УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов,[1] ***Е. В. Савельев*** [2]

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ. III. «ВНУТРЕННЕЕ» РЕШЕНИЕ

На основе ранее предложенного подхода, связанного с сведением эквивалентной задачи по движению массивной частицы в силовом потенциальном поле, строится один из вариантов открытой космологической модели, описывающей гравитационное поле вблизи начала Вселенной. Показано, что если эволюция открытой модели Вселенной начиналась с мира де Ситтера, то дальнейшее ее развитие,отвечающее убывающему квадратичному потенциалу, существенно неустойчиво с точки зрения теории катастроф. Чтобы мир эволюционировал устойчиво, необходима смена модели, соответствующая деформированному убывающему квадратичному потенциалу, что предполагает введение постоянной возмущающей силы, связанной с диссипацией или рождением частиц.

Ключевые слова: точные решения уравнений Эйнштейна, открытые космологические модели, уравнение Ньютона, функция состояния, теория катастроф.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

Введение

В работе [1] были найдены точные решения космологических уравнений Эйнштейна, обобщающие решения Фридмана на случай Вселенной, заполненной идеальной жидкостью с переменным уравнением состояния. Был использован подход Фока ([2]- [3]), в котором метрика 4-мерного пространства-времени является конформно-галилеевой и конформный множитель есть функция одной переменной:

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{0.1}$$

где $exp(2\sigma)$ – конформный множитель; $\sigma = \sigma(S)$; $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2$; $\delta_{\mu\nu} = diag(1; -1; -1; -1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\varkappa = 8\pi$.

Правую часть уравнений Эйнштейна (без космологической постоянной)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{0.2}$$

запишем в приближении идеальной жидкости с тензором энергии-импульса (ТЭИ)

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{0.3}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = exp(\sigma)b_\mu$ пропорциональна градиенту переменной S как функции координат x^μ : $b_\mu = S,_\mu$; $u_\mu u^\mu = 1$ – условие нормировки 4-скорости; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ есть 3-проектор на 3-пространство, который играет роль метрического тензора для 3-пространства, при этом выполняется условие ортогональности 3-пространства и временноподобной конгруэнции u^μ : $b_{\mu\nu}u^\mu = 0$.

В результате (1+3)-расщепления (см., например, ([4]- [5]) система уравнений (0.2) сведется к системе двух дифференциальных уравнений в полных производных:

$$3\left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2\right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma); \tag{0.4}$$

$$2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = -\varkappa p \cdot exp(2\sigma), \tag{0.5}$$

где штрих обозначает производную d/dS.

[1] E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru ; ©Баранов А.М.
[2] E-mail: editor@stfi.ru ; ©Савельев Е.В.

Заменой $\sigma = 2 \cdot ln(y)$ система (0.4)-(0.5) сводится к более простой

$$12 \cdot y' \left(y' + \frac{1}{S} \cdot y \right) = \varkappa\varepsilon \cdot y^6; \tag{0.6}$$

$$4 \cdot \left(y'' + \frac{2}{S} y' \right) = -\varkappa p \cdot y^5. \tag{0.7}$$

Легко увидеть, что в уравнении (0.7), содержащем давление, можно избавиться от первой производной с помощью замен:

$$y = z_1(1/S) \qquad \text{либо} \qquad y = z_2(S)/S, \tag{0.8}$$

где z_1 и z_2 - некоторые функции.

Здесь уместно провести аналогию с внешней и внутренней задачами в теории потенциала, где внешнее решение (решение уравнения Лапласа) зачастую ищется в первом виде, а внутреннее решение (решение уравнения Пуассона) - во втором виде.

В работе [1] мы рассмотрели возможности первой замены. Было найдено точное космологическое решение, описывающее субстанцию, которая при больших временах ($S \to \infty$) распадается на некогеретную пыль (с $p = 0$) и равновесное светоподобное излучение (с $p_{rad} = (1/3)\ \varepsilon_{rad}$), и асимтотически переходит в решение Фридмана в форме Фока [2]: $exp(2\sigma_F) = (1 - A_F/S)^4$, где A_F есть постоянная.

1. Основные моменты рассматриваемого подхода

Настоящая работа посвящена рассмотрению введения второй замены, то есть в дальнейшем будем считать, что $y = z(S)/S$. При этом попытаемся найти точные решения, свободные от сингулярности. По крайней мере, основные физические величины, характеризующие космологическую модель (конформный множитель, давление, плотность энергии, уравнение состояния) должны быть конечными.

Тогда уравнение (0.7) примет вид:

$$z'' = -\frac{\varkappa p \cdot z^5}{4S^4}, \tag{1.1}$$

Также как и в работе [1] будем трактовать это уравнение как уравнение движения в форме Ньютона и предположим, что

$$\varkappa p = 4\frac{S^4}{z^5} \cdot \frac{dU}{dz}, \tag{1.2}$$

где U - некоторая функция.

Используя уравнение (0.6), получаем выражение для плотности энергии

$$\varkappa\varepsilon = \frac{12S^4 z'(z' - z/S)}{z^6}. \tag{1.3}$$

Предположим, что функция U зависит только от z, и по аналогии с механикой будем называть ее «потенциалом». Тогда для уравнения (1.1) легко записать квадратуру с помощью «закона сохранения». Постоянная «полной энергии» E определится соответствующими граничными условиями

$$S - S_0 = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{2[E - U(z)]}} \tag{1.4}$$

Разумеется, что при достаточно простой форме потенциала можно проинтегрировать (1.4).

Функция состояния, представляющая собой отношение давления к плотности энергии, примет в данном случае вид:

$$\beta = \frac{1}{3}\frac{dU}{dS}\frac{z}{z'(z' - z/S)} \tag{1.5}$$

Эта функция ограничена естественным условием $|\beta| < 1$, которое позволяет накладывать требование отсутствия сингулярности решения при $S \to 0$, так как теоремы о неизбежности космологической сингулярности (см. [6]- [7]) существенно опираются на условие энергодоминантности, то есть на неравенство $\varepsilon + 3p > 0$, которое здесь, вообще говоря, не выполняется (см. например, [8]).

В данной работе остановимся на рассмотрении потенциалов, представляющих собой квадратичные полиномы. Это прежде всего связано с тем, что такой подход, во-первых,позволяет проводить прозрачные физические аналогии с колебаниями, фазовыми переходами и т.п. И во-вторых, при интегрировании в формуле (1.4) полиномы более высоких степеней зачастую сводятся к полиномам четвертой или третьей степеней, другими словами, к формам эллиптических функций Якоби и Вейерштрасса, как к наиболее исследованным и распространенным, но усложняющих исследование.

2. Линейный и возрастающий квадратичный потенциалы

Случай постоянного потенциала с очевидностью, как и в работе [1], приводит к решению Фридмана в форме Фока:

$$z = CS + B \Rightarrow y = C + \frac{B}{S}, \tag{2.1}$$

где C и B - некоторые константы.

Рассмотрим линейный потенциал:

$$U(z) = -Az + U_0. \tag{2.2}$$

Элементарным интегрированием получаем функцию z и функцию y:

$$z = \frac{A}{2}S^2 + BS + C; \quad y = \frac{z}{S} = \frac{A}{2}S + B + \frac{C}{S}, \tag{2.3}$$

где A, B, C - константы.

Используя формулы (1.2), (1.3) и (1.5) получаем давление, плотность энергии и функцию состояния как функции переменной S:

$$\varkappa p = -4A \cdot \frac{S^4}{(\frac{A}{2}S^2 + BS + C)^5}; \tag{2.4}$$

$$\varkappa\varepsilon = \frac{12S^3(AS + B)(\frac{A}{2}S^2 - C)}{(\frac{A}{2}S^2 + BS + C)^6}; \tag{2.5}$$

$$\beta = -\frac{A}{3} \cdot \frac{S(\frac{A}{2}S + BS + C)}{(AS + B)(\frac{A}{2}S^2 - C)}. \tag{2.6}$$

Легко увидеть, что при C отличном от нуля и $S \to \infty$ функция y (конформный множитель) стремится к бесконечности, а плотность энергии, давление и функция состояния стремятся к нулю, что нас совсем не удовлетворяет. Поэтому рассмотрим вариант, когда $C = 0$, что с точки зрения интеграла (1.4) означает выбор $z_0 = 0$ при $S_0 = 0$. Тогда функции z и y запишутся как:

$$z = \frac{A}{2}S^2 + BS = S(\frac{A}{2}S + B); \quad y = \frac{z}{S} = \frac{A}{2}S + B. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что в нуле конформный множитель конечен. Напомним, что нас, в первую очередь, интересует поведение вблизи «начала» ($S = 0$). Давление, плотность энергии и функция состояния перепишутся в виде

$$\varkappa p = -\frac{4A}{S(\frac{A}{2}S + B)^5}; \tag{2.8}$$

$$\varkappa\varepsilon = \frac{6A(AS+B)}{S(\frac{A}{2}S+B)^6}; \tag{2.9}$$

$$\beta = -\frac{2}{3}\cdot\left[1-\frac{AS}{2(AS+B)}\right] = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{B}{AS+B)}\right). \tag{2.10}$$

Теперь наблюдается несколько иная картина: при $S \to 0$ давление стремится к $p \to -\infty$ как $1/S$, а плотность энергии стремится к $\varepsilon \to +\infty$ также, как $1/S$. При этом любопытно, что функция состояния при этом стремится к $\beta = -2/3$.

В бесконечно малой окрестности нуля давление и плотность энергии выглядят как:

$$\varkappa p = -\frac{4A}{B^5}\cdot\frac{1}{S}, \quad \varkappa\varepsilon = \frac{6A}{B^5}\cdot\frac{1}{S}, \tag{2.11}$$

откуда можно сделать вывод, что константы A и B должны иметь одинаковый знак.

Интересно отметить, что при больших временах ($S \to \infty$) давление стремится к нулю со стороны отрицательных значений, а плотность энергии стремится к нулю со стороны положительных. Предельным значением функции состояния при этом является $\beta = -1/3$.

Вводя безразмерные величины $\xi = \sqrt{A}S$, $\eta_0 = B/\sqrt{A}$ и переписывая функцию состояния в виде

$$\beta = -\frac{2}{3}\cdot\left[1-\frac{\xi}{2(\xi+\eta_0)}\right] = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{\eta_0}{2(\xi+\eta_0)}\right). \tag{2.12}$$

Графически эту ситуацию можно представить как

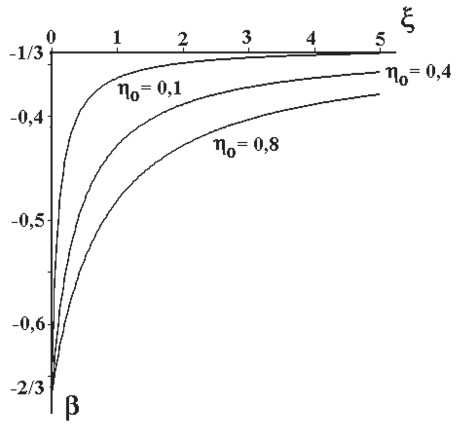

Рис. 1. Поведение функции состояния β для линейного потенциала при различных значения параметра η_0 на интервале $0 \le S \le \infty$.

Рассмотрим теперь квадратичный по z потенциал

$$U(z) = \frac{\Omega^2 z^2}{2} + U_0 \tag{2.13}$$

где Ω и U_0 - некоторые положительные константы.

Решение получаем тривиально

$$z = \sqrt{2(E-U_0)}\cdot\frac{\sin(\Omega S)}{\Omega}; \quad y = z/S = \sqrt{2(E-U_0)}\cdot\frac{\sin x}{x}, \tag{2.14}$$

где $x \equiv \Omega S$.

Видим, что конформный множитель конечен при стремлении x (то есть S) к нулю, но при этом является убывающей функцией. Более того, исследование плотности энергии, давления и функции состояния приводят к следующим результатам: в бесконечно малой окрестности точки (и самой точке) $S = 0$ все они имеют конечные значения. Самый интересный результат касается функции состояния: в пределе при $S \to 0$ имеем $\beta = -1$, то есть уравнения состояния физического вакуума,

которому отвечает решение де Ситтера. Но при этом давление положительно, а плотность энергии - отрицательна. Это не согласуется с условием неотрицательности плотности энергии. Поэтому вариант возрастающего квадратичного потенциала следует отбросить.

3. Убывающий квадратичный потенциал

Рассмотрим убывающий квадратичный по z потенциал.

$$U(z) = -\frac{\Omega^2 z^2}{2} + U_0, \tag{3.1}$$

где Ω и U_0 - по-прежнему, некоторые положительные константы.

Интеграл (1.4) берется в этом случае элементарно, и мы получаем решение, положив $S_0 = 0, z_0 = 0$,

$$z = \sqrt{2(E - U_0)} \cdot \frac{\sinh(\Omega S)}{\Omega}; \tag{3.2}$$

Функция y при этом запишется как

$$y = \frac{z}{S} = \sqrt{2(E - U_0)} \cdot \frac{\sinh(\Omega S)}{\Omega S}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что эта функция (а значит, и конформный множитель) несингулярна при $S \to 0$ и предел ее равен

$$\lim_{S \to 0} y = \sqrt{2(E - U_0)}. \tag{3.4}$$

Используя формулы (1.2) и (1.3), легко вычисляем давление и плотность энергии

$$\varkappa p = -\frac{4\Omega^2}{(E - U_0)^2} \cdot \frac{(\Omega S)^4}{\sinh^4(\Omega S)}; \tag{3.5}$$

$$\varkappa \varepsilon = 3 \cdot \frac{4\Omega^2}{(E - U_0)^2} \cdot \frac{(\Omega S)^4 \cdot \cosh(\Omega S) \left[\cosh(\Omega S) - \dfrac{\sinh(\Omega S)}{(\Omega S)}\right]}{\sinh^6(\Omega S)} \tag{3.6}$$

Для условия несингулярности модели важно, чтобы и основные физические величины были конечны при приближении к «началу». Предел давления равен

$$\lim_{S \to 0} \varkappa p = -\frac{4\Omega^2}{(E - U_0)^2}. \tag{3.7}$$

Предел же плотности энергии вычисляется немного сложнее, так как при разложении в ряд функций, входящих в (3.6), приходится учитывать члены более высокого порядка, чем первый. В результате получаем

$$\lim_{S \to 0} \varkappa \varepsilon = \frac{4\Omega^2}{(E - U_0)^2}. \tag{3.8}$$

Здесь мы наблюдаем удивительный факт: выбор квадратичного (как возрастающего, так и убывающего) потенциала автоматически требует уравнения состояния физического вакуума в «начале». С другой стороны, выбор квадратичного потенциала можно трактовать, как выбор обратно-пропорциональной зависимости давления от конформного множителя:

$$\varkappa p = -16\Omega^2 \cdot \exp(-2\sigma); \tag{3.9}$$

Таким образом, в точке $S = 0$ наше решение должно переходить в решение де Ситтера, которое имеет вид [9]

$$y = [1 - AS^2]^{-1/2}, \tag{3.10}$$

где A - константа, связанная с плотностью энергии физического вакуума в обычной синхронной системе отсчета соотношением

$$12A = \varkappa\varepsilon_{phys.vac}. \tag{3.11}$$

Раскладывая функции (3.3) и (3.9) в ряд в окрестности точки $S = 0$ и сравнивая постоянные при одинаковых степенях, определяем константы в (3.2):

$$\sqrt{(E - U_0)} = 1; \quad 4\Omega = \varkappa\varepsilon_{phys.vac}, \tag{3.12}$$

откуда с очевидностью следует ожидаемое соотношение

$$\varkappa\varepsilon \Rightarrow \varkappa\varepsilon_{phys.vac}. \tag{3.13}$$

Но для построения космологической модели, отвечающей современным представлениям об эволюции Вселенной, необходимо, чтобы давление изменило свой знак на положительный (переход в горячую стадию). Поэтому рассмотрим пределы давления и плотности энергии при стремлении S к бесконечности. Поскольку наша модель является открытой, то ясно, что и давление, и плотность энергии должны стремиться к нулю со стороны положительных значений.

В нашем случае, действительно, плотность энергии стремится к нулю с положительной стороны в отличие от давления, которое стремится к нулю со стороны отрицательных значений. Но самое интересное происходит с функцией состояния: она стремится к значению $\beta = -1/3$, то есть к уравнению состояния релятивистских струн, при неограниченном росте переменной S.

В самом деле, запишем функцию состояния для рассматриваемого случая через безразмерную переменную $x = \Omega S$:

$$\beta = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{th}^2(x)}{\left(1 - \dfrac{\mathrm{th}(x)}{x}\right)}. \tag{3.14}$$

Теперь нетрудно построить график поведения функции состояния (3.14) на промежутке $0 \leq x \leq \infty$ (см. Рис.2).

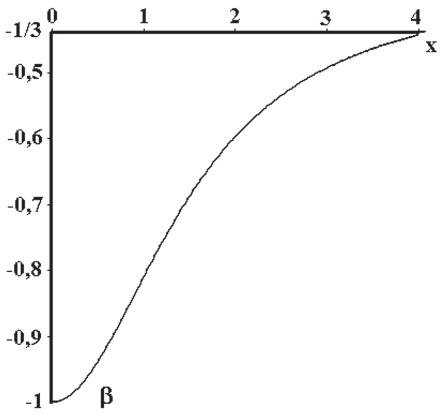

Рис. 2. Поведение функции состояния β для убывающего по z квадратичного потенциала на интервале $0 \leq x = \Omega S \leq \infty$.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: убывающий квадратичный потенциал описывает модель, которая может развиваться от де ситтеровской стадии в самом «начале» до стадии струн, и не может описывать горячую стадию эволюции Вселенной, то есть стадию с положительным давлением (см. рис.2).

Таким образом, убывающий квадратичный потенциал отвечает модели, которая развивается от де ситтеровской стадии (в начальный момент) до стадии струн, и в принципе не может описывать горячую стадию эволюции Вселенной. Эту модель в последующем будем называть «квази де ситтеровской». Но с другой стороны, если мы хотим сохранить отсутствие сингулярности в решении для модели и выход последней из де ситтеровской, то мы должны в дальнейшем сохранить младшим членом отрицательный квадратичный член.

4. Деформация квадратичного потенциала

Проведем более детальное исследование результатов, полученных выше. Для этого прежде всего рассмотрим потенциал в виде квадратичного полинома общего вида

$$U(X) = aX^2 + bX + c, \tag{4.1}$$

где X - некоторая переменная, а a, b, c суть управляющие параметры.

Выявим критические точки $U(X)$, приравнивая нулю первую производную U по X. В результате находим критическое множество $X = -b/2a$, которое вырождается в точку $X = 0$ при $b = 0$. Однако вторая производная равна $2a \neq 0$, что означает отсутствие вырожденных критических точек. Кроме того, легко видеть, что функция (4.1) может быть приведена к виду $U = a\tilde{X}^2 + \tilde{C}$, где $\tilde{X} = X + b/2a$; $\tilde{C} = C - b^2/4a$.

Следовательно, если рассматривать (4.1) как возмущенную квадратичную функцию (деформированную членом bX), то эту деформацию формально можно исправить заменой переменных $X \to \tilde{X}$. Однако при этом значение $U(X)$ в начале координат может измениться. Казалось бы, сдвиг графика функции $U(X)$ относительно координатных осей не должен существенно менять физическое поведение системы. Например, для осциллятора, помещенного во внешнее постоянное силовое поле, функция (4.1) может быть приведена к виду $U = \left(B^2/2\right)(y - y_0)^2$, но частота и сам характер колебаний не изменится, а просто сместится положение равновесия. Не следует однако забывать о соотношении (1.2), указывающем на чувствительность поведения давления к изменению отсчета «силы» в том смысле, что сингулярная точка, где p и ε становятся бесконечными, сдвигается, то есть деформация квадратичного потенциала для эквивалентной механической системы влияет на описание Вселенной.

Перейдем к рассмотрению деформации потенциала (3.1), заменив его на выражение

$$U(z) = -\frac{\Omega^2}{2}z^2 + \delta z + U_0, \tag{4.2}$$

где параметр δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения; $\Omega^2 = const$. «Сила» $F = -\partial U/\partial z = \left(\Omega^2 z - \delta\right)$ может интерпретироваться при $\delta > 0$ как сумма упругой силы и постоянной силы трения.

Квадратура уравнения

$$d^2z/dx^2 = F(x, z, p) \tag{4.3}$$

в этом случае принимает вид

$$z(x) = \delta/\Omega^2 + \left(\left(2\left(E - U_0\right)\right)^{1/2}/\Omega\right) sh\left(x - \varphi_0\right), \tag{4.4}$$

где $x = \Omega S$; $sh\varphi_0 = (\delta/\Omega)\left(2\left(E - U_0\right)\right)^{-1/2}$, а давление, плотность энергии и функция состояния оказываются равными:

$$\varkappa p = -\left(\frac{4\Omega^2\left(2\left(E - U_0\right)\right)^{1/2}}{xy^5}\right\} sh\left(x - \varphi_0\right); \tag{4.5}$$

$$\varkappa\varepsilon = 12 \cdot \Omega^2\left(2\left(E - U_0\right)\right)^{1/2} ch\left(x - \varphi_0\right)$$

Рассматривая поведение p_1, ε_1 и β как семейства параметра φ_0, связанного параметром с δ, получим типичные графики катастрофического поведения этих функций, приведенные на рис.3-6. Совершенно ясно, что система при $\delta = 0$ ($\varphi_0 = 0$) (что эквивалентно недеформированному квадратичному потенциалу) оказывается неустойчивой по отношению к малейшим возмущениям по φ_0 (а значит, и по $\delta = 0$). Кроме того, удается показать, что при малых x поведение функций p_1, ε_1 и β отвечает катастрофе сборки [10] с соответствующими «потенциалами» теории катастроф и законами чувствительности к несовершенству. Эти «потенциалы» выглядят следующим образом:

$$V(x, \varphi_0, \beta) = -(1/8)(4 + 3\beta)x^4 + (1/12)(7 + 33\beta)\varphi_0 x^3 + (3/2)(1 + \beta)x^2 - (3/2)(2 + 3\beta)\varphi_0 x, \tag{4.6}$$

при этом поведение функции состояния β вблизи $x = 0$ для деформированного квадратичного потенциала при различных значениях параметра φ_0 изображено на рис.3. Закон чувствительности β к несовершенству может быть записан как

$$\beta \approx -1 + (1/32)9^{1/3}32^{2/3}\varphi_0^{2/3}, \tag{4.7}$$

а соответствующий график приведен на рис.4.

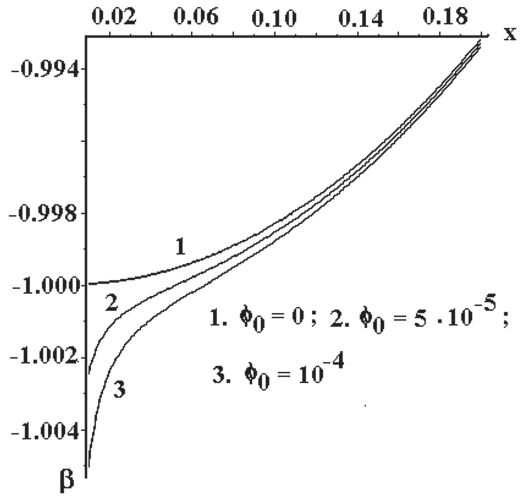

Рис. 3. Поведение функции состояния β вблизи $x = 0$ для деформированного квадратичного потенциала при различных значениях параметра φ_0.

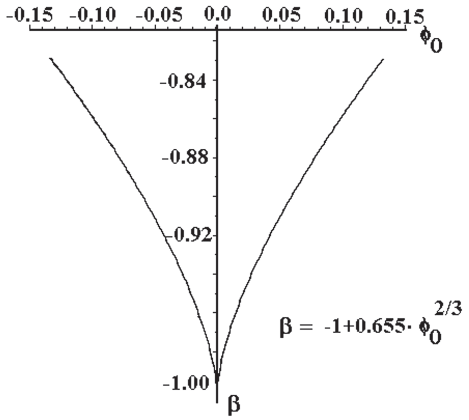

Рис. 4. График чувствительности к несовершенству для функции состояния β деформированного квадратичного потенциала вблизи $x = 0$ по закону $\beta = -1 + (1/32)9^{(1/3)}32^{(2/3)}\varphi_0^{2/3}$.

$$V(x, \varphi_0, p_1) = (1/6)x^4 - (2/9)\varphi_0 x^3 - (1/2)(1 + p_1)x^2 + \varphi_0 x, \tag{4.8}$$

$$V(x, \varphi_0, \varepsilon_1) = -(1/8)x^4 + (11/12)\varphi_0 x^3 + (1/2)(1 - \varepsilon_1)x^2 - (3/2)\varphi_0 x, \tag{4.9}$$

На рис.5 приведены графики $\varepsilon \approx \varepsilon_1$ и $p \approx p_1$ вблизи $x = 0$ для деформированного квадратичного потенциала при различных значениях параметра φ_0.

Законы чувствительности к несовершенству для ε

$$\varepsilon \approx \varepsilon_1 \approx= 1 - (243/32)^{1/3}\varphi_0^{2/3} \tag{4.10}$$

и p_1

$$p \approx p_1 \approx -1 + (9/2)^{(1/3)}\varphi_0^{2/3} \tag{4.11}$$

изображены на рис.6. Удается выявить нижнюю границу значений x , при которой еще не нарушена энергодоминантность, $x > x_0 = (3/2)\,\varphi_0$.

Таким образом, полученное здесь решение необходимо модифицировать с учетом существования $x_0 \neq 0$, ограничивающего физически допустимую область изменения x (где $\varepsilon > 0$ и $|\beta| \leq 1$). Ясно, что x_0 может быть точкой сшивки, например, с решением, отвечающим $\delta = 0$ ($\varphi_0 = 0$), которое, в свою очередь, сшито с решением де Ситтера. Более того, решение с потенциалом (3.1) не является устойчивым по отношению к малым возмущениям δ (при этом знак δ строго сепарирует

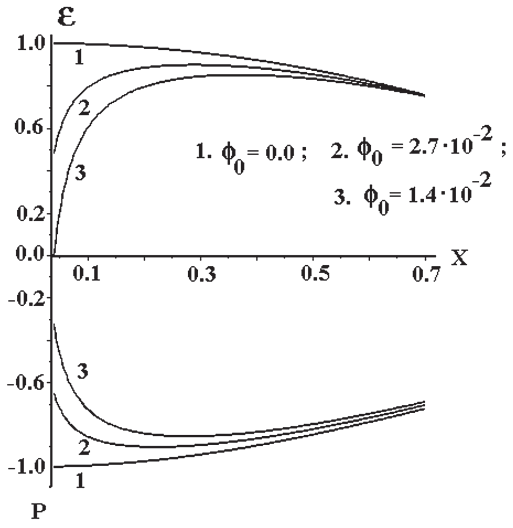

Рис. 5. Поведение функции состояния β для убывающего по z квадраттичного потенциала на интервале $0 \leq x = \Omega S \leq \infty$.

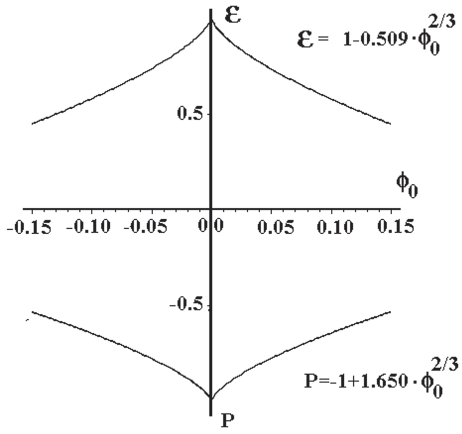

Рис. 6. Поведение функции состояния β для убывающего по z квадраттичного потенциала на интервале $0 \leq x = \Omega S \leq \infty$.

графики функций β, ε, p на два типа: один идет ниже, а другой - выше графика с $\varphi_0 = 0$ (см. рис.7)). Физически это означает, что решение де Ситтера не может быть продолжено слишком далеко (по времени) от состояния с $\beta \approx -1$, , так как квантовые флуктуации плотности материи в расширяющейся модели обязательно приведут к появлению нового закона поведения системы, то есть другого решения гравитационных уравнений с отличной от равновесной ($\varphi_0 = 0$) функцией состояния.

Другими словами, если эволюция открытой модели Вселенной началась с мира де Ситтера, то ее дальнейшее развитие по «квази де ситтеровской» модели существенно неустойчиво. Чтобы мир эволюционировал достаточно устойчиво, необходима смена потенциала на деформированный, например, типа (4.2), что предполагает появление постоянной возмущающей «силы», равной δ.

После сделанных замечаний о невозможности продолжения решения (4.4) до $S = 0$ сдвинем это решение на расстояние S_0 от «начала»

$$z\left(x\right) = \delta/\Omega^2 + \left(\left(2\left(E - \tilde{U}_0\right)\right)^{1/2}/\Omega\right) sh\left(x - x_0 + \varphi_0\right), \tag{4.12}$$

где $\tilde{U}_0 = U_0 + \delta/2\Omega^2$; $sh\varphi_0 = \left(z_0/\Omega\right)\left(\Omega^2 - \delta/z_0\right) / \left(2\left(E - \tilde{U}_0\right)\right)^{1/2}$; $x_0 \equiv \Omega S_0$.

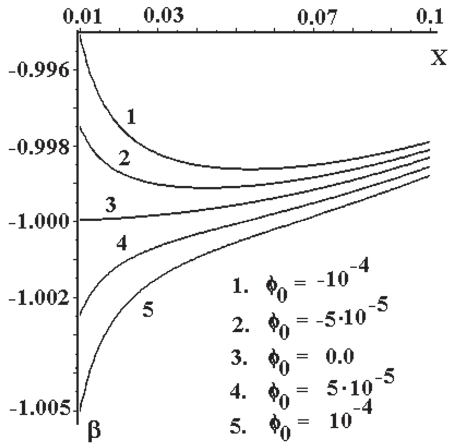

Рис. 7. Поведение функции состояния β для убывающего по z квадраттичного потенциала на интервале $0 \le x = \Omega S \le \infty$.

Будем считать, что в промежутке от $S = 0$ до S_0 справедливо «квази де ситтеровское» решение, которое гладко сшивается с (4.12) в точке $S = S_0$, включая сшивку потенциалов и их производных, так как непрерывность «силовой» функции $F - \partial U/\partial z$ эквивалентна (вместе с непрерывностью y) непрерывности давления. Результатом такой сшивки оказывается ряд соотношений (см, например, [11]):

$$z_0 = \omega^{-1} sh\left(\Omega S_0\right); \;\; \omega^2 = \Omega^2 - \delta/z_0; \;\; \varkappa\varepsilon_{|S_0} = 4\omega^2; \;\; \left(2\left(E - \tilde{U}_0\right)\right) = ch^2\left(\omega S_0\right) - \left(\omega^2 z_0/\Omega\right)^2. \quad (4.13)$$

Если теперь принять, что $4\omega^2 = \varkappa\varepsilon_{phys.vac.} = \Lambda$ (космологическая постоянная), то есть удается подобрать δ/z так, чтобы $\omega^2 - \delta/z_0$ по порядку величины совпадало с $\Lambda/4$, то будем иметь единое соотношение $\omega^2 = \Omega^2 - \delta/z_0$ для так называемой проблемы космологической постоянной. С другой стороны, Ω можно было бы связать с некоторой эквивалентной частицей, указывающей на определенный сорт взаимодействия. Такая связь возможна, если допустить, что потенциал (4.2) есть приближение «бутылочного» потенциала $U = \left(\lambda^2/4\right)\left(z^2 - \alpha^2\right)^2$ в пренебрежении z^4 в окрестности «начала». Другими словами появляется возможность с помощью точки сшивки управлять разностью $\left(\Omega^2 - \delta/z_0\right)$, так как с классических позиций S не запрещено быть как угодно малым.

Плотность энергии, давление и функция состояния для решения (4.12) легко находятся и с учетом сшивки при малости ω^2 представляют собой знакомые по рис.3-6 семейства катастрофы сборки, зависящие от x_0 [11]. Полученное из требования непрерывности давления соотношение $\left(\Omega^2 - \delta/z_0\right)$ в определенном смысле решает проблему космологической постоянной. «Квази де ситтеровская» стадия является неустойчивой при расширении Вселенной и для придания ей «устойчивости» необходимо рождение вещества, которое здесь появляется через присутствие в модельном потенциале члена $\delta \cdot z$ и играет роль вязкости, замедляя расширение за счет гравитационного притяжения. Следовательно, деформация потенциала оказывается не просто математическим преобразованием, а имеет под собой и физическое обоснование, которое заключается в интерпретации части давления как влияния объемной вязкости. В самом деле, с гидродинамической точки зрения, давление для $S \ge S_0$ может быть рассматриваться как давление в неравновесной среде: $-\varkappa p^* = 4\left(\Omega^2 - \delta/z\left(x\right)\right) = -\left(p - \zeta \cdot u^{\alpha}_{;\alpha}\right)$, где p - «равновесное» давление, связанное с обратимым преобразованием энергии; $u^{\alpha}_{;\alpha} = \left(dV/dS\right)/V$ - относительное изменение 3-объема, которое здесь равно $u^{\alpha}_{;\alpha} = \left(3/Sy^3\right)\left(2y'S + y\right) = d\left(\ln\left(a^3\right)\right)/d\tilde{S}$; $a = Sy^2$ - 3-радиус Вселенной; $d\tilde{S}^2 \equiv \exp\left(2\sigma\right) dS^2$ и при $S \to \infty$ $u^{\alpha}_{;\alpha} \to 0$, что лишний раз доказывает наличие расширения модели; $\zeta(x)$ - коэффициент объемной вязкости, представляющий собой, с другой стороны, коэффициент сопротивления объемному расширению и являющийся функцией точки. Таким образом, $\zeta \cdot u^{\alpha}_{;\alpha} = 4\delta/\left(Sy^5\right)$, то есть коэффициент объемной вязкости может быть связан с введенным ранее из общих математических соображений коэффициентом $\delta \cdot z$. Принимая во внимание, что эффект рождения частиц классически может быть описан как появление объемной вязкости в среде ([12]- [13]), получаем физическое объяснение появления члена линейного члена по z в потенциале (4.2) [11].

Однако, несмотря на плодотворность описанного варианта подхода к решению проблемы космологической постоянной, нельзя считать его окончательным, так как найденное решение не позволяет выйти в область положительных значений давления, потому что и здесь $\beta \to -1/3$ при $S \to \infty$.

5. Заключение

Открытая космологическая модель , заполненная материей в приближении идеальной жидкости в общем случае с отличным от нуля давлением и 4-метрикой, записанной в форме Фока как конформная метрике Минковского рассмотрена вблизи начала Вселенной . Конформно-плоская метрика зависит только от одной переменной, квадрат которой представляет собой произведение запаздывающего и опережающего времен. Известное решение Фридмана для открытой Вселенной, заполненной некогерентной пылью, является частным случаем для такой метрики для больших времен.

Подход получения точных открытых космологических решений с помощью введения эквивалентных потенциалов по аналогии с классической механикой был предложен ранее (см., например, [1]).

На основе этого подхода, используя убывающий квадратичный потенциал, строится один из вариантов открытой космологической модели, описывающей гравитационное поле вблизи начала Вселенной. Показано, что если эволюция такой модели Вселенной начиналась с мира де Ситтера, то дальнейшее ее развитие,отвечающее убывающему квадратичному потенциалу, существенно неустойчиво с точки зрения теории катастроф. Чтобы мир эволюционировал устойчиво, необходима смена модели, соответствующая деформированному убывающему квадратичному потенциалу, что предполагает введение постоянной возмущающей силы, связанной с диссипацией или рождением частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. №1. С.37–46.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.
3. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.
4. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
5. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.
6. Penrose R Gravitational Collapse and Space-Time Singularities // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. P. 57.
7. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
8. Зельдович Я.Б. Избранные труды. Частицы, ядра, Вселенная. М.: Наука, 1985. С. 183.
9. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. 1. Четырехмерное пространство-время /КрасГУ. Красноярск, 1988. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 11.07.1988, № 5914-В88.
10. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.М.: Мир, 1984. Т.1. 350 с.
11. Баранов А.М., Савельев Е.В. Открытая Вселенная: попытка почти полного описания. 3. Деформация квадратичного модельного потенциала /КрасГУ. Красноярск, 1990. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 03.12.90, № 6060-В90.
12. Белинский В.А., Халатников И.М. О влиянии вязкости на характер космологической эволюции // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. Вып. 2. С.401-414.
13. Белинский В.А., Халатников И.М. Эффекты вязкости в изотропной космологии // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. Вып.1. – С.3–17.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева,
660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Савельев Евгений Викторович, к. ф.-м. н., доцент,
ООО «ПРОФИЛЬ - 2С», 123060, Москва, 1-ый Волоколамский проезд, 15/16
E-mail: editor@stfi.ru

A.M. Baranov, Eu. V. Saveljev

Exact solutions of the conformally flat Universe. III. The «interior» solution

Keywords: exact solutions of Einstein equations, open cosmological models, Newton's equation, function of state, theory of catastrophe.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

The open cosmological model filled with a substance in an approximation of the perfect fluid with nonzero pressure is researched near by to the Universe beginning. The model is described by the 4-metric in the form of Fock as conformal to the Minkowski metric. The research of the open cosmological model the filled with substance and radiation in an approximation of the perfect fluid and for a conformally flat space-time metric is reduced to an equivalent problem of a particle movement with mass in a force field. The conformally flat metric depends only on one variable, square of which is product of advanced and retard times. Known the Friedman solution for the open Universe, the filled incoherent dust, is a special case for such metric for large times. The approach to finding of exact open cosmological solutions by means of introduction of the equivalent potentials by analogy to a classical mechanics has been offered by authors earlier. On the basis of this approach, using a decreasing square potential, one of variants of the open cosmological model describing a gravitational field close to the beginning of the Universe is under construction. It is shown, that if evolution of such model of the Universe began with the world of de Sitter its further development answering to the decreasing square potential, is essentially structurally unstable from the point of view of the theory of catastrophes. That the world had had the stable evolution is necessary the change of the model corresponding to the deformed decreasing square potential. This guesses introduction of the constant perturbative force related to a dissipation of energy or a birth of particles.

REFERENCES

1. Baranov A.M. Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no.1, pp.37–46.

2. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).

3. Mitskievich N.V. *Physical Fields in General Relativity*, Moskow: Nauka, 1969, 563 p. (in Russian).

4. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.(in Russian)

5. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

6. Penrose R Gravitational Collapse and Space-Time Singularities, *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 14. P. 57.

7. Hawking S., Ellis G. *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.

8. Zeldovich Ya.B. *Collection of Transactions. The Particles, Nucleuses, Universe*, Moscow: Nauka, 1985, 183 p. (in Russian).

9. Baranov A.M., Saveljev E.V. Conformally-flat models and equations of state. 1. The four-dimension space-time, KrasSU, Krasnoyarsk, 1988, 20 p., Deposited in VINTI USSR 11.07.1988, no. 5914-B88.

10. Gilmore R. *Catastrophe theory for scientists and engineers*, New York-Chichester-Brisbane-Toronto: A Wiley-Interscience Publication, 1981.

11. Baranov A.M., Saveljev E.V. The Open Universe: the Attempt of about Full Description. 3. Deformation of Square-Law Modelling Potential, KrasSU, Krasnoyarsk, 1988, 11 p., Deposited in VINTI USSR 03.12.1990, no. 6060-B90.

12. Belinsky V.A., Khalatnikov I.M. On influence of viscosity to the cosmology evolution, *JETP*. 1975. V.69. No. 2. P. 401–414.

13. Belinsky V.A., Khalatnikov I.M. Effects of viscosity in the isotropic cosmology, *JETP*. 1977. V.72. No. 1. P. 3–17.

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev,
89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru
©Baranov A.M.

Saveljev Eugene Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor,
OOO "PROFILL - 2S 15/16 1-st Volokolamsk passage, Moscow, 123060, Russia.

E-mail: editor@stfi.ru
©Saveljev Eu.V.