символы Кронекера и Леви-Чивиты.

С кватернионами возможно осуществлять те же действия, что и с комплексными числами. Сравнение кватернионов сводится лишь к определению их равенства: два кватерниона равны, если равны их коэффициенты при каждой из единиц. Сложение (вычитание) кватернионов осуществляется покомпонентно: складываются (вычитаются) коэффициенты при каждой единице. Операция сложения перестановочна. Умножаются кватернионы как многочлены, но с учетом таблицы умножения (1) или (2); умножение некоммутативно, поэтому есть правое и левое произведения.

Как и для комплексных чисел, для кватернионов вводится операция сопряжения.

Всякому кватерниону $q = a + b_k\mathbf{q}_k$ можно поставить в соответствие сопряжённый ему кватернион $\bar{q} \equiv a - b_k\mathbf{q}_k$. Произведение кватерниона на сопряжённый есть действительное число – норма $q\bar{q} = |q|^2$; арифметический квадратный корень из нормы называют модулем кватерниона $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b_kb_k}$. Отсюда следует выражение для кватерниона, обратного исходному $q^{-1} = \bar{q}/\,|q|^2$. Таким образом, для двух кватернионов q_1 и q_2 возможно определить деление, которое, как и умножение может быть правым и левым $(q_1/q_2)_{right} = q_1\bar{q}_2/\,|q_2|^2$, $(q_1/q_2)_{left} = \bar{q}_2q_1/\,|q_2|^2$.

Если кватернион q представляет собой произведение сомножителей $q_1 = a+b_k\mathbf{q}_k$ и $q_2 = c+d_k\mathbf{q}_k$, то из определения нормы следует

$$|q|^2 = |q_1q_2|^2 = (q_1q_2)\overline{(q_1q_2)} = q_1q_2\bar{q}_2\bar{q}_1 = q_1\bar{q}_1q_2\bar{q}_2 = |q_1|^2\,|q_2|^2\,, \tag{3а}$$

т.е. модуль произведения кватернионов равен произведению модулей сомножителей. В развернутом виде – это известное тождество четырёх квадратов: норма произведения равна произведению норм, или (читая справа налево) произведение суммы четырёх квадратов на сумму четырёх квадратов есть снова сумма четырёх квадратов

$$(ac-b_1d_1-b_2d_2-b_3d_3)^2+(ad_1+cb_1+b_2d_3-b_3d_2)^2+(ad_2+cb_2+b_3d_1-b_1d_3)^2+(ad_3+cb_3+b_1d_2-b_2d_1)^2 =$$

$$= (a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c^2 + d_1^2 + d_2^2 + d_3^2). \tag{3б}$$

Здесь стоит напомнить, что «тождества квадратов» существуют лишь в четырех алгебрах: в алгебре действительных чисел (где оно тривиально), в алгебре комплексных чисел (тождество двух квадратов), в алгебре кватернионов (тождество четырех квадратов) и в алгебре октонионов (тождество восьми квадратов). В теореме Фробениуса-Гурвица (см., например, [1]) доказано, что эти четыре алгебры составляют все множество числовых алгебр с делением. Но если алгебра комплексных чисел по свойствам не отличается от алгебры действительных чисел, то алгебра кватернионов (некоммутативное кольцо) теряет коммутативность, оставаясь ассоциативной по умножению, а алгебра октонионов по умножению не только не коммутативна, но и не ассоциативна (ассоциативность заменяется ослабленным свойством – альтернативностью) [2, 3].

1.2. Кватернионы и геометрия

Хотя удовлетворительный геометрический образ всего множества кватернионов (как поверхность – для комплексных чисел) пока не найден, некоторые кватернионные числа можно трактовать с геометрических позиций. Так, например, унимодулярный кватернион со скалярной и векторной частью может быть сопоставлен с дугой большого круга сферы [4].

Однако наиболее характерно геометрическое представление векторных кватернионов. Достаточно заметить, что произведение двух таких кватернионов $\mathbf{a} = a_k\mathbf{q}_k$, $\mathbf{b} = b_k\mathbf{q}_k$

$$\mathbf{ab} = a_kb_n\mathbf{q}_k\mathbf{q}_n = -a_kb_k + \varepsilon_{knm}a_kb_n\mathbf{q}_m$$

в скалярной части содержит выражение, похожее на скалярное произведение двух векторов в декартовых координатах, а в векторной части – выражение, похожее на векторное произведение, т.е. мнимые кватернионные единицы «ведут себя» как направляющие векторы правой декартовой системы координат, а коэффициенты при них как компоненты вектора в этой системе координат. Именно эта интерпретация, данная векторным кватернионам еще Гамильтоном, дала толчок развитию векторной алгебры Хэвисайдом и Гиббсом.

Несложно видеть, что скалярная единица здесь определенного геометрического образа не имеет, хотя общее число размерностей кватернионной алгебры (четыре) и выделенность одной (действительной) размерности, казалось бы, провоцируют интерпретировать коэффициенты при кватернионных единицах как компоненты физического объекта в четырехмерном пространстве-времени. Однако такая эвристическая интерпретация оказывается физически не слишком плодотворной, поскольку с системой отсчета можно связать лишь векторные единицы кватернионной алгебры, и «естественная» теория относительности успешно строится в алгебре бикватернионов.

Кватернионы оказались связанными с иной геометрией; недавние исследования показали, что эти числа (а также другие обсуждаемые здесь числа с ассоциативным умножением) базируются на мощном «пред-геометрическом» фундаменте – базисной двумерной поверхности, «подлежащей» под геометрией трехмерного пространства.

1.3. Поличисла и бикватернионы

Помимо трех типов числовых объектов, формирующих «хорошие» ассоциативные (по умножению) алгебры действительных, комплексных и кватернионных чисел, существуют также три типа различных объектов, составляющих также ассоциативные по умножению алгебры, но обладающие рядом «недостатков». К ним относятся двойные числа, дуальные числа и бикватернионы. В силу того, что эти объекты иногда находят применение для описания физических структур, полезно кратко описать их свойства, тем более что в некоторых работах эти три вида чисел рассматриваются как принадлежащие трем независимым замкнутым множествам.

Двойные числа (split-complex numbers, hyperbolic numbers, tessarines, motors,) [5-8] вида $s = x \cdot\ 1 + y \cdot j$ (или просто $s = x + jy$, где x, y – произвольные действительные числа) подобно комплексным числам строятся на двух базисных единицах $1, j$, но квадрат каждой из них есть действительная единица $1^2 = 1$, $j^2 = 1$, притом что $1 \cdot j = j \cdot 1 = j$.

Числа этого множества допускают большинство действий, свойственных алгебре комплексных чисел: сложение, коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение, сопряжение $s^* = x - jy$, для них можно определить «норму» $\|s\|^2 \equiv ss^* = x^2 - y^2$; последнее соотношение иногда ассоциируется с 2D-метрикой Минковского и соответствующими преобразованиями Лоренца [8]. При $\|s\| = 1$ для двойных чисел возникает аналог формулы Эйлера $e^{j\eta} = \cosh\eta + j\sinh\eta$, где $x = \cosh\eta$, η – параметр гиперболического поворота. Однако понятно, что величина $\|s\| = \sqrt{\|s\|^2}$ (аналог модуля) может быть не определена как действительное число, а также может быть равной нулю; последнее влечет за собой дефект обратимости, следовательно, дефект делимости двойных чисел. Геометрически двойное число может быть представлено как вектор на 2D-поверхности (плоскости). Тогда два простых сопряженных вектора $e = (1 + j)/2$, $e^* = (1 - j)/2$ ортогональны $ee^* = 0$ и идемпотентны $e^N = e, e^{*N} = e$ (N – натуральное число), они формируют ортогональный базис любых двойных чисел $s = (x + y)e + (x - y)e^*$. Число $s = x + jy$ может быть представлено простейшей 2×2-матрицей $s = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, при этом $\|s\|^2 = \det s$. Данное представление, конечно, не является единственным, эта тема будет рассмотрена ниже.

Дуальные числа (параболические числа) $d = x \cdot 1 + y \cdot \varepsilon$ (или просто $d = x + \varepsilon y$, где x, y – действительные числа) [9–11] также строятся на двух единицах $1, \varepsilon$, первая из которых – действительная (обыкновенный скаляр) $1^2 = 1$, а вторая – нильпотентна $\varepsilon^2 = 0$, притом что $1 \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. Множество дуальных чисел также допускает действия, свойственные комплексным числам: сложение, коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение, сопряжение вида $d^* = x - \varepsilon y$. Норма дуального числа $\|d\|^2 = d \cdot d^* = (x + \varepsilon y)(x - \varepsilon y) = x^2$ совпадает с нормой его действительной части, следовательно, норма дуального числа вида $d = \varepsilon y$ исчезает, что, как и в случае двойных чисел, приводит к дефекту обратимости и делимости. Однако дуальные числа обладают любопытным свойством: нильпотентная единица ε может рассматриваться как бесконечно малый параметр, что позволяет представить полный ряд Тейлора некоторой функции всего двумя членами. Так, дуальное число с единичной нормой ($x = 1$) есть полный ряд разложения экспоненты $e^{\varepsilon y} = 1 + \varepsilon y$, представляющей дуальный аналог формулы Эйлера, в которой компонента $''y''$ играет роль углового параметра. Несложно видеть, что экспонента вида $e^{\varepsilon t}$ (где t – некоторый параметр) является оператором «параболического поворота» произвольного дуального числа $d = x + \varepsilon y$, результатом действия этого оператора является трансляция $e^{\varepsilon t} d = x + \varepsilon(y + xt)$, что позволяет связывать дуальные числа с группой Галилея в физике. В литературе предлагаются следующие простейшие 2×2-матричные представления дуальных чисел $d^{\uparrow} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, или $d^{\downarrow} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$; понятно, что эти представления не единственны, о чем также будет сказано ниже.

Наконец, бикватернионами [12–14] называют числа вида $b = x \cdot 1 + y_k \cdot \mathbf{q}_k$ (или просто $b = x + y_k \mathbf{q}_k$), где x, y_k (скалярная и векторная компоненты) принадлежат множеству комплексных чисел, а единицы $1, \mathbf{q}_k$ подчинены закону умножения кватернионов (2). Бикватернионы допускают алгебраическое сложение, некоммутативное, ассоциативное и дистрибутивное (по сложению) умножение и сопряжение, аналогичное кватернионному $\bar{b} = x - y_k \mathbf{q}_k$. Но последняя операция не позволяет удовлетворительно определять норму числа, поскольку произведение $b\bar{b} = (x + y_k \mathbf{q}_k)(x - y_m \mathbf{q}_m) = x^2 + y_k y_k$, вообще говоря, не является действительным (и положительным) числом. Норма как действительное число определяется лишь для некоторых подмножеств бикватернионов, в частности, для таких чисел, которые содержат взаимно ортогональные действительные и мнимые векторные части: $b = y_k \mathbf{q}_k$, $y_k = w_k + i z_k$, $w_k z_k = 0$, тогда $\|b\|^2 = b\bar{b} = w_k w_k - z_k z_k$. При этом, как и в общем случае, среди значений нормы могут оказаться делители нуля, то есть присутствует дефект обратимости (делимости). В последующих работах будет показано, что подмножество именно таких векторных бикватернионов содержит все основные соотношения теории относительного движения произвольно движущихся систем отсчета [15]. Представления бикватернионов наиболее часто реализуется с помощью матриц Паули $\mathbf{p}_k$: $\mathbf{q}_k = -i\mathbf{p}_k$, $b = \begin{pmatrix} x - iy_1 & -y_3 - iy_2 \\ y_3 - iy_2 & x + iy_1 \end{pmatrix}$. Несложно показать, что двойные и дуальные числа составляют подмножества бикватернионов специального вида [16].

Поскольку до последнего времени не известны физические величины, не ассоциативные по умножению, элементы математики октонионов в данной работе рассматриваться не будут.

2. Предгеометрические объекты и базис ассоциативных алгебр

2.1. Базовая предгеометрическая поверхность, диада и производные объекты

Пусть есть гладкое двумерное (2D) пространство (поверхность), наделенное метрикой g_{AB} (существует ей обратная: $g^{BC} \to g_{AB} g^{BC} = \delta_A^C$) и системой координат $x^A = \{x^1, x^2\}$; здесь $A, B, C... = 1, 2$, δ_C^A – 2D-символ Кронекера, есть суммирование по повторным индексам. Линейный элемент поверхности имеет вид

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B; \tag{4}$$

метрика может быть неевклидовой, так что различие ковариантных и контравариантных компонент объектов существенно. В заданной точке такой поверхности всегда можно выбрать пару единичных ортогональных векторов a^A, a^B (диаду)

$$g_{AB} a^A a^B = g_{AB} b^A b^B = 1, \tag{5}$$

$$g_{AB} a^A b^B = a^A b_A = a_A b^A = 0. \tag{6}$$

Окрестность данной поверхности вместе с касательной к ней (в начале диады) плоскостью с декартовой метрикой $\delta_{MN} = \delta^{MN} = \delta_M^N$ будет называться предгеометрической 2D-ячейкой (2D-cell); здесь и далее индексы $L, M, N... = 1, 2$ описывают компоненты объектов в касательной плоскости.

Оказывается полезным рассмотреть прямые (тензорные) произведения векторов диады со смешанными компонентами [17]; эти объекты являются 2×2-матрицами. Таких матрицы, составленных из компонент разных векторов всего две

$$D_B^A \equiv a^A g_{BC} b^C = a^A b_B, \tag{7}$$

$$F_B^A \equiv b^A g_{BC} a^C = b^A a_B, \tag{8}$$

они несимметричны и, в силу условий (5), (6), имеют равный нулю след и определитель. Квадраты матриц (7) и (8) также равны нулю, то есть эти матрицы нильпотентны

$$D^2 = D_B^A D_C^B = 0, \quad F^2 = F_B^A F_C^B = 0.$$

Взаимные произведения нильпотентов (7) и (8) порождают две новые 2×2-матрицы – прямые произведения компонент каждого из векторов диады

$$G_C^A \equiv D_B^A F_C^B = a^A a_C, \tag{9}$$

$$H_C^A \equiv F_B^A D_C^B = b^A b_C. \tag{10}$$

Матрицы G и H симметричны, имеют единичный след и равный нулю определитель. Квадрат каждой из этих матриц равен ей самой, то есть объекты (9), (10) – идемпотентны

$$G^2 \equiv G^A_B G^B_C = G^A_C, \tag{11}$$

$$H^2 \equiv H^A_B H^B_C = H^A_C. \tag{12}$$

Притом матрицы G и H взаимно ортогональны

$$GH \equiv G^A_B H^B_C = 0, \quad HG \equiv H^A_B G^B_C = 0.$$

Итак, наличие диады на некоторой поверхности позволяет определить два (базовых) нильпотентных объекта D и F, и два (производных) идемпотентных объекта G и H, представимых в форме 2×2-матриц. Этим все множество прямых произведений векторов диады исчерпывается.

2.2. Единицы ассоциативных алгебр как функции векторов базисной диады

Простейшие линейные комбинации (сумма и разность) определенных выше нильпотентных матриц (между собой) и идемпотентов (также между собой) оказываются содержательными математическими объектами.

Вначале лучше проанализировать сумму и разность идемпотентов. Сумма G и H

$$E \equiv E^A_B \equiv G^A_B + H^A_B = a^A a_B + b^A b_B \tag{13}$$

есть симметричная матрица, свойства которой

$$\det E = 1, \quad \mathrm{Tr} E = 2, \quad E^2 = E$$

позволяют отождествить ее с единицей множества 2×2-матриц

$$a^A a_B + b^A b_B = \delta^A_B \to E = 1; \tag{14}$$

это вполне согласуется с записью компонент метрики 2D-ячейки как функции векторов диады в голономных координатах

$$a_A a_B + b_A b_B = g_{AB}, \quad a^A a^B + b^A b^B = g^{AB}. \tag{15а}$$

В координатах касательной плоскости та же метрика имеет вид единичной матрицы

$$a_M a_N + b_M b_N = \delta_{MN}. \tag{15б}$$

Разность G и H

$$\tilde{K} \equiv \tilde{K}^A_B \equiv G^A_B - H^A_B = a^A a_B - b^A b_B \tag{16}$$

(тильда над объектом пояснена ниже) есть симметричная матрица, свойства которой

$$\det \tilde{K} = -1, \quad \mathrm{Tr}\tilde{K} = 0, \quad \tilde{K}^2 = E, \quad \tilde{K}E = E\tilde{K} = \tilde{K} \tag{17}$$

свидетельствуют, что $\tilde{K}$ также является некоторой действительной единицей, но отличной от E; это отличие проявится в умножении со следующими простейшими линейными комбинациями нильпотентов D и F.

Сумма D и F

$$\tilde{I}^A_B \equiv D^A_B + F^A_B = a^A b_B + b^A a_B \tag{18}$$

есть симметричная матрица со свойствами, аналогичными свойствам (17) матрицы $\tilde{K}$

$$\det \tilde{I} = -1, \quad \mathrm{Tr}\tilde{I} = 0, \quad \tilde{I}^2 = E, \quad \tilde{I}E = E\tilde{I} = \tilde{I},$$

то есть $\tilde{I}$ – также некоторая единичная матрица, коммутирующая с единицей E. Однако умножение единиц $\tilde{K}$ и $\tilde{I}$, во-первых, уже не коммутативно (антикоммутативно)

$$\tilde{K}\tilde{I} = \tilde{K}^A_B \tilde{I}^B_C = (a^A a_B - b^A b_B)(a^B b_C - b^B a_C) = a^A b_C - b^A a_C \equiv J^A_C \equiv J, \quad \tilde{I}\tilde{K} = -J, \tag{19}$$

а, во-вторых, результат умножения есть в точности разность нильпотентов

$$J \equiv J^A_B \equiv D^A_B - F^A_B = a^A b_B - b^A a_B. \tag{20}$$

Матрица (20) антисимметрична и имеет свойства

$$\det J = 1, \quad \mathrm{Tr} J = 0, \quad J^2 = -E, \quad JE = EJ = J, \quad J\tilde{K} = -\tilde{K}J = -\tilde{I}, \quad \tilde{I}J = -J\tilde{I} = -\tilde{K}, \tag{21}$$

т.е. J есть мнимая единица, антикоммутирующая с единицами $\tilde{K}$ и $\tilde{I}$; последнее свойство характерно для векторных гиперкомплексных единиц.

Итак, векторы одной диады своими квадратичными комбинациями порождают серию замечательных объектов: это нильпотенты D и F, антикоммутирующие между собой (векторные) единицы (мнимая единица J и действительные единицы $\tilde{K}$ и $\tilde{I}$), а также скалярная единица E, с которой коммутируют все остальные.

Данное множество объектов достаточно для построения базиса любой из перечисленных выше ассоциативных алгебр. Базис действительных чисел – единица E; базис комплексных чисел – единицы E и J; базис дуальных чисел – единицы E и D (или F); базис двойных чисел – единицы E и $\tilde{I}$ (или $\tilde{K}$). Наконец, если «подправить» единицы (16) и (17) так, чтобы циклические подстановки в парных произведениях векторных единиц давали третью единицу со знаком плюс (т.е. убрать тильду), то получается базис кватернионов (и бикватернионов) .

$$1 \equiv E, \quad \mathbf{q}_1 \equiv -i\tilde{I} \equiv I, \quad \mathbf{q}_2 \equiv J, \quad \mathbf{q}_3 \equiv i\tilde{K} \equiv K. \tag{22}$$

Из вышеизложенного следует:

1. Все единицы указанных ассоциативных алгебр (в том числе трех исключительных) могут рассматриваться как производные (составленные из) «более фундаментальных» объектов – векторов диады, определяющей свойства локальной области (2D-ячейки) некоторой (базовой) поверхности.

2. Единственным требованием к базовой поверхности является ее локальная гладкость, поэтому число матричных представлений алгебраических единиц бесконечно.

3. Скалярная единица является метрикой 2D-ячейки, в частности, декартовой метрикой плоскости, касательной (в начале диады) к базовой поверхности.

4. Если связывать кватернионную векторную триаду $\mathbf{q}_k$ с (гамильтоновым) представлением о *геометрии* локальной области физического 3D-пространства, то базовую поверхность и 2D-ячейку приходится ассоциировать с некоторым «более фундаментальным» представлением о *предгеометрии* (в частности, см. работу Уилера, предложившего этот термин [18]). При этом каждая из двух предгеометрических размерностей есть своего рода «корень квадратный» из размерности физического пространства.

5. Все 3D-пространство может быть построено из большого (бесконечного) числа 2D-ячеек, объединение таких ячеек можно рассматривать как некий «мировой экран».

2.3. Спектральная теорема, спиноры и новые обозначения

Несложно увидеть, что полученные выше соотношения некоторым образом связаны со спектральной теоремой теории матриц. Эта теорема утверждает (см., например, [19]), что любую обратимую матрицу с некратными собственными значениями можно разложить по идемпотентным матрицам-проекторам, коэффициентами при которых являются собственные значения, а проекторы суть прямые произведения элементов некоторого би-ортогонального базиса. Пример такого разложения – выражение для единицы $\mathbf{q}_3$, следующее из формул (16) и (22)

$$\mathbf{q}_3|^A_B = i a^A a_B - i b^A b_B = i G^A_B - i H^A_B; \tag{23}$$

здесь правые и левые собственные функции $\mathbf{q}_3$ – соответственно векторы a^A, b^B и ковекторы a_A, b_B диады, собственные числа $+i$ (для a) и $-i$ (для b), а G^A_B, H^A_B – проекторы.

С другой стороны, очевидно, что преобразование подобия векторных единиц

$$\mathbf{q}'_{k'} \equiv S\mathbf{q}_k S^{-1}, \tag{24}$$

где S – некоторая 2×2-матрица (компоненты которой, вообще говоря, – комплексные числа), не изменяет базовых соотношений алгебры, например, закона (2), скалярная единица при этом не изменяется. Если $detS = 1$, то $S \in SL(2, C)$, т.е. закон умножения алгебры форм-инвариантен относительно спинорной группы $SL(2, C)$, реализующей обобщенные повороты (отражения) векторов. Следовательно, все векторные единицы (22) преобразованием подобия (24) могут быть получены из одной единицы, например, из $\mathbf{q}_3$. Тогда, согласно теории матриц, все векторные единицы имеют одинаковые собственные числа $\pm i$, что легко проверить; при этом собственные функции производных единиц являются линейными комбинациями собственных функций исходной единицы [20]. Этот факт, в частности, отражает то обстоятельство, что преобразование (24) само оказывается производным, а базовым является преобразование векторов диады, представляющие собой $SL(2, C)$-спиноры (с «точки зрения» 3D-пространства, если считать, что его описывают векторы $\mathbf{q}_k$). Чтобы подчеркнуть спинорную природу диады и для упрощения дальнейших записей полезно перейти к новым матричным обозначениям, свободным от 2D-индексов

$$a^A \to \psi^+, \quad a_A \to \varphi^+, \quad b^A \to \psi^-, \quad b_A \to \varphi^-, \tag{25а}$$

индикатор четности «+» или «−» указывает знак собственного числа $+i$ или $-i$. Тогда условия нормировки (5) и ортогональности (6) векторов диады приобретают вид

$$\varphi^\pm\psi^\pm = 1, \quad \varphi^\mp\psi^\pm = \varphi^\pm\psi^\mp = 0, \tag{25б}$$

нильпотентные и идемпотентные матрицы переобозначаются так

$$N^+ \equiv D = \psi^+\varphi^-, \quad N^- \equiv F = \psi^-\varphi^+, \quad C^+ \equiv G = \psi^+\varphi^+, \quad C^- \equiv H = \psi^-\varphi^-,$$

а матричные единицы (22) переписываются следующим образом

$$1 = C^+ + C^- = \psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-, \tag{26а}$$

$$\mathbf{q}_1 = -i(N^+ + N^-) = -i(\psi^+\varphi^- + \psi^-\varphi^+), \tag{26б}$$

$$\mathbf{q}_2 = N^+ - N^- = \psi^+\varphi^- - \psi^-\varphi^+, \tag{26в}$$

$$\mathbf{q}_3 = i(C^+ - C^-) = i(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-). \tag{26г}$$

Понятно, что базовое преобразование спиноров (записанное в новых обозначениях)

$$\psi'^\pm = S\psi^\pm, \quad \varphi'^\pm = \varphi^\pm S^{-1}, \tag{27}$$

при учете соотношений (26) имеет своим следствием преобразование подобия (24).

2.4. «Коническая передача» – образ комплексного числа в матричной форме

Примитивная предгеометрия базовой 2D-ячейки и представление алгебраических единиц как матричных величин, составленных из векторов диады, позволяют строить новые визуальные образы даже известных величин. Полезной иллюстрацией служит модель комплексного числа в матричной форме

$$z \equiv x + y\mathbf{q}_3 = x(\psi^+\varphi^+ + \psi^-\varphi^-) + iy(\psi^+\varphi^+ - \psi^-\varphi^-) = r\mathrm{e}^{i\alpha}C^+ + r\mathrm{e}^{-i\alpha}C^-, \tag{28}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\alpha = y/x$; мнимая единица представлена здесь вектором $\mathbf{q}_3$, но это может быть любая из единиц $\mathbf{q}_k$, ибо каждая такая единица допускает разложение типа (26г). Соотношение (28) показывает, что в матричной форме число z содержит одновременно некоторое комплексное число и ему сопряженное; эти компоненты расположены на двух комплексных плоскостях, «направляемых» проекторами C^+ и C^-, следовательно, ортогональных друг другу. Часть каждой из этих плоскостей, ограниченная радиусом r, есть диск; поворот одного диска на угол α сопровождается поворотом второго на угол $-\alpha$.

Этим свойствам вполне удовлетворяет модель «конической пары» [20], имеющей две одинаковые взаимно перпендикулярные «шестерни», которые могут вращаться без скольжения на ортогональных осях, сходящихся к некоторой центральной точке. Если в этой точке расположить начало диады, сопоставив направления осей с направлением ее векторов, то проекторы C^+ и C^- визуализируются в виде потоков векторов ψ^+ и ψ^-.

Иным (но связанным) образом комплексного числа (28) является собственно пара осей «конической пары», каждая из которых, имея длину r, также снабжена флагом (типа флага Пенроуза [21]), указывающим фазу $\pm\alpha$, т.е. отклонение радиуса диска от задаваемого осями действительного сечения.

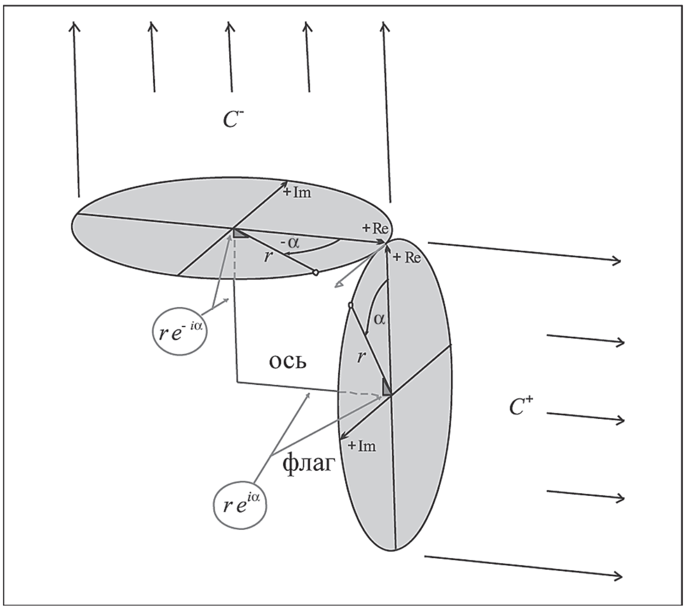

Рис. 1

В частном случае унимодулярного комплексного числа поворот конической пары может ассоциироваться с простейшим фазовым преобразованием спиноров типа преобразования (27)

$$\psi'^{\pm} = \mathrm{e}^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}, \quad \varphi'^{\pm} = \mathrm{e}^{\mp i\alpha}\varphi^{\pm}; \tag{29}$$

в этом случае 3D-вектор $\mathbf{q}_3$ внешне не изменяется, тогда как остальные два вектора новой триады $\mathbf{q}'_k$, вычисляемые по формулам (26б) и (26в), поворачиваются вокруг $\mathbf{q}_3$ на угол 2α. Поворот диады (29) не изменяет единичную длину ее векторов, но у каждого из них при этом возникает и действительная, и мнимая составляющие

$$\psi'^{\pm} = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)\psi^{\pm}, \tag{30}$$

т.е. можно говорить о действительной и мнимой площадках, составляющих 2D-ячейку. Изменение угла поворота приводит к «перекачиванию» одной площадки в другую при изменении фазы. Процесс такого *«мерцания»* 2D-ячейки, конечно, не наблюдаем, его 3D-пространственным проявлением является вращение кватернионной триады $\mathbf{q}'_k$ на двойной угол.

Но существование 2D-ячейки и ее предгеометрические особенности оказываются «математически заметными» для всех рассмотренных выше ассоциативных алгебр. Примером служит конформное преобразование векторов диады.

2.5. Конформное растяжение мерцающей 2D-ячейки и стабильность алгебр

Пусть мерцающая 2D-ячейка с базисом (29) подвергается также конформному растяжению

$$\psi''^{\pm} \equiv \sigma\psi' = \sigma e^{\pm i\alpha}\psi^{\pm}, \quad \varphi''^{\pm} \equiv \sigma\varphi' = \sigma e^{\mp i\alpha}\varphi^{\pm}, \tag{31}$$

где масштабный фактор – действительное число $\sigma \in \mathbf{R}$, отличное от нуля и единицы. В целях упрощения последующих записей удобно сделать обозначение

$$\lambda \equiv \sigma e^{i\alpha}, \tag{32}$$

тогда $\lambda^* = \sigma e^{-i\alpha}$ и $\psi''^{+} = \lambda\psi^{+}$, $\psi''^{-} = \lambda^*\psi^{-}$, $\varphi''^{+} = \lambda^*\varphi^{+}$, $\varphi''^{-} = \lambda\varphi^{-}$.

Векторы нового базиса (31) по-прежнему ортогональны, $\varphi''^{\mp}\psi''^{\pm} = \varphi''^{\pm}\psi''^{\mp} = 0$, но уже не единичны

$$\varphi''^{\pm}\psi''^{\pm} = \lambda\lambda^* = \sigma^2. \tag{33}$$

Преобразование (31), по сути, вносит метрический дефект: ковекторы $\varphi''^{\pm}$ и векторы $\psi''^{\pm}$ более не являются взаимными объектами. Наличие дефекта (33) сказывается на свойствах объектов (26): они не являются единицами ассоциативных алгебр, например,

$$\psi''^{+}\varphi''^{+} + \psi''^{-}\varphi''^{-} = \sigma^2 \neq 1, \quad i(\psi''^{+}\varphi''^{+} - \psi''^{-}\varphi''^{-}) = \sigma^2\mathbf{q}_3 \neq \mathbf{q}_3.$$

Однако при таком нарушении метрических свойств базовой поверхности, «предгеометрически предшествующей» единицам (26), есть возможность сохранить алгебры посредством введения некоторого условия, «сглаживающего» дефект. Таким условием служит задание нормализующего функционала над абстрактным пространством.

Пусть имеется абстрактное М-мерное евклидово пространство $\mathbf{P}$ с координатами ξ_Λ и некоторый свободный параметр θ; величины θ, ξ_Λ безразмерны, т.е. не измеряются в физических единицах. И пусть фактор (32) есть функция $\lambda(\theta, \xi_\Lambda)$, такая, что следующий интеграл по объему V_Λ имеет конечное (нормальное) значение

$$f \equiv \int\limits_{V_\Lambda} \lambda\lambda^* dV_\Lambda = 1. \tag{34}$$

Тогда над пространством $\mathbf{P}$ метрический дефект базовой поверхности «сглаживается», и на базисе (31) растянутой мерцающей 2D-ячейки можно построить алгебраические единицы

$$I'' = f(\psi'^{+}\varphi'^{+} + \psi'^{-}\varphi'^{-}) = I, \tag{35а}$$

$$\mathbf{q}''_1 = -if(\psi'^{+}\varphi'^{-} + \psi'^{-}\varphi'^{+}) = (\cos 2\alpha)\mathbf{q}_1 + (\sin 2\alpha)\mathbf{q}_2, \tag{35б}$$

$$\mathbf{q}''_2 = f(\psi'^{+}\varphi'^{-} + \psi'^{-}\varphi'^{+}) = -(\sin 2\alpha)\mathbf{q}_1 + (\cos 2\alpha)\mathbf{q}_2, \tag{35в}$$

$$\mathbf{q}''_3 = if(\psi'^{+}\varphi'^{+} - \psi'^{-}\varphi'^{-}) = \mathbf{q}_3. \tag{35г}$$

При этом «внешние» единицы (35) идентичны единицам, полученным в результате преобразования (29): скалярная и векторная $\mathbf{q}_3$ единицы не изменяются (хотя диада 2D-ячейки подвергается фазовому преобразованию), а векторы $\mathbf{q}''_1$ и $\mathbf{q}''_2$ в 3D-пространстве поворачиваются вокруг $\mathbf{q}_3$ на двойной угол. Однако, единицы (35) остаются функциями параметра θ; можно наложить условие стабильности единиц (35) (по сути, – стабильности алгебр) в смысле значений этого параметра

$$\partial f/\partial\theta \equiv \partial_\theta f = 0. \tag{36}$$

В силу теоремы Стокса это условие, примененное к функционалу (34) сводится к дифференциальному уравнению типа уравнения неразрывности

$$\partial_\theta(\lambda\lambda^*) + \partial_\Lambda(\lambda\lambda^* k_\Lambda) = 0, \tag{37}$$

где k_Λ – некоторый М-мерный вектор «распространения» 2D-ячейки, который может быть задан различными способами. Условие стабильности алгебр (37), «физичное» само по себе, имеет прямое отношение к самым известным законам физики.

Здесь стоит сделать одно существенное замечание. «Законами физики» принято считать математические соотношения, полученные эмпирически или эвристически и описывающие свойства и поведение физических величин, как правило, наблюдаемых в 3D-пространстве. Но какой бы ни была природа этих величин, их экспериментальное измерение фактически всегда сводится к измерению только пространственной длины (отрезка числового ряда). Как показано выше, ассоциативные алгебры, традиционно используемые для описания физических (геометрических) реальностей, допускают представление о предгеометрической поверхности, «длина» на которой определяется как «корень квадратный» из длины физического мира. Это означает, что некоторые «законы физики», записанные в естественном для наблюдателя «геометрическом» формате (скалярном, векторном или тензорном), могут быть также представлены в виде специфических предгеометрических соотношений. В последующей работе будет продемонстрировано, что такие представления хорошо известны и используются для вычислений; однако в силу своего эвристического (не математико-логического) происхождения, они вызывают интерпретационные сложности.

Поскольку в дальнейшем будет уделено внимание и стандартному 3D-описанию физических закономерностей, в математическую часть данного исследования следует добавить сведения о геометрических свойствах объектов, вовлеченных в эти описания.

3. Геометрия кватернионных пространств

Эвристика введения декартовых координат для описания физического пространства получила мощное логическое обоснование с открытием кватернионов, векторная триада которых $\mathbf{q}_k$ геометрически эквивалентна ортонормированному 3D-реперу. Этот факт, установленный Гамильтоном и использованный Максвеллом в уравнениях электродинамики, был, по сути, выражением первого «физического закона», обнаруженного в среде гиперкомплексных чисел. Однако затем более 100 лет тематика изучения собственно кватернионных реперов и описываемых ими пространств не затрагивалась. Последние десятилетия показали, что эта тема оказалась весьма плодотворной [22].

3.1. Векторные преобразования кватернионных единиц

Несложно показать, что группа $SL(2,C)$ преобразований подобия (24), сохраняющая форминвариантность закона умножения (2) и действующая, по существу, на 2D-базовые спиноры (27), имеет свой векторный аналог, группу $SO(3,C)$, элементы которой суть унимодулярные ортогональные 3×3-матрицы $O_{k'n}$, действующие непосредственно на векторную триаду

$$\mathbf{q}_{k'} \equiv O_{k'n}\mathbf{q}_n. \tag{38}$$

Если параметры матрицы $O_{k'n}$ действительные, то преобразование (38) есть обычный трехмерный поворот репера $\mathbf{q}_k$, если параметры мнимые, то поворот – гиперболический, (хотя единицы $\mathbf{q}_{k'}$, удовлетворяя закону (2), тем не менее, остаются кватернионными). *Простой (плоский) поворот* векторной триады, например, вокруг вектора $\mathbf{q}_3$ на угол γ реализуется матрицей $O_{k'n} \equiv O_3^{\gamma}$, компоненты которой вполне определены формулами (35б) и (35в) (в данном случае $\gamma = 2\alpha$). Произвольная матрица $O_{k'n}$ есть произведение матриц простых поворотов вокруг различных векторов триады.

При вычислениях, связанных с геометрией 3D-объектов, векторные преобразования (38) часто оказываются удобнее спинорных преобразований (24). Так, рассматривая вектор с компонентами a_k в некотором репере $\mathbf{q}_k$, легко заметить, что вектор-кватернион $\mathbf{a} \equiv a_k\mathbf{q}_k$ форм-инвариантен относительно преобразований типа (38) с *действительными параметрами*,

$$\mathbf{a} = a_k\mathbf{q}_k = a_{k'}\mathbf{q}_{k'}, \tag{39}$$

поскольку $a_k = O_{n'k}a_{n'}$ и $O_{n'k}O_{n'm} = \delta_{kn}$. Равенство (39), в частности, позволяет вычислять компоненты вектора в любых заданных реперах, а также в неинерциальных (в данном случае – только вращающихся) системах отсчета, если известны компоненты в одном репере и матрица поворота.

Для преобразований группы $SO(3,C)$ с комплексными параметрами соотношение (39) не выполняется, если компоненты вектора действительны (т.е. если $\mathbf{a}$ – кватернион). Но физически значимыми оказываются условия форм-инвариантности объектов, принадлежащих множеству векторных бикватернионов $\mathbf{z} = (a_k + ib_k)\mathbf{q}_k = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ с определяемой «нормой»

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = (a_n + ib_n)(a_n + ib_n) = a^2 - b^2. \tag{40}$$

Из требования (40) следует, что векторы **a** и **b** ортогональны друг другу, и эта ортогональность, конечно, не зависит от выбора триады:

$$a_{k'}b_{k'} = a_n O_{nk'} b_m O_{mk'} = \delta_{mn} a_n b_m = 0.$$

Поэтому без потери общности один вектор триады можно направить вдоль одной из составляющих, например, $\mathbf{q}_1$ – вдоль мнимой части **b**, тогда $\mathbf{z} = ib_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3$, и условие форм-инвариантности **z** отображается равенством

$$\mathbf{z} = ib_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 = ib_{1'}\mathbf{q}_{1'} + a_{2'}\mathbf{q}_{2'} + a_{3'}\mathbf{q}_{3'}. \tag{41}$$

Детальный анализ показывает ([22], стр.160), что вектор **z** остается форм-инвариантым в смысле соотношения (41) относительно множества таких преобразований, матрицы которых представляют собой сумму простых поворотов, выполняемых в произвольном порядке, но поворотов на действительный угол относительно «мнимой оси» (здесь $\mathbf{q}_1$) и поворотов на мнимый «угол» относительно «вещественной оси» (здесь $\mathbf{q}_2$ или $\mathbf{q}_3$). В сделанных выше обозначениях такие повороты соответственно реализуются матрицами O_1^{γ}, $O_2^{i\eta}$, $O_3^{i\chi}$, любое их произведение также представимо матрицей простого поворота.

Среди всех матриц такого типа есть тождественный оператор, и для каждой матрицы однозначно определяется обратная, следовательно, множество всех таких матриц образует группу$SO(1,2) \subset SL(2,C)$.

Если в каком-либо репере известны компоненты вектора **z**, то с помощью условия (41) легко вычислить его проекции на любое направление, заданное поворотом исходного репера матрицей $SO(1,2)$. Кстати, проекция произвольного вектора-кватерниона (или бикватерниона) **a** на направление, заданное одной из единиц триады $\mathbf{q}_k$, может быть вычислена также с помощью собственных функций $[\varphi^{\pm}_{(k)}, \psi^{\pm}_{(k)}]$ этой единицы по правилу

$$a_k \equiv \langle \mathbf{a} \rangle_k = \mp i \varphi^{\pm}_{(k)} \mathbf{a} \psi^{\pm}_{(k)}.$$

Стоит также напомнить, что группа отражений $SL(2,C)$ дважды накрывает группу вращений $SO(3,C)$; соотношения между соответствующими матрицами известны ([22], стр.65)

$$O_{k'n} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S\mathbf{q}_k S^{-1}\mathbf{q}_n), \quad O_{k'n} \in SO(3,C), \quad S \in SL(2,C),$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{1 + O_{m'm}} - \frac{O_{k'n}}{2\sqrt{1 + O_{m'm}}}\varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j.$$

Приведенные в данном разделе сведения в дальнейшем будут использованы при формулировке кватернионной версии теории относительности.

3.2. Дифференцирование репера и кватернионные пространства

Кватернионные величины могут быть достаточно гладкими функциями параметров. Ниже рассмотрены дифференциальные соотношения для векторов кватернионной триады, параметры которой Φ_ξ (здесь ξ – номер параметра) для простоты считаются действительными переменными [23]. Малые приращения репера $\mathbf{q}_k$ выражаются через сами векторы этого репера с коэффициентами вращения – собственной связности ω

$$d\mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn}\mathbf{q}_n d\Phi_\xi. \tag{42}$$

Эта связность антисимметрична по векторным индексам, число ее компонент определяется по формуле $N = G\frac{p(p-1)}{2} = 3G$, где G – число параметров, $p = 3$ – число векторов.

Из уравнения (42) определяется производная вектора репера по параметру

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_\xi}\mathbf{q}_k(\Phi) \equiv \partial_\xi \mathbf{q}_k(\Phi) = \omega_{\xi kn}\mathbf{q}_n. \tag{43a}$$

Формулу для вычисления собственной связности можно записать в трех вариантах как функции:

– репера $\omega_{\xi kn} = \mp i\varphi^{\pm}_{(n)}(\partial_\xi \mathbf{q}_k)\psi^{\pm}_{(n)} \equiv \mp i \left\langle \partial_\xi \mathbf{q}_k \right\rangle^{\pm}_{n}$,

– спиноров $\omega_{\xi kn} = \mp i \left\langle S^{-1}\partial_\xi S\mathbf{q}_{\tilde{k}} - \mathbf{q}_{\tilde{k}}S^{-1}\partial_\xi S \right\rangle^{\pm}_{\tilde{n}}$, $\quad \mathbf{q}_k = S(\Phi)\mathbf{q}_{\tilde{k}}S^{-1}(\Phi)$, $\quad \mathbf{q}_{\tilde{k}} = const$,

– матриц векторного поворота $\omega_{\xi km} = \partial_\xi O_{k\tilde{n}} O_{m\tilde{n}}$, $\quad \mathbf{q}_k = O_{kp'}\mathbf{q}_{p'}$, $\quad \mathbf{q}_k \equiv O_{k\tilde{n}}\mathbf{q}_{\tilde{n}}$.

Последнюю формулу удобно использовать для установления трансформационных свойств связности

$$\omega_{\xi km} = O_{kp'}O_{mn'}\omega_{\xi p'n'} + O_{mp'}\partial_\xi O_{kp'}; \tag{43б}$$

наличие последнего слагаемого в формуле (43б) свидетельствует, что связность не является тензором.

Дифференциальные соотношения векторных кватернионов удобно изучать, вводя понятие *векторного кватернионного пространства* – такого 3D-пространства $\mathbf{U}_3$, что описание декартовых реперов в касательном ему пространстве с неизбежностью требует привлечения кватернионной триады. Иными словами, каждая точка $\mathbf{U}_3$ оказывается отождествленной с началом триады $\mathbf{q}_k$, при этом задано правило $\Phi_\xi(y^a)$, связывающее ориентацию триады со значениями (голономных), вообще говоря, криволинейных координат данной точки y^a.

Пространство $\mathbf{U}_3$ будет считаться достаточно гладким; в общем случае оно может быть неплоским, но в каждой его точке можно построить плоское касательное пространство $T(\mathbf{U}_3)$, координаты которого x_n связаны с координатами y^a локальным соотношением через коэффициенты Ламе

$$dx_k = g_{ka}dy^a, \quad g_{ka}g^A_n = \delta_{kn}, \quad g_{ka}g^b_k = \delta^b_a.$$

Метрика пространства $T(\mathbf{U}_3)$ в данном случае есть «скалярное произведение» векторных кватернионных единиц $\mathbf{g}_{kl} \equiv \mathbf{q}_k\mathbf{q}_l = -\delta_{kl} + \varepsilon_{klj}\mathbf{q}_j$ (знак «+» декартовой части достигается сопряжении сомножителя). Эта метрика асимметрична и является кватернионом; но она обладает характерным метрическим свойством: свертка двух таких метрик по первым или по последним индексам имеет своим результатом ту же метрику, например,

$$\mathbf{g}_{kn}\mathbf{g}_{km} = (-\delta_{kn} + \varepsilon_{knj}\mathbf{q}_j)(-\delta_{km} + \varepsilon_{kml}\mathbf{q}_l) = -\delta_{nm} + \varepsilon_{nmj}\mathbf{q}_j = \mathbf{g}_{nm}.$$

Геометрические характеристики кватернионных пространств компактно описываются в касательном пространстве, в котором задается перенос произвольного вектора B_n

$$d_pB_n = -\Omega_{jkn}B_k dx_j,$$

где $\Omega_{jkn} = \Phi_{jkn} + \omega_{jkn} + \sigma_{jkn}$ – аффинная связность $T(\mathbf{U}_3)$, включающая обычные коэффициенты вращения Риччи $\Phi_{jkn} = g^a_n\nabla_j g_{ka}$, отражающие криволинейный характер координатных линий в $\mathbf{U}_3$, собственную связность ω_{jkn} и, возможно, произвольное слагаемое σ_{jkn}; все эти геометрические объекты антисимметричны в двух последних индексах. Если теперь определить ковариантную производную с аффинной связностью $D_jB_n \equiv \partial_j B_n + B_k\Omega_{jkn}$, то оказывается, что кватернионная триада, а значит, и метрика $\mathbf{g}_{kl}$ не постоянны относительно этой производной

$$D_j\mathbf{q}_n = \partial_j\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_k\Omega_{jkn} = \mathbf{q}_k(\Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}).$$

В связи с этим сумму частей связности

$$\hat{\sigma}_{jkn} \equiv \Phi_{jkn} + \sigma_{jkn}$$

можно рассматривать как кватернионную неметричность, вынуждающую триаду совершать дополнительный поворот к тому, что обусловлен ее собственной связностью. Далее по известной процедуре из первых уравнений структуры (Картана) определяется взаимозависимость базисной 1-формы, связности и кручения данного пространства, а вторые уравнения структуры позволяют установить вид тензора кривизны

$$R_{kmij} = \partial_i\Omega_{jkm} - \partial_j\Omega_{ikm} + \Omega_{jkn}\Omega_{inm} - \Omega_{ikn}\Omega_{jnm}.$$

Существенно, что в структуре этого тензора слагаемые, содержащие только собственную связность ω_{jkn}, тождественно обращается в ноль, так что в целом кривизна содержит лишь неметрические составляющие: коэффициенты вращения Риччи и чисто кватернионную неметричность $R_{kmij} = {}^{\Phi}R_{kmij} + {}^{Q}R_{kmij}$, где

$$ {}^{\Phi}R_{kmij} = \hat{D}_i\Phi_{jkm} - \hat{D}_j\Phi_{ikm} + \Phi_{jkn}\Phi_{inm} - \Phi_{ikn}\Phi_{jnm}; $$

здесь ковариантные производные относительно полной кватернионной связности,

$$ {}^{Q}R_{kmij} = \tilde{D}_i\sigma_{jkm} - \tilde{D}_j\sigma_{ikm} + \sigma_{jkn}\sigma_{inm} - \sigma_{ikn}\sigma_{jnm}; \tag{44} $$

здесь ковариантные производные относительно собственной связности.

Изложенные выше сведения о гиперкомплексных числах достаточны для представления математической «среды обитания» целой серии физических законов и соотношений. О них – в следующих публикациях данного обзора

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Л.Кантор, А.С.Солодовников, Гиперкомплексные числа, М., изд. Наука, 1973.
2. W.R.Hamilton, // The mathematical Papers of William Rouan Hamilton. App. 3, Vol. 3, Cambrige: CUP (1967). [См. также: У.Гамильтон, Избранные труды. М., изд. Наука, 1994].
3. A.Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B.Brounin; and on quaternions. // Philosophical Magazine, V.26, p.p.208–211, 1845.
4. J.H.Conwey, D.A.Smith, On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry. A.K.Peters Ltd., Natics, Massachussets, 2003.
5. J. Cockle, A new imaginary in algebra. // London–Edinburg–Dublin Philosophical Magazine, Vol.33, No. 3, p.p.345–349 (1848).
6. W.K.Clifford, Mathematical Works, London, R. Tucker, ed., Macmillan (1882).
7. P.Fjelstad, Extending special relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics, Vol. 54, No. 5, p.p. 416–422 (1986).
8. W. Band, Extending relativity via the perplex numbers. // American Journal of Physics, Vol. 56, No. 5, p.p. 469–470 (1988).
9. E.Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig, B.G.Tuebner (1903).
10. I.M.Yaglom: A simple non-Euclidean geometry and its physical basis, New York, Springer Verlag (1979).
11. V.V.Kisil, Erlangen Program at Large – 2: Inventing a Wheel. The Parabolic One. arXiv:0707.4024v1 [math.GM] 27 Jul (2007).
12. W.R.Hamilton, Lectures on Quaternions, Royal Irish Academy (1853).
13. A.P.Yefremov, Quaternions and Biquaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories. arXiv:math-ph/0501055 v1 25 Jan. 2005.
14. P.Rastall, Quaternions in relativity. // Rev. Mod. Phys., Vol.2, p.p.820–832 (1964).
15. A.P.Yefremov, Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects. // Adv.Sci.Lett., Vol.1,179–186 (2008).
16. A.P.Yefremov, Structure of Hypercomplex Units and Exotic Numbers as Sections of Bi-Quaternions. // Adv.Sci.Lett., Vol. 3, pp. 537–542 (2010).
17. A.P.Yefremov, Splitting of 3d Quaternion Dimensions into2d-Cells and a «World Screen Technology». // Adv.Sci.Lett., Vol. 5, No. 1, pp. 288–293 (2012).
18. J. A. Wheeler, Pregeometry: motivations and prospects. In: A. R. Marlov (ed.), Quantum Theory and Gravitation (New York, Academic Press) p.p. 1–11, 1980.
19. A.P.Yefremov, Fundamental Properties of Quaternion Spinors. // Gravit. and Cosmol., Vol. 18, No. 3, pp. 188–195 (2012).
20. A.P.Yefremov, The Conic-Gearing Image of a Complex Number and a Spinor-Born Surface Geometry. // Gravit. and Cosmol., Vol. 17, No. 1, pp. 1–6 (2011).
21. Р.Пенроуз, Структура пространства-времени. М., изд. Мир, 1972.
22. А.П. Ефремов, Кватернионные пространства, системы отсчета и поля, М., изд. РУДН, 2005.
23. A.P.Yefremov, Quaternions: algebra, geometry and physical theories. // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics, No. 1, pp.104–119 (2004).

Поступила в редакцию 06.04.2014

Ефремов Александр Петрович, профессор, д.ф.-м.н., директор Института гравитации и космологии РУДН, зав. кафедрой физики РУДН. Российская Федерация, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru

A. P. Yefremov

Pregeometric structure of associative algebras and quaternion spaces as mathematical medium of physical laws

Keywords: hypercomplex numbers, basic surface, spinors, quaternion spaces.

PACS: 04.20 Gz.; 04.20 Gh

The paper is the first (mathematical) part of a large review covering involvement of hypercomplex numbers in formulations of physical laws. Principal notions and correlation defining associative hypercomplex (and polynumber) algebras are shortly given, those of quaternions, biquaternions, double and dual numbers. The units of all these algebras (as well as units of real and complex numbers) are shown to be represented by quadratic combinations of two-dimensional vectors of a local basis on a fundamental surface. Main relations of differential geometry of quaternion spaces are also exposed.

REFERENCES

1. I.L.Kantor, A.S.Solodovnikov, *Hypercomplex numbers*, M., Nauka publ., 1973.
2. W.R.Hamilton, *The mathematical Papers of William Rouan Hamilton*. App. 3, Vol. 3, Cambrige: CUP (1967).
3. A.Cayley, On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev. B.Brounin; and on quaternions. *Philosophical Magazine*, V.26, p.p.208–211, 1845.
4. J.H.Conwey, D.A.Smith, *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. A.K.Peters Ltd., Natics, Massachussets, 2003.
5. J. Cockle, A new imaginary in algebra. *London–Edinburg–Dublin Philosophical Magazine*, Vol.33, No. 3, p.p.345–349 (1848).
6. W.K.Clifford, *Mathematical Works*, London, R. Tucker, ed., Macmillan (1882).
7. P.Fjelstad, Extending special relativity via the perplex numbers. *American Journal of Physics*, Vol. 54, No. 5, p.p. 416–422 (1986).
8. W. Band, Extending relativity via the perplex numbers. *American Journal of Physics*, Vol. 56, No. 5, p.p. 469–470 (1988).
9. E.Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, B.G.Tuebner (1903).
10. I.M.Yaglom: *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*, New York, Springer Verlag (1979).
11. V.V.Kisil, *Erlangen Program at Large – 2: Inventing a Wheel. The Parabolic One* arXiv:0707.4024v1 [math.GM] 27 Jul (2007).
12. W.R.Hamilton, *Lectures on Quaternions*, Royal Irish Academy (1853).
13. A.P.Yefremov, *Quaternions and Biquaternions: Algebra, Geometry and Physical Theories* arXiv:math-ph/0501055 v1 25 Jan. 2005.
14. P.Rastall, Quaternions in relativity. *Rev. Mod. Phys.*, Vol.2, p.p.820–832 (1964).
15. A.P.Yefremov, Quaternion Model of Relativity: Solutions for Non-Inertial Motions and New Effects. *Adv.Sci.Lett.*, Vol.1,179–186 (2008).
16. A.P.Yefremov, Structure of Hypercomplex Units and Exotic Numbers as Sections of Bi-Quaternions. *Adv.Sci.Lett.*, Vol. 3, pp. 537–542 (2010).
17. A.P.Yefremov, Splitting of 3d Quaternion Dimensions into2d-Cells and a «World Screen Technology». *Adv.Sci.Lett.*, Vol. 5, No. 1, pp. 288–293 (2012).
18. J. A. Wheeler, Pregeometry: motivations and prospects. In: *A. R. Marlov (ed.), Quantum Theory and Gravitation (New York, Academic Press)*, p.p. 1–11, 1980.
19. A.P.Yefremov, Fundamental Properties of Quaternion Spinors. *Gravit. and Cosmol.*, Vol. 18, No. 3, pp. 188–195 (2012).
20. A.P.Yefremov, The Conic-Gearing Image of a Complex Number and a Spinor-Born Surface Geometry. *Gravit. and Cosmol.*, Vol. 17, No. 1, pp. 1–6 (2011).
21. R. Penrose, *Structure of space-time* (W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968).
22. A.P.Yefremov, *Quaternion spaces, frames, and fields*, M., RUDN publ., 2005.
23. A.P.Yefremov, Quaternions: algebra, geometry and physical theories. *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, No. 1, pp.104–119 (2004).

Received 06.04.2014

Alexander P. Yefremov. Institute of Gravitation and Cosmology of Peoples Friendship University of Russia.
E-mail: a.yefremov@rudn.ru