

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев¹

НЕМИНИМАЛЬНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ. I.

Из микроскопических уравнений Гамильтона на основе общерелятивистской кинетической теории выводится самосогласованная система макроскопических уравнений, описывающих космологическую плазму, в которой возможно межчастичное скалярное взаимодействие. Рассмотрены вопросы теории термодинамического равновесия в релятивистских статистических системах с межчастичным скалярным взаимодействием. Рассмотрены вопросы численного моделирования процесса космологического расширения однокомпонентной вырожденной плазмы скалярно заряженных частиц.

Ключевые слова: микроскопическая динамика, локальное термодинамическое равновесие, релятивистская кинетика, скалярные поля, ускорение.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Введение

В последнее время опубликовано большое количество работ по позднему ускорению Вселенной. Для решения проблемы вторичного ускорения Вселенной во многих работах предлагается коренным образом изменить фундаментальные принципы физики. Однако, сейчас появляются некоторые аргументы в пользу того, что сложные, многокомпонентные, классические физические системы также могут приводить ко вторичному ускорению Вселенной. В частности, такие аргументы были приведены Д. Гальцовым, а также автором статьи в докладах на семинаре Gracos-2009 (см., например, [1, 2]). В цитированной работе [2] был приведен пример космологической эволюции полностью вырожденной Ферми-системы со скалярным взаимодействием частиц, с начальной инфляцией и поздним ускорением. В работе В. Журавлева [3] исследовалась космологическая эволюция двухкомпонентной системы, состоящей из идеальной жидкости и скалярного поля. В этих работах показано, что такие космологические модели могут иметь начальную инфляционную стадию и позднее ускорение. Таким образом, космологические модели с многокомпонентной материей в состоянии описать основные наблюдательные данные о расширении Вселенной. Некоторые указания на возможность такого поведения сложных систем со скалярным взаимодействием частиц были даны также в работах [4, 5]. В отличие от двухкомпонентной системы «скалярное поле + идеальная жидкость», в которой взаимодействие компонентов осуществляется лишь через гравитацию², мы рассмотрим статистические системы скалярно заряженных частиц, в которой некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. С другой стороны, статистическая система, обладая, вообще говоря, ненулевым скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1983 г автором статьи [6–9] и несколько позже – Г.Г. Ивановым [10]. В частности, в работах [7, 8] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. Следует отметить, что в настоящее время создано множество моделей неминимального взаимодействия скалярного поля с обычной материей. В частности, рассматривались модели связи посредством кинетического члена лагранжиана взаимодействия. Однако, все рассматриваемые модели имеют один существенный недостаток – они являются полностью феноменологическими. В отличие от этих моделей мы рассмотрим строгую динамическую модель взаимодействия скалярного поля с элементарными частицами, основанную на микроскопических уравнениях движения Гамильтона и последующей процедурой статистического усреднения. При этом оказывается, что взаимодействие скалярного поля с частицами можно ввести единственным образом, также и макроскопические уравнения материи и скалярного поля с помощью процедур

¹ E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

² т.е., от минимальной модели взаимодействия

усреднения получаются однозначным образом. Тем самым, устанавливается тесная связь между микро – и макро – уровнями описания скалярного взаимодействия. Вполне естественно, что получающаяся на таком пути модель скалярного взаимодействия должна иметь более сложную конструкцию, чем аналогичные феноменологические модели, но при этом она обнаруживает и более богатые возможности поведения.

Статья посвящена обзору работ Автора и его учеников по исследованию проблемы введения скалярных полей в макроскопическую классическую теорию гравитации.

2. Динамика частиц со скалярным взаимодействием

2.1. Канонические уравнения движения

Канонические уравнения движения релятивистской частицы относительно пары канонически сопряженных динамических переменных x^i (координат) и P_i (обобщенного импульса) имеют вид (см., например, [7])³:

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (2.1)$$

где $H(x, P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона. Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\psi(x^i, P_k)$, с учетом (2.1) найдем:

$$\frac{d\psi}{ds} = [H, \psi], \quad (2.2)$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial P_i}. \quad (2.3)$$

Вследствие (2.3) функция Гамильтона является интегралом движения частицы:

$$\frac{dH}{ds} = [H, H] = 0, \Rightarrow H = \text{Const}. \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) можно назвать соотношением нормировки. Инвариантная функция Гамильтона определяется неоднозначно. Действительно, вследствие (2.3) если $H(x, P)$ – функция Гамильтона, то и любая непрерывно дифференцируемая функция $f(H)$ также является функцией Гамильтона. Единственная возможность введения инвариантной функции Гамильтона, квадратичной по обобщенному импульсу частицы, при наличии только гравитационных и скалярных полей есть следующая:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\psi(x)(P, P) - \varphi(x)], \quad (2.5)$$

где (a, b) здесь и в дальнейшем есть скалярное произведение векторов четырехмерных векторов a и b :

$$(a, b) = g_{ik} a^i b^k,$$

а $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – некоторые скалярные функции. Часто константу в правой части (2.4) выбирают равной $1/2m^2$, где m – масса покоя частицы. Но мы не будем этого делать, выбирая более удобную, нулевую, нормировку функции Гамильтона [11, 12], так как эту константу можно ввести и в функцию $\psi(x)$:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\psi(x)(P, P) - \varphi(x)] = 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что в работе автора [6] релятивистски - инвариантная Функция Гамильтона частицы со скалярным зарядом q , находящейся в скалярном поле с потенциалом φ вводилась соотношением:

$$H(x, P) = \sqrt{(P, P)} - q\varphi. \quad (2.7)$$

³Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $G = c = \hbar = 1$

Несмотря на компактную форму записи эта функция Гамильтона неудобна появлением радикала. В другой работе автора [6] релятивистски - инвариантная функция Гамильтона вводилась соотношением:

$$H(x, P) = \frac{1}{2}m \left[\frac{(P, P)}{m + q\varphi} - q\varphi \right]. \quad (2.8)$$

Итак, из соотношения нормировки (2.6) найдем:

$$(P, P) = \frac{\varphi}{\psi}, \quad (2.9)$$

а из первой группы канонических уравнений движения 2.1 получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$u^i \equiv \frac{dx^i}{ds} = \psi P^i \Rightarrow P^i = \psi^{-1} u^i, \quad (2.10)$$

Подставляя последнее соотношение в соотношение нормировки (2.9), получим:

$$(u, u) = \psi\varphi,$$

поэтому для выполнения соотношения нормировки вектора скорости частицы

$$(u, u) = 1. \quad (2.11)$$

должно быть:

$$\psi\varphi = 1 \Rightarrow \psi = \varphi^{-1},$$

– таким образом, инвариантная функция Гамильтона частицы может определяться лишь одной скалярной функцией $\varphi(x)$. Учитывая последнее соотношение, запишем функцию Гамильтона в окончательной форме:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [\varphi^{-1}(x)(P, P) - \varphi(x)] = 0, \quad (2.12)$$

и из канонических уравнений (2.1) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$P^i = \varphi \frac{dx^i}{ds}. \quad (2.13)$$

Из определения (2.5) следует, что вектор обобщенного импульса времениподобен:

$$(P, P) = \varphi^2. \quad (2.14)$$

Отметим полезное для дальнейшего соотношение, являющееся следствием (2.3), (2.5) и (2.14):

$$[H, P^k] = \nabla^k \varphi \equiv g^{ik} \partial_i \varphi. \quad (2.15)$$

2.2. Уравнения движения в Лагранжевой формулировке

Из второй группы канонических уравнений (2.1) получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке [13]:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \partial_{,k} \ln |\varphi| \mathcal{P}^{ik}, \quad (2.16)$$

где:

$$\mathcal{P}^{ik} = \mathcal{P}^{ki} = g^{ik} - u^i u^k \quad (2.17)$$

– тензор ортогонального проектирования на направление u , такой что:

$$\mathcal{P}^{ik} u_k \equiv 0; \quad \mathcal{P}^{ik} g_{ik} \equiv 3. \quad (2.18)$$

Из этих соотношений и уравнений Лагранжа (2.16) вытекает строгое следствие ортогональности векторов скорости и ускорения:

$$g_{ik} u^i \frac{du^k}{ds} \equiv 0. \quad (2.19)$$

Заметим, что лагранжевы уравнения движения (2.16) инвариантны относительно знака скалярной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x). \quad (2.20)$$

Также инвариантна относительно преобразования (2.20) и функция Гамильтона (2.12) при нулевой ее нормировке. Поэтому из соотношений (2.14), (2.13), а также уравнений Лагранжа (2.16) следует, что модуль скаляра φ имеет смысл *эффективной инертной массы частицы, m_* , в скалярном поле*:

$$|\varphi| = m_*. \quad (2.21)$$

Заметим, что указанному выбору функции Гамильтона соответствует следующая функция действия:

$$S = \int m_* ds, \quad (2.22)$$

формально совпадающая с функцией Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_* в гравитационном поле (см., например, [14]).

2.3. Интегралы движения

Найдем теперь условия существования линейного интеграла канонических уравнений движения (2.1), связанного с полными энергией и импульсом частицы, для чего вычислим полную производную по каноническому параметру от скалярного произведения (ξ, P) . Используя канонические уравнения движения (2.1), соотношение нормировки (2.14), а также связь обобщенного импульса с кинематическим (2.13), найдем:

$$\frac{d(\xi, P)}{ds} = \frac{1}{m_*} P^i P^k L_{\xi} g_{ik} + L_{\xi} m_*, \quad (2.23)$$

где L_{ξ} – производная Ли по направлению ξ ⁴. Полагая далее

$$\frac{d(\xi, P)}{ds} = 0 \Leftrightarrow (\xi, P) = Const, \quad (2.24)$$

с учетом произвольности вектора обобщенного импульса и соотношения нормировки для него, получим условия выполнения этого равенства:

$$L_{\xi} g_{ik} = \rho g_{ik} \Rightarrow \rho = -L_{\xi} \ln |m_*|. \quad (2.25)$$

Подставляя этот результат обратно в соотношение (2.23), получим окончательно необходимые и достаточные условия существования линейного интеграла канонических уравнений движения (см., например, [13]):

$$L_{\xi} m_* g_{ik} = 0. \quad (2.26)$$

Таким образом, для того, чтобы существовал линейный интеграл канонических уравнений движения (2.1) необходимо и достаточно, чтобы конформно соответствующее пространство с метрикой $m_* g_{ik}$ допускало группу движений с вектором Киллинга ξ . Заметим, что линейные интегралы (2.24) имеют смысл полного импульса (при пространственно-подобном векторе ξ) или полной энергии (при временно-подобном векторе ξ).

⁴См., например, [15].

2.4. Выбор функции массы

Возникает вопрос о выборе функции $m_*(\Phi)$. Не конкретизируя пока эту функцию, отметим следующее важное обстоятельство. Рассмотрим статические поля g_{ik} и Φ , допускающие времени-подобный вектор Киллинга $\xi^i = \delta_4^i$, когда сохраняется полная энергия частицы, P_4 . Рассмотрим далее систему отсчета, в которой $g_{\alpha 4} = 0$, так что координата x^4 совпадает с мировым временем t . Тогда из соотношений связи между вектором кинематической скорости u^i и вектором полного импульса частицы P_i (2.13) следует:

$$P_4 ds = m_* dt, \quad (2.27)$$

где $P_4 = E_0 = \text{Const} > 0$ - полная энергия заряженной частицы. Поэтому, если мы хотим сохранить одинаковую ориентацию мирового и собственного времени (т.е., $dt/ds > 0$), необходимо выбрать такую функцию массы, которая всегда бы оставалась неотрицательной:

$$m_* > 0. \quad (2.28)$$

Как видно, например, из уравнений Лагранжа (2.16), эту функцию удобно выбрать так, чтобы:

$$m_*(\Phi) = |m_*(\Phi)| \geq 0. \quad (2.29)$$

Далее, с одной стороны, в отсутствие скалярного поля, точнее, в постоянном скалярном поле, функция массы должна переходить в массу покоя частицы, $m \geq 0$. С другой стороны, уравнения Лагранжа (2.16) в случае слабого скалярного поля должны переходить в классические уравнения движения в скалярном поле. Таким образом, исходя из принципа соответствия, мы должны иметь:

$$m_*(0) = m; \quad (m_*)_{,k}|_{\Phi=0} = q\Phi_{,k}, \quad (2.30)$$

где q – некоторая фундаментальная константа – *скалярный заряд частицы*. Условия (2.30) означают, что при малых значениях скалярного потенциала Φ функция $m_*(\Phi)$ должна иметь разложение вида:

$$m_*(\Phi) \simeq m \left(1 + \frac{q\Phi}{m} + \dots \right). \quad (2.31)$$

Этому условию соответствует и использованная в цитированных работах линейная функция $m_*(\Phi) = |m + q\Phi|$.

Можно предложить и другой, более радикальный подход, который при этом не противоречит соотношениям (2.30) и (2.31), полагая что вся инертная масса частиц возникает вследствие взаимодействия со скалярным полем:

$$\varphi(\Phi) \equiv m_* = |q\Phi|. \quad (2.32)$$

Тогда под массой покоя частицы, m_0 , следует понимать ее массу (2.32) на современной стадии эволюции Вселенной, которой отвечает скалярный потенциал Φ_0 : $m_0 = m_*(\Phi(t_0))$. Такому выбору функции $\phi(\Phi)$ соответствует функция действия:

$$S = \int |q\Phi| ds. \quad (2.33)$$

Этот выбор отвечает и эстетическим критериям, так как в этом случае функция Гамильтона (2.5) не зависит от массы покоя. С другой стороны видно, что при выборе функции $\varphi(\Phi)$ в форме (2.32) уравнения Лагранжа (2.16) становятся симметричными относительно замены $\Phi \rightarrow -\Phi$ и при условии $q \neq 0$ вообще не зависят явно от скалярного заряда:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = (\ln |\Phi|)_{,k} \mathcal{P}^{ik}, \quad (2.34)$$

При выводе уравнений (2.34) мы учли дифференциальное тождество: $d|y| = y/|y| dy$. Однако, посредством соотношения нормировки (2.14) зависимость решений от скалярного заряда все же сохраняется и при таком выборе функции массы в виде зависимости энергии от импульса $P_4(P^2)$.

2.5. Пример одномерного движения

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в пространстве Минковского имеется статическое скалярное поле, потенциал которого зависит только от одной координаты, $x^1 = x$, и пусть для простоты $m_* = |q\Phi| = |x|$. Таким образом, имеются 3 вектора Киллинга - один времениподобный и два пространственноподобных:

$$\xi_1^i = \delta_4^i; \quad \xi_2^i = \delta_2^i; \quad \xi_3^i = \delta_3^i.$$

Соответственно этим векторам Киллинга существуют три линейных интеграла движения:

$$P_2 = P_2^0 = \text{Const}; \quad P_3 = P_3^0 = \text{Const}; \quad P_4 = P_4^0 = \text{Const}. \quad (2.35)$$

Пусть для простоты $P_2 = P_3 = 0$. Тогда с учетом соотношения нормировки (2.14) получим из канонических уравнений движения одно нетривиальное:

$$\frac{dx}{dt} = \mp \frac{\sqrt{P_4^2 - x^2}}{P_4}. \quad (2.36)$$

Положим для простоты $P_4 = 1$, $x(0) = 1/2$. Тогда в уравнении (2.36) необходимо выбрать отрицательный знак в правой части. Решение этого уравнения есть:

$$x = \cos(t + \pi/3); \quad (2.37)$$

— и описывает гармонические колебания в мировом времени t ; при этом обобщенный импульс, P_1 также является гармонической функцией мирового времени:

$$P_1 = \sin(t + \pi/3). \quad (2.38)$$

Однако, координаты 4-х мерного вектора кинематической скорости частицы, u^i

$$u^1 = \frac{dx}{ds} \equiv -P_1/\varphi = -\tan(t + \pi/3)$$

претерпевают разрывы 2-го рода в моменты времени $t = \pi/6 + \pi k$, в которые $x = 0$. Это свидетельствует либо о разрыве связи между координатами и собственным временем в указанные моменты мирового времени, либо о необходимости переопределения собственного времени для скалярно заряженных частиц. Для кинематического импульса частицы, p^i , если мы введем его как

$$p^i = m_* \frac{dx^i}{ds} \equiv P^i, \quad (2.39)$$

такой проблемы не возникает, как и для трехмерной скорости $v^\alpha = u^\alpha/u^4$. Заметим, что, фактически, лишь эти непрерывные величины и являются физически измеримыми. Тем не менее, указанный пример показывает, что необходимо аккуратно проводить вычисления для скалярно заряженных частиц.

В дальнейшем мы будем пока не будем конкретизировать нормировку эффективной массы, полагая лишь выполненным соотношение (2.29).

3. Статистические системы частиц со скалярным взаимодействием

Перейдем теперь к описанию макроскопического скалярного взаимодействия. Это описание можно получить с помощью процедуры введения инвариантных функций распределения тождественных частиц.

3.1. Функция распределения и макроскопические плотности потоков

Пусть $F(x, P)$ — инвариантная функция распределения частиц в 8-мерном фазовом пространстве и пусть $\psi(x, P)$ — некоторая тензорная функция динамических переменных (x, P) . Согласно [13] каждой тензорной динамической функции может быть поставлена в соответствие макроскопическая плотность потока:

$$\Psi^i(x) = \int_{P(x)} F(x, P) \psi(x, P) \frac{\partial H}{\partial P_i} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) \psi(x, P) P^i dP, \quad (3.1)$$

Определим согласно (3.1) моменты относительно распределения $F(x, P)$ [6]:

$$n^i(x) = \int_{P(x)} F(x, P) \frac{\partial H}{\partial P_i} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) P^i dP, \quad (3.2)$$

вектор плотности потока числа частиц⁵, так что:

$$n^i = n v^i, \quad (3.3)$$

где v^i – времениподобный единичный вектор кинематической макроскопической скорости частиц:

$$n = \sqrt{(n, n)}. \quad (3.4)$$

Далее:

$$T_p^{ik}(x) = \int_{P(x)} F(x, P) P^i \frac{\partial H}{\partial P_k} dP \equiv m_*^{-1} \int_{P(x)} F(x, P) P^i P^k dP, \quad (3.5)$$

– макроскопический тензор энергии-импульса (ТЭИ). След этого тензора можно вычислить с помощью соотношения нормировки (2.14):

$$T_p \equiv g_{ik} T_p^{ik} = m_* \int_{P(x)} F(x, P) dP. \quad (3.6)$$

Инвариантный элемент объема 4-х мерного импульсного пространства в выражениях (3.2), (3.5) в принятой нами системе единиц есть [7]:

$$dP = \frac{2S+1}{(2\pi)^3 \sqrt{-g}} dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3 \wedge dP_4, \quad (3.7)$$

где S – спин частицы. Инвариантная восьмимерная функция распределения $F(x, P)$, сингулярная на массовой поверхности (2.14) связана с несингулярной семимерной функцией распределения $f(x, P)$ с помощью δ -функции соотношением [7]:

$$F(x, P) = f(x, P) \delta(H) = m_* \frac{\delta(P_4 - P_4^+)}{P_4^+}, \quad (3.8)$$

где P_4^+ – положительный корень уравнения нормировки (2.14); $P_4^+ = g^{4k} P_k^+$ – соответствующее этому корню значение контрвариантной компоненты импульса. В локально-лоренцевой системе отсчета:

$$P_4^+ = \sqrt{m_*^2 + P^2}, \quad (3.9)$$

где $P^2 = \sum_{\alpha=1}^3 (P^\alpha)^2$ – квадрат физического импульса. Таким образом, получим инвариантный элемент объема 3-х мерного импульсного пространства:

$$dP_+ = m_* \frac{2S+1}{(2\pi)^3 \sqrt{-g}} \frac{dP_1 \wedge dP_2 \wedge dP_3}{P_4^+} \equiv m_* dP_0, \quad (3.10)$$

где

$$dP_0 = \sqrt{-g} \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{dP^1 dP^2 dP^3}{P_4^+} \equiv \sqrt{-g} \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (3.11)$$

Тогда выражения (3.2), (3.5) и (3.6) принимают вид (для простоты записи мы опустили суммирование по сортам частиц):

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}; \quad (3.12)$$

$$T_p^{ik}(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(x)} f(x, P) P^i P^k \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}; \quad (3.13)$$

$$T_p = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_*^2 \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (3.14)$$

⁵Числовой вектор по Дж. Сингу [16].

Таким образом, явная зависимость макроскопических потоков от эффективной массы m_* в конечных выражениях исчезает.

3.2. Общерелятивистские кинетические уравнения

Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х точности столкновений частиц, в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I P_i = \sum_F P'_i, \quad (3.15)$$

где суммирование проводится по всем начальным, P_i , и конечным, P'_i , состояниям. Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (3.16)$$

где a_A – символы частиц, а ν_A – их числа. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$P_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{\nu_A} P_A^{\alpha}, \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} P_B^{\alpha'}. \quad (3.17)$$

Функции распределения частиц определяются инвариантными кинетическими уравнениями [7]:

$$[H_a, f_a] = I_a(x, P_a), \quad (3.18)$$

где $J_a(x, P_a)$ – интеграл столкновений:

$$I_a(x, P_a) = - \sum \nu_a \int_a' \delta^4(P_F - P_I) W_{IF} (Z_{IF} - Z_{FI}) \prod_{I,F}' dP; \quad (3.19)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{FI}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_B}$$

– матрица рассеяния канала реакций (3.16), ($|M_{FI}|$ – инвариантные амплитуды рассеяния);

$$Z_{IF} = \prod_I f(P_I^{\alpha}) \prod_F [1 \pm f(P_F^{\alpha'})]; \quad Z_{FI} = \prod_I [1 \pm f(P_I^{\alpha})] \prod_F f(P_F^{\alpha'}),$$

знак “+” соответствует бозонам, “-” – фермионам (подробности см. в [7, 8]).

3.3. Уравнения переноса динамических величин

Строгими следствиями общерелятивистских кинетических уравнений (3.18) являются уравнения переноса динамических величин $\Psi_a(x, P_a)$ [8]:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P(x)} \Psi_a F_a \frac{\partial H_a}{\partial P_i} dP_a - \sum_a \int_{P(x)} F_a [H_a, \Psi_a] dP_a = \\ & - \sum_{by\ channels} \int \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \Psi'_B \right) \delta^4(P_F - P_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F}' dP, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (3.16). Полагая в (3.20) $\Psi_a = g_a$, где g_a – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (3.16), получим с учетом (3.15), (3.17) и (3.20) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (3.21)$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_{P(x)} f(x, P) P^i \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (3.22)$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a . В частности, закон сохранения (3.21) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a = \delta_a^b$) при условии упругости их столкновений. Полагая в (3.20) $\Psi_a = P^k$, получим с учетом (2.15), (3.15) и (3.17) уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (3.23)$$

где введена *скалярная плотность заряда*, σ , [5]:

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \frac{dm_*^2}{d\Phi} \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}, \quad (3.24)$$

В частности, при выборе функции массы в виде (2.32) выражение для скалярной плотности зарядов принимает вид:

$$\sigma = \Phi \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_{P(x)} f(x, P) \sqrt{-g} \frac{d^3 P}{P_4^+}. \quad (3.25)$$

Следует отметить, что форма (ТЭИ) (3.5) или (3.13), а также скалярной плотности заряда (3.24), найденная для скалярно заряженных частиц в [4], при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц. В частности, для системы, состоящей из односортных частиц, вследствие (3.6) и (3.24) имеет место соотношение:

$$\sigma = \frac{d \ln m_*}{d\Phi} T_p. \quad (3.26)$$

При выборе функции эффективной массы в виде (2.32) предыдущей работы это выражение упрощается и *становится справедливым и для многокомпонентной системы*:

$$\sigma = \frac{T_p}{\Phi}, \quad (3.27)$$

4. Локальное термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

4.1. Локально равновесное распределение

В условиях термодинамического равновесия:

$$\frac{dS}{d\tau} = 0. \quad (4.1)$$

Предположим сначала, что взаимодействие всех частиц Т - инвариантно. Тогда равенство (4.1) может выполняться лишь при выполнении условий (см. [13]):

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \quad (4.2)$$

в каждом канале реакций (3.16). Уравнения (4.2) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [18]. Для их решения сделаем замену:

$$F_a = e^{-\phi_a} (e^{-\phi_a} \mp 1)^{-1} \equiv (1 \mp e^{\phi_a})^{-1}, \quad (4.3)$$

в результате которой величины Z_{if} и Z_{fi} примут вид:

$$Z_{if} = \frac{\prod_i e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}; \quad Z_{fi} = \frac{\prod_f e^{-\phi_a}}{\prod_{i,f} (e^{-\phi_a} \mp 1)}. \quad (4.4)$$

Тогда после логарифмирования уравнения (4.2) примут вид:

$$\sum_{A=1}^m \sum_{\alpha=1}^{\nu_A} \phi_A(P_A^\alpha) = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\beta=1}^{\nu'_B} \phi'_B(P_B'^\beta), \quad (4.5)$$

причем, эти соотношения должны выполняться в каждом канале реакций (??). Единственным решением (4.5) при произвольных значениях импульсов частиц являются линейные функции импульсов:

$$\phi_A(P_A^\alpha) = -\lambda_A(x) + (\xi_A, P_A^\alpha), \quad (4.6)$$

где вследствие инвариантности функции распределения: $\lambda_A(x)$ - скаляры в конфигурационном пространстве, $\xi^i(x)$ - векторы. Подставляя (4.6) в уравнения (4.5) и учитывая закон сохранения обобщенного импульса при столкновениях, получим вследствие произвольности импульсов частиц:

$$\xi_A^i(x) = \xi^i(x); \quad (4.7)$$

$$\sum_{A=1}^N \nu_A^k \lambda_A = 0, \quad (4.8)$$

где $||\nu_A^k||$ - целочисленная матрица, введенная в [13]. Вследствие очевидного условия замкнутости всех циклов реакций

$$\text{rank}||\nu_A^k|| < N \quad (4.9)$$

уравнения (4.8) всегда имеют нетривиальное решение.

Условия (4.7), (4.8) являются условиями локального термодинамического равновесия (ЛТР); скаляры $\lambda_A(x)$ называются химическими потенциалами статистической системы.

Подставляя решения (4.6) в (4.3) с учетом (4.7) получим локально - равновесные функции распределения:

$$f_a^0(x, P_a) = \{\exp[-\lambda_a + (\xi, P_a)] \mp 1\}^{-1}, \quad (4.10)$$

где верхний знак, как и ранее, соответствует бозонам, нижний - фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (4.10) необходима времениподобность вектора $\xi^i(x)$:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0. \quad (4.11)$$

Введем с помощью $\xi^i(x)$ единичное времениподобное поле $v^i(x)$:

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}; \quad (v, v) = 1, \quad (4.12)$$

локальную температуру $\theta(x)$ [18]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \quad (4.13)$$

и химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x) \lambda_a(x). \quad (4.14)$$

Тогда распределение (4.10) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x, P_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}. \quad (4.15)$$

4.2. Моменты равновесного распределения

Вычислим моменты распределения (4.10). При этом удобно перейти в локально лоренцевый репер, временная компонента которого направлена вдоль вектора v^i и ввести новые переменные $P_i = P_i - e A_i$, в которых уравнение массовой поверхности (2.12) принимает вид:

$$P_4^2 = P^2 + m_*^2, \quad (4.16)$$

где:

$$m_*(x) = |m + q\Phi(x)| \quad (4.17)$$

является эффективной массой частиц. Затем необходимо перейти к сферической системе координат в пространстве импульсов $P(X)$ и ковариантно обобщить полученные результаты. В итоге

получим выражения для компонент вектора плотности числа частиц, $n_a^i(x)$, и ТЭИ a -той компоненты плазмы, T_a^{ik} , [8], [17]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i; \quad (4.18)$$

$$T_a^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^i v^k - P_a g^{ik}, \quad (4.19)$$

где

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} P^2 dP; \quad (4.20)$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} \sqrt{m_*^2 + P^2} P^2 dP; \quad (4.21)$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[\frac{-\mu'_a + \sqrt{m_*^2 + P^2}}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1} \frac{P^4 dP}{\sqrt{m_*^2 + P^2}}. \quad (4.22)$$

В формулах (4.20) – (4.22) введены обозначения [8]:

$$\mu'_a(x) = \mu_a(x) - e_a(v, A). \quad (4.23)$$

Следует заметить, что химические потенциалы μ'_a в отличие от потенциалов μ_a не сохраняются подобно (4.8) в реакциях, нарушающих закон сохранения векторного заряда. Для этих потенциалов вместо (4.8) получим:

$$\sum \nu_A^k \mu'_A = -\Delta e^k(v, A). \quad (4.24)$$

4.3. ЛТР при нарушении T-инвариантности

Химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^k таких частиц, участвующих в реакциях (4.8), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [19]:

$$\underline{\mu}_a = -\mu_a. \quad (4.25)$$

Вследствие определения (4.23) это соотношение сохраняет силу и для перенормированных химических потенциалов μ'_a . Аналогичные выводы можно сделать и в отношении фундаментальных зарядов g_A :

$$\underline{g}_A = -g_A. \quad (4.26)$$

Заметим, что единичный вектор в направлении вектора плотности потока числа частиц называется *кинематической скоростью среды*, а собственный времениподобный единичный вектор ТЭИ частиц называется *динамической скоростью среды*, собственное же значение ТЭИ, соответствующее этому вектору, называется *плотностью энергии среды* (см., например, [16]).

Таким образом в состоянии ЛТР кинематическая скорость частиц совпадает с их динамической скоростью и равна V^i . Плотность энергии частиц равна согласно (4.19)

$$\mathcal{E}_p(x) = \sum_a \mathcal{E}_a, \quad (4.27)$$

а изотропное давление всех сортов частиц:

$$P_p(x) = \sum_a P_a, \quad (4.28)$$

где $\mathcal{E}_a$ и P_a , описываются формулами (4.21) и (4.22).

Рассмотрим теперь T-неинвариантные взаимодействия, предполагая, однако, что распределение частиц остается локально равновесным, т.е., (4.10). Но тогда тождественно выполняются функциональные соотношения (4.2). Но тогда скорость изменения энтропии равна нулю, т.е., мы снова

получаем условие ЛТР (4.1). Итак, энтропия системы всегда сохраняется, если распределение частиц является локально равновесным.

Обратимся теперь к уравнениям переноса (3.20). В условиях ЛТР вследствие (4.3) эти уравнения принимают более простую форму:

$$\nabla_i \sum_A \int_P \psi f p^i d\pi - \sum_A \int_P f [\mathcal{H}, \Psi] d\pi = - \sum_k \int_P \delta^{(4)}(P_F - P_I) \sum_A \nu_A^k \psi_A Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \quad (4.29)$$

Полагая, в частности, $\psi_A = \delta_A^a$, получим из (4.29):

$$\nabla_i n_a^i = - \sum_k \nu_A^k \int_P \delta^{(4)}(P_F - P_I) Z_{if} (W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi. \quad (4.30)$$

Проведем в правой части (4.30) интегрирование по конечным состояниям частиц:

$$\sum \nu_A^k \int \prod_f (1 \pm f) (W_{if} - W_{fi}) d\pi_f.$$

Вследствие унитарности S -матрицы и оптической теоремы (см. [13]) этот интеграл равен нулю. Поэтому в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц:

$$\nabla_i n_a^i = 0 \Leftrightarrow N_a = \text{Const}. \quad (4.31)$$

5. Глобальное термодинамическое равновесие

В случае, когда функции распределения (4.10) (или (4.15)) являются точными решениями кинетических уравнений, статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии* (ГТР). В условиях ГТР выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта (4.31), и энтропия системы строго постоянна $S = \text{Const}$. Для нахождения условий ГТР в случае Т-инвариантных взаимодействий, подставим решения (4.10) в кинетические уравнения. Поскольку интеграл Т-инвариантных взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, приведем кинетические уравнения к виду:

$$[\mathcal{H}_a, \phi_a] = 0, \quad (5.1)$$

где:

$$\phi_a(x, P) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi, P) - \lambda_a(x).$$

Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный интеграл движения, причем ξ^i - времениподобный вектор.

Разрешая (5.1), получим систему необходимых и достаточных условий существования ГТР [8], [17]:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ik} = \sigma g_{ik}; \quad (5.2)$$

$$m_a \left[(m_a + q_a \Phi) \sigma + q_a \mathcal{L}_\xi \Phi \right] = 0; \quad (5.3)$$

$$e_a \mathcal{L}_\xi A_i = \lambda_{a,i}. \quad (5.4)$$

В случае, когда $m_a \neq 0$, получим из (5.2):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{ik} (m_a + q_a \Phi) &= 0; \\ e_a \mathcal{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} \quad (m_a \neq 0). \quad (5.5)$$

Для системы безмассовых частиц $m_a \equiv 0$ эти условия заменяются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \sigma g_{ik} &= 0; \\ e_a \mathcal{L}_\xi A_i &= \lambda_{a,i} \end{aligned} \right\} \quad (m_a \equiv 0). \quad (5.6)$$

Если же в равновесии находится более одного сорта частиц, (5.5) заменяются более жесткими условиями [8]:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_\xi g_{ik} &= 0; \\ \mathcal{L}_\xi \Phi &= 0; \\ e_a \mathcal{L}_\xi A_i &= \lambda_{,i}^a \end{aligned} \right\} \quad (m_a \neq 0). \quad (5.7)$$

Вследствие условий на векторный потенциал, которые справедливы во всех случаях, выполняется закон сохранения модифицированного химического потенциала [8]:

$$\mathcal{L}_\xi \lambda_a' = 0; \quad (\lambda_a' = \lambda_a - e_a(\xi, A)). \quad (5.8)$$

Поскольку все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров ξ^2 , λ_a' , Φ и тензоров ξ^i , g^{ik} , $\xi^i \xi^k$, ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [8]:

$$\mathcal{L}_\xi n_a^i = 0; \quad (5.9)$$

$$\mathcal{L}_\xi J^i = 0; \quad (5.10)$$

$$\mathcal{L}_\xi T_a^{ik} = 0 \quad (5.11)$$

и т.д. В [21], [22] показано, что необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнений (5.8) относительно λ_a являются:

$$\mathcal{L}_\xi F_{ij} = 0. \quad (5.12)$$

Для доказательства (5.12) достаточно вычислить вторые смешанные производные от обеих частей уравнения:

$$e_a \mathcal{L}_\xi A_i = \lambda_{,i}^a$$

и приравнять их. После коммутации производных $\mathcal{L}_i$ и ковариантных производных получим (5.12).

Вследствие первой группы уравнений (5.7) вдоль направления ξ^i сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\mathcal{L}_\xi R_{ijkl} = 0; \quad \mathcal{L}_\xi R_{ij} = 0; \quad \mathcal{L}_\xi G_{ij} = 0. \quad (5.13)$$

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\mathcal{L}_\xi T_{ij} = 0. \quad (5.14)$$

6. Глобальное термодинамическое равновесие самогравитирующей системы со скалярным взаимодействием частиц

Этот случай был рассмотрен в [13, 17]. Условия глобального равновесия принимают вид:

$$\lambda_a = \text{Const}; \quad \mathcal{L}_\xi \Phi = 0; \quad \mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0. \quad (6.1)$$

Плотность энергии и давление плазмы определяются формулами (4.21) и (4.22), в которых следует положить: $A_i = 0$, т.е., определяются двумя скалярами $\xi(x)$ и $\Phi(x)$. В целях общности изложения рассмотрим неконформно инвариантное скалярное поле.⁶ Вычисляя производную $\mathcal{L}_i$ от суммарного ТЭИ, получим:

$$\begin{aligned} & \xi_i \xi_k \mathcal{L}_\lambda \left(\frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} \right) + \left(\xi_{\lambda}^i \xi_k + \xi_{\lambda}^k \xi_i \right) \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{,\lambda}^i \Phi_{,k} + \Phi_{,\lambda}^k \Phi_{,i} \right) - \\ & - g_{ik} \left[\mathcal{L}_\lambda P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi^{,j} \Phi_{,j} - \mu_s^2 \Phi \Phi \right) \right] = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}), \end{aligned} \quad (6.2)$$

⁶ Для случая конформно инвариантного скалярного поля результаты не нуждаются в исправлении.

где:

$$\Phi_{\lambda} \stackrel{def}{=} L_{\lambda} \Phi; \quad \Phi_{\lambda,i} \stackrel{def}{=} L_{\lambda} \Phi_{,i} = \partial_i \Phi_{\lambda}; \quad (6.3)$$

$\epsilon_s = \pm 1$ (плюс и минус соответствуют отталкивающимся и притягивающимся барионам).

В случае, если:

$$L_{\lambda} P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi^{,j} \Phi_{\lambda,j} - \mu_s^2 \Phi_{\lambda} \Phi_{\lambda} \right) \neq 0,$$

при каждом фиксированном λ , то метрический тензор может быть выражен, как нетрудно убедиться, через три вектора, но в этом случае он вырожден (т.е., $g = 0$), чего не должно быть. Из (6.3) следует тогда, что должны выполняться $11r$ условий:

$$L_{\lambda} P + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi^{,j} \Phi_{\lambda,j} - \mu_s^2 \Phi_{\lambda} \Phi_{\lambda} \right) = 0; \quad (6.4)$$

$$\xi_i \xi_k L_{\lambda} \frac{\mathcal{E} + P}{\xi^2} + \left(\xi_{\lambda,i} \xi_k + \xi_{\lambda,k} \xi_i \right) + \frac{\epsilon_s}{4\pi} \left(\Phi_{\lambda,i} \Phi_{,k} + \Phi_{\lambda,k} \Phi_{,i} \right) = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (6.5)$$

Свертывая (6.5) с $\xi^i \xi^k$ и учитывая (6.1), получим:

$$L_{\lambda} (\mathcal{E} + P) = 0, \quad (6.6)$$

а свертывая (6.5) с $\xi^i \Phi^k$, учитывая (6.1) и очевидное соотношение:

$$\left(\frac{\xi}{\lambda}, \Phi \right) = \left(\xi, \frac{\Phi}{\lambda} \right),$$

получим:

$$\left(\frac{\xi}{\lambda}, \Phi \right) \left[\mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi} (\Phi, \Phi) \right] = 0. \quad (6.7)$$

Свертка (6.5) с $\Phi'^i \Phi^{,k}$ приводит к результату:

$$(\Phi, \Phi) (\Phi, \Phi) = 0. \quad (6.8)$$

Для решения (6.7) предположим сначала:

$$(\xi, \frac{\Phi}{\lambda}) = 0. \quad (6.9)$$

Тогда свертывая (6.5) с ξ^k и учитывая очевидное соотношение:

$$L_{\lambda} \xi^2 = 2(\xi, \frac{\xi}{\lambda}),$$

найдем:

$$\frac{\xi}{\lambda}_{,i} = \frac{\xi_i}{\xi} L_{\lambda} \xi, \quad (6.10)$$

откуда получим:

$$L_{\lambda} v_i = 0 \quad (6.11)$$

и приведем уравнение (6.5) к виду:

$$\Phi_{\lambda,i} \Phi_{,k} + \Phi_{\lambda,k} \Phi_{,i} = 0. \quad (6.12)$$

В случае:

$$\Phi_{,i} \neq 0 \quad (6.13)$$

единственным решением (6.12) является:

$$\Phi_{\lambda,i} = 0. \quad (6.14)$$

Тогда (6.4) сводится к соотношению:

$$\mathcal{L}_\lambda \left(P - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{8\pi} \Phi^2 \right) = 0. \quad (6.15)$$

Рассмотрим другой вариант решения уравнения (6.7):

$$\mathcal{E} + P - \frac{\epsilon_s}{4\pi} (\Phi, \Phi) = 0; \quad (6.16)$$

тогда из (6.5) получим:

$$(\Phi, \Phi) = 0. \quad (6.17)$$

Свертывая (6.5) с $\Phi_{,\lambda}{}^{,k}$ и учитывая (6.16) и (6.17), найдем:

$$(g^{ik} - v^i v^k) \Phi_{,\lambda}{}^{,k} = 0. \quad (6.18)$$

Используя (6.1), найдем из (6.18) $\Phi_{,\lambda}{}^{,k} = 0$, т.е., снова приходим к (6.10), (6.11), (6.14) и (6.15).

Согласно (6.4), (6.5) скаляры $\mathcal{E}$ и P могут зависеть от координат лишь посредством функций $\xi(x)$ и $\Phi(x)$. Из уравнений (6.6) и (6.15) получим систему однородных алгебраических уравнений относительно Φ и ξ :

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \xi_\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial \Phi} - \frac{\epsilon_s \mu_s^2}{4\pi} \Phi \right) \Phi_\lambda = 0; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \xi} \xi_\lambda + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \Phi} \Phi_\lambda = 0. \quad (6.20)$$

В случае, если определитель этой системы отличен от нуля, получаем:

$$\Phi_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda \Phi = 0; \quad (6.21)$$

$$\xi_\lambda \equiv \mathcal{L}_\lambda \xi = 0. \quad (6.22)$$

Но тогда из (6.6), (6.10), (6.12) и (6.22) следует:

$$\mathcal{L}_\lambda \mathcal{E} = 0; \quad \mathcal{L}_\lambda P = 0; \quad (6.23)$$

$$\mathcal{L}_\lambda \xi = 0; \quad (\lambda = \overline{1, r}). \quad (6.24)$$

В случае же равенства нулю определителя системы (6.19) - (6.20) легко показать, что:

$$\Phi = \Phi(\xi); \quad \mathcal{E} + P = \text{Const}.$$

Из (4.21), (4.22) вытекает, что это возможно лишь при $\xi = \text{Const}$, но тогда и $\Phi = \text{Const}$, т.е., вновь получаем условия (6.21) - (6.24). Достаточность же этих условий для сохранения суммарного ТЭИ при движении вдоль траекторий G^r проверяется элементарно.

Таким образом, и *глобальное равновесие самогравитирующей статистической системы со скалярным взаимодействием частиц возможно лишь в том случае, когда пространство - время допускает группу движений с времениподобным центром, вдоль которого происходит макроскопическое движение системы.*

7. Макроскопические плотности

7.1. Полностью вырожденный газ Ферми

При условии полного вырождения

$$\frac{\mu}{\theta} \rightarrow \infty. \quad (7.1)$$

(μ - химический потенциал, θ - температура) локально - равновесная функция распределения Ферми - системы является ступенчатой функцией (см., например, [19]), которая для релятивистских скалярно заряженных фермионов принимает вид [6]:

$$f^0(x, P) = \chi_+(\mu - \sqrt{m_*^2 + p^2}), \quad (7.2)$$

где $\chi_+(z)$ - функция Хевисайда;

$$m_* = |m + q\Phi|, \quad (7.3)$$

– эффективная масса фермионов, q - скалярный заряд фермионов, Φ - потенциал скалярного поля, m - вакуумная масса фермионов. В этом случае макроскопические плотности выражаются в элементарных функциях [13]:

$$\varepsilon_f = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (7.4)$$

$$p_f = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (7.5)$$

$$T_f = \varepsilon_f - 3p_f = \frac{m_*^4}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (7.6)$$

$$\varepsilon_f + p_f = \frac{m_*^4}{3\pi^2} \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}; \quad (7.7)$$

$$\sigma = \frac{q}{m_*} T_f = \frac{q \cdot m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (7.8)$$

где

$$\psi = p_F / |m_*| \quad (7.9)$$

– отношение импульса Ферми к эффективной массе, $\varepsilon_f, p_f, \sigma$ - плотность энергии, давление и плотность скалярного заряда фермионов, соответственно⁷. В качестве уравнения скалярного поля рассмотрим уравнение массивного скалярного поля с массой бозонов μ [?]:

$$\square \Phi + \mu^2 \Phi = -4\pi\sigma. \quad (7.10)$$

Плотность числа фермионов, n , связана с импульсом Ферми соотношением [19]:

$$n(x) = \frac{p_f^3}{3\pi^2} \Rightarrow p_f = (3\pi^2 n(x))^{\frac{1}{3}}. \quad (7.11)$$

Таким образом, переменную ψ можно выразить через два скаляра - плотность числа частиц в собственной системе отсчета, $n(x)$, и скалярный потенциал, $\Phi(x)$:

$$\psi = \frac{(3\pi^2 n(x))^{\frac{1}{3}}}{|m + q\Phi|}. \quad (7.12)$$

⁷Подробности см. в [?].

8. Самосогласованная система уравнений для плоской модели Фридмана

Рассмотрим космологическую ситуацию, когда материя представлена лишь вырожденной Ферми – системой скалярно взаимодействующих частиц и связанных с ними скалярным полем, описываемых уравнением (7.10) (см. [5]). В качестве метрики выберем метрику пространственно-плоской модели Фридмана [14]):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (8.1)$$

в которой независимые уравнения Эйнштейна имеют форму:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\varepsilon; \quad (8.2)$$

$$3\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon + P}. \quad (8.3)$$

В этой метрике закон сохранения числа частиц принимает форму⁸:

$$\partial_t \sqrt{-g}n = 0,$$

откуда с учетом (7.11) получим интеграл импульса [5]:

$$ap_F = \text{Const}. \quad (8.4)$$

Полагая далее $\Phi = \Phi(t)$, получим $\varepsilon = \varepsilon(t)$ $p = p(t)$ и структуру тензора энергии - импульса скалярного поля в форме тензора энергии-импульса идеальной жидкости с макроскопической скоростью $v^i = \delta_4^i$ и плотностью энергии $\varepsilon_s(t)$ и давлением $p_s(t)$:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \mu_s^2\Phi^2); \quad p_s = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{3}\dot{\Phi}^2 - \mu_s^2\Phi^2\right). \quad (8.5)$$

Дифференцируя (8.5) и подставляя результат в (8.3), можно убедиться в том, что полученное уравнение является следствием уравнения поля (7.10), которое в метрике (8.1) принимает вид:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left(a^3 \frac{d\Phi}{dt} \right) + \mu^2 \Phi = -4\pi\sigma. \quad (8.6)$$

Таким образом, в качестве независимых уравнений можно выбрать уравнение поля (8.6) и первое из уравнений Эйнштейна (8.2), которое с учетом положительности скорости расширения ($\dot{a} > 0$) запишем в виде:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\varepsilon}, \quad (8.7)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_s$$

– суммарная плотность энергии фермионов и скалярного поля.

Проведем анализ возможного космологического поведения системы вырожденных скалярно заряженных фермионов. Из выражений для макроскопических плотностей (7.4), (7.5) можно получить соотношение:

$$p_f = \frac{1}{3}\varepsilon_f - \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[4\psi\sqrt{1+\psi^2} - 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right]. \quad (8.8)$$

Можно показать, что выражение в квадратных скобках правой части (8.8) неотрицательно при неотрицательных $\psi \geq 0$. Поэтому выполняется строгое неравенство:

$$0 \leq p_f \leq \frac{1}{3}\varepsilon_f. \quad (8.9)$$

Аналогично из (8.5) найдем соотношение для скалярного поля:

$$p_s = \frac{1}{3}\varepsilon_s - \frac{1}{6\pi}\mu^2\Phi^2, \quad (8.10)$$

⁸Всюду $G = \hbar = c = 1$, время и масса измеряются в планковских единицах.

Таким образом и для скалярного поля выполняется строгое неравенство:

$$p_s \leq \frac{1}{3}\varepsilon_s. \quad (8.11)$$

Вычислим теперь *коэффициент баротропии*, как коэффициент $\varkappa$ в линейном соотношении между суммарным давлением и плотностью энергии материи:

$$p = \varkappa \varepsilon. \quad (8.12)$$

В результате найдем:

$$\varkappa(t) = \frac{1}{3} - \frac{m_*^4 G(\psi) + 4\pi\mu^2 \Phi^2}{24\pi^2(\varepsilon_s + \varepsilon_f)}, \quad (8.13)$$

где:

$$G(\psi) = 4\psi\sqrt{1+\psi^2} - 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}).$$

Таким образом, можно показать, что для исследуемой системы всегда выполняется соотношение:

$$\Rightarrow -1 \leq \varkappa(t) \leq \frac{1}{3}. \quad (8.14)$$

Таким образом, для космологического ускорения, ω , Вселенной, состоящей из вырожденных фермионов и скалярного поля,

$$\omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3\varkappa), \quad (8.15)$$

получим ограничение:

$$-1 \leq \omega \leq 1. \quad (8.16)$$

9. Численное решение уравнений Эйнштейна для вырожденной плазмы со скалярным полем

Попытки прямого численного интегрирования системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона (8.2), (7.10) в большинстве случаев не дают результатов вследствие нелинейного характера этих уравнений и неоднозначности функций радикалов и логарифмов в правых частях уравнений. Поэтому для численного решения системы уравнений Эйнштейна выражения для макроскопических плотностей были экстраполированы с помощью элементарных аналитических функций. Как видно из (7.4)-(7.8), все эти выражения с учетом интеграла (8.4) с точностью до умножения на конформный множитель $1/a^4$ являются элементарными функциями лишь одной безразмерной функции ψ :

$$m_*^4 = \left(\frac{a_0 p_F^0}{a\psi} \right)^4. \quad (9.1)$$

Это факт позволяет найти интерполяционные выражения для соответствующих конформных плотностей:

$$\tilde{p}_f = a^4 P_f; \quad \tilde{\varepsilon}_f = a^4 \varepsilon_f; \quad \tilde{\sigma} = a^4 \sigma. \quad (9.2)$$

Интерполяционные аналитические функции для плотности энергии, давления и плотности зарядов на всем исследуемом диапазоне можно записать в виде:

$$\tilde{p}_f = \frac{8}{15}e^{-2\psi}\psi + \frac{2\psi^2}{3(1+\psi^2)} \quad (9.3)$$

$$\tilde{\varepsilon}_f = \frac{\left(1 - e^{-2\psi-2\psi^2}\right) \left(\frac{38}{15} + \frac{4}{3\psi^2} + \frac{8\psi^2}{15}\right)}{1 + \frac{4\psi^2}{15}} \quad (9.4)$$

$$\tilde{T}_f = \frac{\left(1 - e^{-2\psi-2\psi^2}\right) \left(\frac{38}{15} + \frac{4}{3\psi^2} + \frac{8\psi^2}{15}\right)}{1 + \frac{4\psi^2}{15}} - \frac{8}{5}e^{-2\psi}\psi - \frac{2\psi^2}{1+\psi^2}. \quad (9.5)$$

Очевидно, что вследствие большого количества существенных параметров модели, (4 параметра, p_f, m, μ, q), и начальных условий, (2 независимых условия, $\Phi(0), \dot{\Phi}(0)$), рассматриваемая

космологическая модель чрезвычайно богата типами поведения. Рассмотрим поэтому основные из них. Ниже приведены результаты численных решений полученных уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона для вырожденной Ферми-системы в прикладном математическом пакете Mathematica. v7.

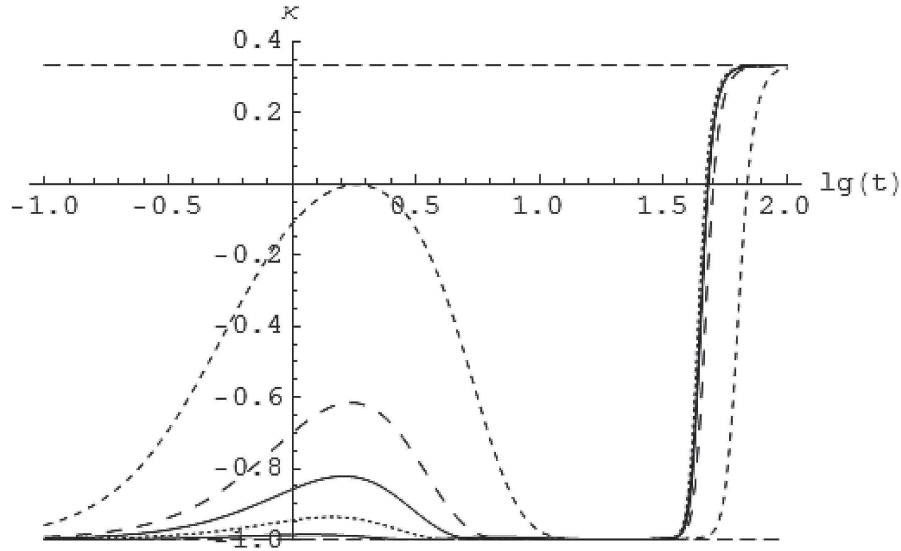


Рис. 1. Эволюция коэффициента баротропии в зависимости от массы скалярного поля. Частая пунктирная линия: $\mu = 0, 3$; пунктирная линия: $\mu = 0, 1$; разреженная пунктирная линия - $\mu = 0, 2$; сплошная линия: $\mu = 0, 25$; сплошная жирная линия: $\mu = 0, 35$. Всюду: $p_F = 0, 01$; $m = 1$; $q = 0, 3$; $\Phi(0) = 1$; $\dot{\Phi}(0) = 0$.

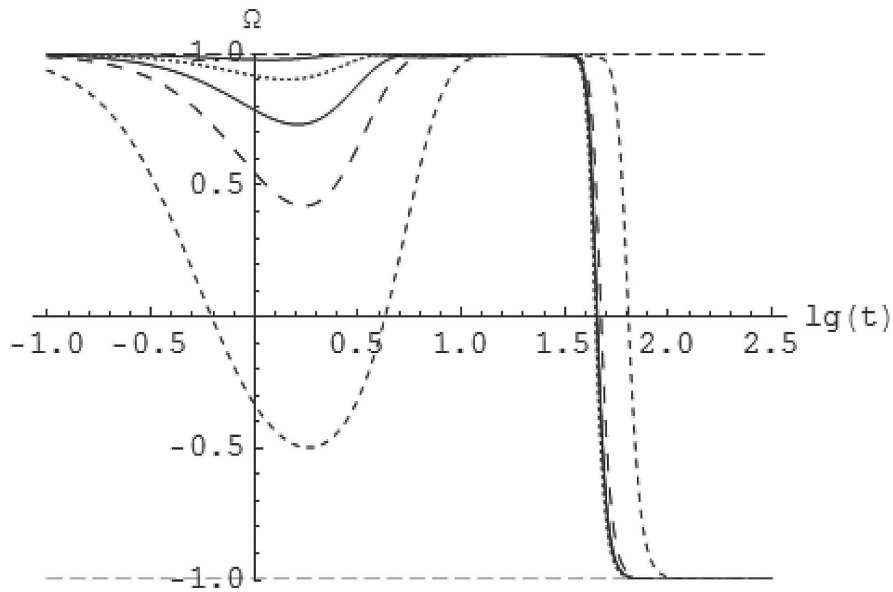


Рис. 2. Эволюция космологического ускорения в зависимости от массы скалярного поля. Частая пунктирная линия: $\mu = 0, 3$; пунктирная линия: $\mu = 0, 1$; разреженная пунктирная линия - $\mu = 0, 2$; сплошная линия: $\mu = 0, 25$; сплошная жирная линия: $\mu = 0, 35$. Всюду: $p_F = 0, 01$; $m = 1$; $q = 0, 3$; $\Phi(0) = 1$; $\dot{\Phi}(0) = 0$.

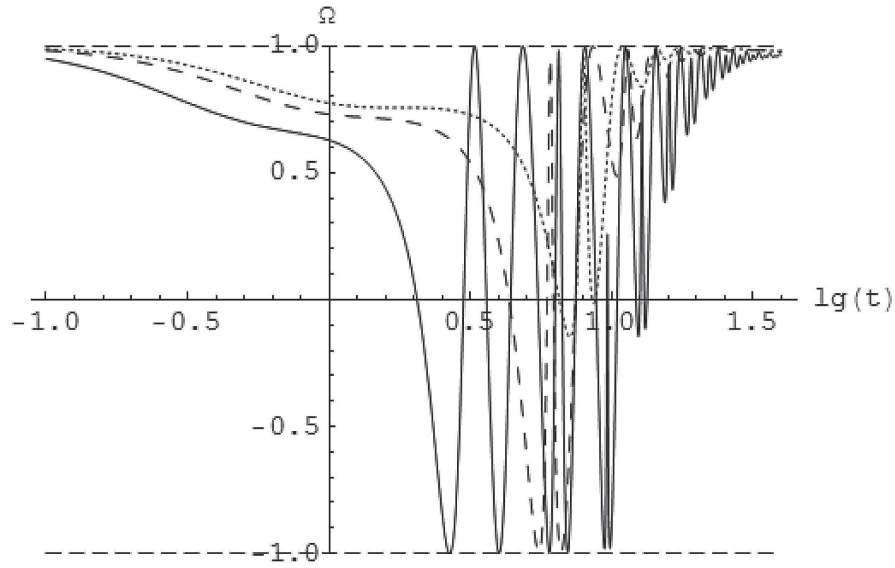


Рис. 3. Эволюция космологического ускорения в зависимости от массы скалярного поля.
Частая пунктирная линия: $\mu = 1$; пунктирная линия: $\mu = 1, 2$; сплошная линия: $\mu = 2$;
сплошная жирная линия: $\mu = 0, 35$. Всюду: $p_F = 0, 01$; $m = 1$; $q = 0, 3$; $\Phi(0) = 1$; $\dot{\Phi}(0) = 0$.

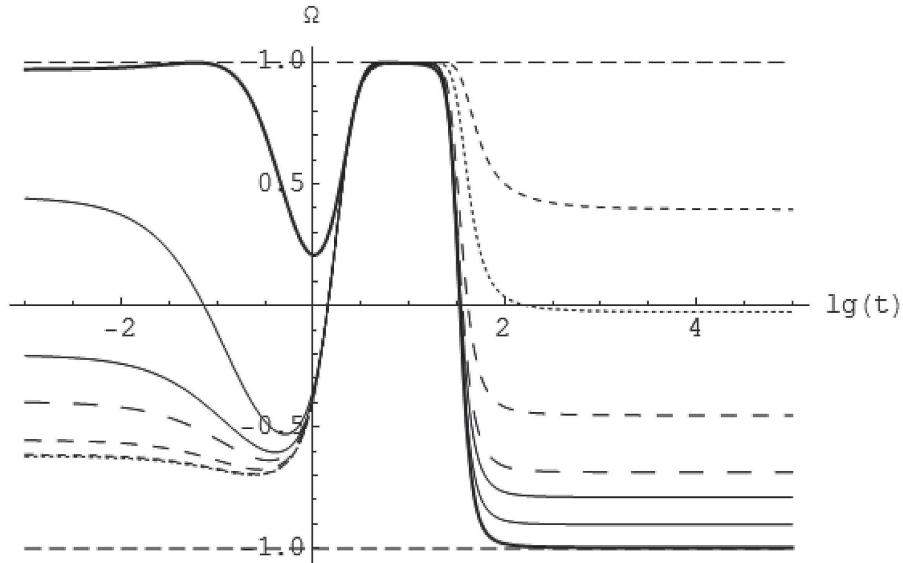


Рис. 4. Эволюция космологического ускорения в зависимости от массы фермионов.
Частая пунктирная линия: $m = 0$, пунктирная линия: $m = 0, 001$, разреженная пунктирная
линия: $m = 0, 01$, еще более разреженная пунктирная линия: $m = 0, 03$, сплошная тонкая
линия: $m = 0, 05$, сплошная линия: $m = 0, 1$, сплошная жирная линия: $m = 1$. Всюду:
 $p_F = 0, 01$; $\mu = 0, 3$; $q = 1$; $\Phi(0) = 1$; $\dot{\Phi}(0) = 0$.

Приведем решения, которые переходят на ускоренную космологическую фазу с максимальным ускорением. Эти решения соответствуют весьма малым значениям фундаментального заряда.

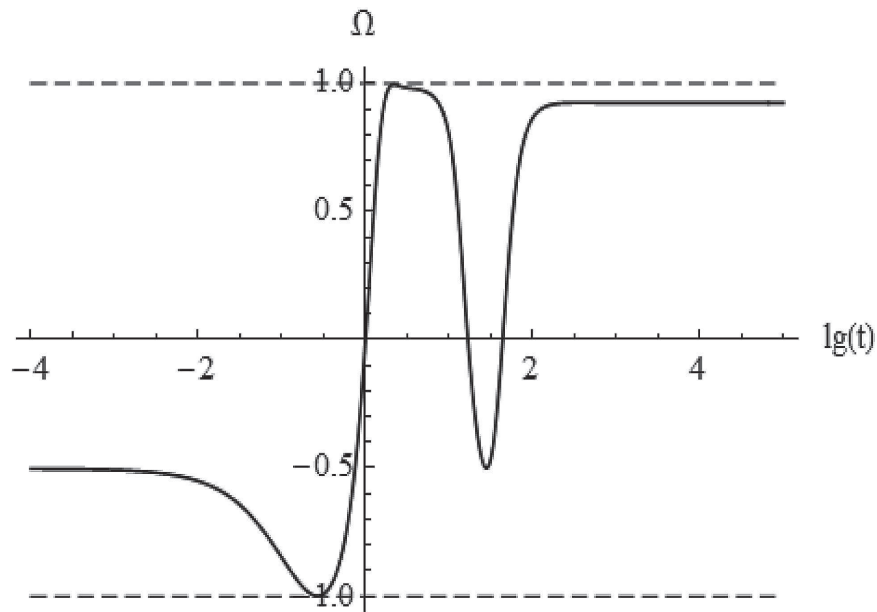


Рис. 5. Эволюция космологического ускорения, ω при $p_F = 0$; $m = 1$; $\mu = 0,001$; $q \rightarrow 0$.

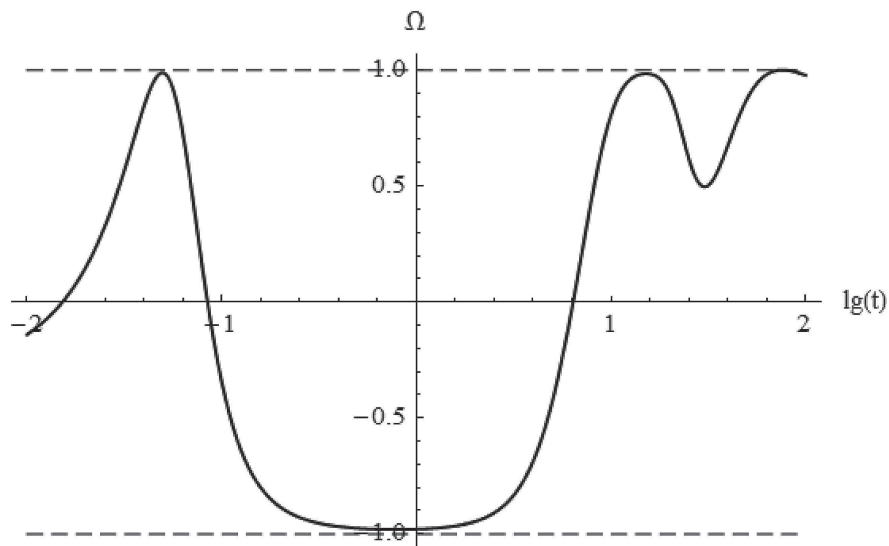


Рис. 6. Эволюция космологического ускорения, ω , при $p_F = 0$; $m = 1$; $\mu = 0,1$; $q \rightarrow 0$.

10. Выводы

Таким образом, можно констатировать, что:

- Поведение космологической модели чрезвычайно сильно зависит от фундаментальных констант q , μ и m и весьма богато разнообразием типов;
- Существуют области фундаментальных констант и начальных условий, в которых космологические модели выходят на устойчивое позднее ускорение;
- Выход на стадию позднего ускорения может быть как плавным, так и сопровождаться колебаниями ускорения;
- Конечное ускорение постоянно и может меняться в диапазоне $-1 \leq \omega \leq 1$.

Таким образом, постоянное ускорение (замедление) носит общий характер.

Благодарности

Автор благодарен профессорам В.Н. Мельникову, Д.В. Гальцову и А.А. Грибу за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Гальцов и Е. Давыдов. // В кн.: Квантовая теория и космология. – Санкт-Петербург: Изд-во Фридмановской лаборатории. – 2009. – С. 25–44.
2. Ю.Г. Игнат'ев, Р.Ф. Мифтахов. // Труды II-й Российской летней школы «Современные теоретические проблемы гравитации и космологии». – 2009. – Казань. Изд-во «Фолиантъ». – С. 76–83.
3. V.M. Zhuravlev, R.R. Abbyazov. // *Gravitation and Cosmology*, bf 16, No 1, 50, (2010).
4. В. М. Журавлев. // ЖЭТФ, **120**, 1042, (2001).
5. Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // *Gravitation & Cosmology*. – 2006. – **12**, No 2–3. – p.179-184; Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. // arXiv:1011.5774[gr-qc].
6. Ю.Г. Игнат'ев. // Известия вузов, Физика. – 1982. – № 4. – С. 92–93.
7. Ю.Г. Игнат'ев. // Известия вузов, Физика. – 1983. – № 8. – С. 15–19.
8. Ю.Г. Игнат'ев. // Известия вузов, Физика. – 1983. – № 8. – С. 19–23.
9. Ю.Г. Игнат'ев. // Известия вузов, Физика. – 1983. – № 12. – С. 9–13.
10. Г.Г. Иванов. // Известия вузов, Физика. – 1983. – № 1. – С. 32–36.
11. Yu.G. Ignatev and A.A. Popov. // *Actrophysics and Space Science*. – 1990. – Vol. 163. – p. 153-174; Yu.G. Ignatyev, A.A. Popov. // arXiv:1101.4303v1 [gr-qc].
12. Yu. G. Ignat'ev. // *Russian Physics Journal Volume 55, Number 2* (2012), 166-172, DOI: 10.1007/s11182-012-9790-9.
13. Ю.Г. Игнат'ев Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов в гравитационных полях. – Казань: «Фолиантъ». – 2010. – 506 с.; <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>.
14. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М, Наука, 1973. – 504 с.
15. А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука. – 1966. – 496 с.
16. J.L. Syng. *Relativity: The General Theory*. – North-Holland Publishing Company. Amsterdam. – (1960).
17. Ю.Г. Игнат'ев, Р.Р. Кузеев. // Укр. физ. журнал. – Т. 29. – 1984. – С. 1021–1026.
18. Черников Н.А. // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144. – С. 544–547.
19. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. М, Наука, 1964.
20. Chernikov N.A. // *Acta Phys. Polon.* – 1965. – Vol. 27. – pp. 723–739.
21. Игнат'ев Ю.Г. // Укр. физ. журнал. – Т. 21. – № 12. – 1976. – С. 1970–1977.
22. Игнат'ев Ю.Г. // Гравитация и теория относительности. Под ред. Кайгородова В.Р. – Казань: изд-во КГУ. – вып. 17. – 1980. – С. 56–70.

Поступила в редакцию 06.04.2014

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics. I.

Keywords: Microscopic dynamics, Local thermodynamic equilibrium, Relativistic kinetics, Scalar fields, Acceleration.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

From the microscopic equations of Hamilton on the basis general relativistic kinetic theory the self-consistent is deduced the system of the macroscopical equations describing the cosmological plasma, in which probably interpartial scalar interaction. Questions of the theory of thermodynamic equilibrium in relativistic statistical systems with interpartial scalar interaction are considered. The problems of numerical modeling of the cosmological expansion of one-component scalar degenerate plasma of charged particles are considered too.

REFERENCES

- [1] D. Galtsov and E. Davidov. In : *Quantum Theory and Cosmology*. Sankt-Peterburg. Freedman Laboratory. – 2009. – pp. 25–44. (in Russian)
- [2] Yu.G. Ignat'ev, R.F. Miftakhov. Trudi ii-Rossijskoj shkoli «Actual Theoretical Problems of Gravitation and Cosmology» (Gracos-2009). – 2009. – Kazan, Russia. Publ. «Foliant». – pp. 76–83.
- [3] V.M. Zhuravlev, R.R. Abbyazov. *Gravitation and Cosmology*, V. 16, No 1, 50, (2010).
- [4] V. M. Zhuravlev. *JETP*, **120**, 1042, (2001).
- [5] Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. *Gravitation & Cosmology*. – 2006. – **12**, No 2–3. – p.179–184; see too: Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov. arXiv:1011.5774[gr-qc].
- [6] Yu.G. Ignat'ev. *Journal Sov. Phys. (Izvestia Vuzov)*. – 1982. – Vol. 25, No 4. – pp. 92–93.
- [7] Yu.G. Ignat'ev. *Journal Sov. Phys. (Izvestia Vuzov)*. – 1983. – Vol. 26, No 8. – pp. 15–19.
- [8] Yu.G. Ignat'ev. *Journal Sov. Phys. (Izvestia Vuzov)*. – Vol. 26, No 8. – pp. 19–23.
- [9] Yu.G. Ignat'ev. *Journal Sov. Phys. (Izvestia Vuzov)*. – 1983. – Vol. 26, – No 12. – pp. 9–13.
- [10] G.G. Ivanov. *Journal Sov. Phys. (Izvestia Vuzov)*. – 1983. – Vol. 26, – No 1. – pp. 32–36.
- [11] Yu.G. Ignatev and A.A. Popov. *Actrophysics and Space Science*. – 1990. – 163. – p. 153–174; Yu.G. Ignatyev, A.A. Popov. arXiv:1101.4303v1 [gr-qc].
- [12] Yu. G. Ignat'ev. *Russian Physics Journal*, Volume 55, Number 2 (2012), 166–172, DOI: 10.1007/s11182-012-9790-9.
- [13] Yu.G. Ignat'ev. *Relativistic Kinetics of Nonequilibrium Processes in a Gravitation Fields*. – Kazan: Foliant Publ. – 2010; <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>.
- [14] L.D. Landau, E.M. Lifshits. *Theory of Field*. Moskow, Nauka Publ., 1973.
- [15] A.Z. Petrov. *New Methods in General Relativity Theory*. – Moscow.: Nauka Publ. – 1966.
- [16] J.L. Syng. *Relativity: The General Theory*. – North-Holland Publishing Company. Amsterdam. – (1960).
- [17] Yu.G. Ignat'ev, R.R. Kuzeev. *Ukr. Fiz. Journal*. – V. 29. – 1984. – pp. 1021–1026.
- [18] N.A. Chernikov. *Dokl. Acad. Nuuk USSR*. – 1962. – V. 144. – pp. 544–547.
- [19] L.D. Landau, E.M. Lifshits. *Sttatistics Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1964.
- [20] Chernikov N.A. *Acta Phys. Polon.* – 1965. – Vol. 27. – pp. 723–739.
- [21] Yu.G. Ignat'ev, *Ukr. Fiz. Journal*. – V. 21. – No 12. – pp. 1970–1977.
- [22] Yu.G. Ignat'ev. In: *Grav. and. Theory Relativity*. – Kazan, Russia, Kazan University Publ. – Issue 17. – 1980. – pp. 56–70.

Received 06.04.2014

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru