УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

НЕМИНИМАЛЬНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ. III. РАСШИРЕНИЕ ТЕОРИИ НА ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАССЫ [2]

В статье рассматривается обобщение макроскопической модели плазмы скалярно заряженных частиц, основанной на уравнениях микроскопической динамики частицы в присутствии скалярных полей, на случай взаимодействия частиц с несколькими полями и отрицательные эффективные массы частиц. Теорию удается естественно обобщить, пересмотрев ряд ее ключевых положений, зависящих от знака массы частиц. Тем самым, удается снять искусственное ограничение, противоречащее более фундаментальному принципу аддитивности функционала действия.

Ключевые слова: Релятивистская кинетика, фантомные скалярные поля, скалярное взаимодействие частиц, отрицательные массы

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Введение

В предыдущих работах Автора с учениками были рассмотрены статистические системы скалярно заряженных частиц, в том числе были построены космологические модели. основанные на таких системах [1–4]. В частности, в работах [2, 3] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В работе [6] были исследованы групповые свойства равновесных статистических конфигураций со скалярным взаимодействием, а в работе [7] была установлена тесная связь между динамикой частицы с переменной массой и динамикой скалярно заряженной частицы. В последних работах Автора [8–10][3] макроскопическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием была значительно усовершенствована в части развития формализма и расширена на случай фантомных скалярных полей[4]. В этой статье мы рассмотрим обобщение теории на случай нескольких скалярных полей. При попытке такого обобщения оказывается, что развитая теория вступает в противоречие с фундаментальным принципом аддитивности функционала действия. Положением теории, приводящем к противоречию, оказывается предположение о неотрицательности эффективной (полной) массы частиц. Таким образом, возникла необходимость ревизии кинетической теории систем скалярно заряженных частиц, результаты которой и представлены в настоящей статье.

2. Динамика частиц со скалярным взаимодействием

2.1. Канонические уравнения движения

Нормированный инвариантный элемент объема 8-ми мерного фазового пространства релятивистской частицы Γ, являющегося векторным расслоением $\Gamma = X \times P$ с римановой базой $X(g)$ и векторным слоем $P(X)$ относительно пары канонически сопряженных динамических переменных x^i (конфигурационных координат) и P_i (координат обобщенного импульса) есть [11][5]:

$$d\Gamma = \frac{\varrho}{(2\pi)^3} dX dP \equiv \frac{\varrho}{(2\pi)^3} dx^1dx^2dx^3dx^4dP_1dP_2dP_3dP_4, \qquad (2.1)$$

[1] E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2] This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

[3] см. также монографии [14, 29].

[4] см. также [16] и обзор [22].

[5] Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $G = c = \hbar = 1$. В обычных единицах $2\pi \to 2\pi\hbar$.

где

$$dX = \sqrt{-g}dx^1dx^2dx^3dx^4; \tag{2.2}$$

$$dP = \frac{1}{\sqrt{-g}}dP_1dP_2dP_3dP_4 \tag{2.3}$$

есть инвариантные элементы объемов конфигурационного и импульсного пространств, соответственно, а ϱ есть фактор вырождения; для частиц со спином S $\varrho = 2S+1$. В дальнейшем для сокращения записи мы также будем использовать одноименные фазовые координаты η_a, $a = \overline{1,8}$:

$$\eta_i \equiv x^i, \quad \eta_{i+4} = P_i, \quad (i = \overline{1,4}), \tag{2.4}$$

в которых выражение для элемента объема фазового пространства (2.1) принимает максимально простой вид:

$$d\Gamma = \frac{\varrho}{(2\pi)^3}\prod_{a=1}^{8} d\eta_a. \tag{2.5}$$

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [2]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \qquad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \tag{2.6}$$

где $H(x,P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона, $u^i = dx^i/ds$ – вектор скорости частицы.

Вследствие антисимметричности канонических уравнений движения (2.6) и симметричности фазового объема (2.1) выполняется дифференциальное соотношение [11], в классической динамике известное как *теорема Лиувилля*

$$\frac{d\Gamma}{ds} = 0, \tag{2.7}$$

согласно которому фазовый объем мировой трубки частиц постоянен.

Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, P_k)$, с учетом (2.6) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \tag{2.8}$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i}\frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial \Psi}{\partial P_i}\ . \tag{2.9}$$

Заметим, что скобку Пуассона (2.9) можно переписать в явно ковариантном виде с использованием *оператора ковариантного дифференцирования по Картану*, $\widetilde{\nabla}_i$, [6], (см., например, [11])[7]:

$$\widetilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma^k_{ij}P_k\frac{\partial}{\partial P_j}, \tag{2.10}$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля 2-го рода относительно метрики g_{ij} базы X. Оператор $\widetilde{\nabla}$ определен таким образом, что

$$\widetilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \tag{2.11}$$

и выполняется следующее *символическое* правило дифференцирования функций:

$$\widetilde{\nabla}_i\Psi(x,P) = \nabla_i[\Psi(x], P), \tag{2.12}$$

которое означает, что для вычисления производной Картана от функции $\Psi(x,P)$ достаточно вычислить от нее обычную ковариантную производную так, как если бы вектор импульса был ковариантно постоянным. Благодаря этому равенству введенный оператор весьма удобен для выполнения

[6] Ковариантная производная в расслоении Γ [12].

[7] Впервые в релятивистскую статистику ковариантные производные по Картану были введены A.A. Vlasov [13].

дифференциальных и интегральных операций в фазовом пространстве Г. Таким образом, запишем скобку Пуассона (2.9) в явно ковариантном виде:

$$[H,\Psi]\equiv\frac{\partial H}{\partial P_i}\widetilde{\nabla}_i\Psi-\frac{\partial\Psi}{\partial P_i}\widetilde{\nabla}_i H, \tag{2.13}$$

Далее, вследствие (2.9) функция Гамильтона является интегралом движения частицы:

$$\frac{dH}{ds}=[H,H]=0,\Rightarrow H=\mathrm{Const}\,. \tag{2.14}$$

Соотношение (2.14) можно назвать соотношением нормировки. Вследствие линейности скобки Пуассона любая непрерывно дифференцируемая функция $f(H)$ также является функцией Гамильтона. Единственная возможность введения инвариантной функции Гамильтона, квадратичной по обобщенному импульсу частицы, при наличии только гравитационных и скалярных полей есть следующая:

$$H(x,P)=\frac{1}{2}\left[\psi(x)(P,P)-\varphi(x)\right], \tag{2.15}$$

где (a,b) здесь и в дальнейшем есть скалярное произведение векторов a и b относительно метрики базы:

$$(a,b)=g_{ik}a^ib^k,$$

а $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ – некоторые скалярные функции скалярных потенциалов. Выберем нулевую нормировку функции Гамильтона в соотношении (2.14) [7,8]:

$$H(x,P)=\frac{1}{2}\left[\psi(x)(P,P)-\varphi(x)\right]=0, \tag{2.16}$$

откуда найдем:

$$(P,P)=\frac{\varphi}{\psi}, \tag{2.17}$$

а из первой группы канонических уравнений движения (2.6) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$u^i\equiv\frac{dx^i}{ds}=\psi P^i\Rightarrow P^i=\psi^{-1}u^i, \tag{2.18}$$

Подставляя (2.18) в соотношение нормировки (2.17), получим:

$$(u,u)=\psi\varphi.$$

Поэтому для выполнения соотношения нормировки вектора скорости частицы

$$(u,u)=1. \tag{2.19}$$

должно быть:

$$\psi\varphi=1\Rightarrow\psi=\varphi^{-1},$$

– таким образом, инвариантная функция Гамильтона частицы может определяться лишь одной скалярной функцией $\varphi(x)$. Учитывая последнее соотношение, запишем функцию Гамильтона в окончательной форме:

$$H(x,P)=\frac{1}{2}\left[\varphi^{-1}(x)(P,P)-\varphi(x)\right]=0, \tag{2.20}$$

и из канонических уравнений (2.6) получим связь между обобщенным импульсом и вектором скорости частицы:

$$P^i=\varphi\frac{dx^i}{ds}. \tag{2.21}$$

Из соотношения (2.17) следует, что вектор обобщенного импульса времениподобен:

$$(P,P)=\varphi^2\geqslant 0. \tag{2.22}$$

Отметим полезное для дальнейшего соотношение, являющееся следствием (2.13), (2.15) и (2.22):

$$[H, P^k] = \nabla^k \varphi \equiv g^{ik}\partial_i \varphi; \tag{2.23}$$

где $\nabla^i \equiv g^{ik}\nabla_k$ – символ ковариантной производной.

2.2. Уравнения движения в Лагранжевой формулировке

Из второй группы канонических уравнений (2.6) получим уравнения движения в Лагранжевой формулировке [14]:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \partial_{,k}\ln|\varphi|\mathcal{P}^{ik}, \tag{2.24}$$

где:

$$\mathcal{P}^{ik} = \mathcal{P}^{ki} = g^{ik} - u^i u^k \tag{2.25}$$

– тензор ортогонального проектирования на направление u, такой что:

$$\mathcal{P}^{ik}u_k \equiv 0; \quad \mathcal{P}^{ik}g_{ik} \equiv 3. \tag{2.26}$$

Из этих соотношений и уравнений Лагранжа (2.24) вытекает строгое следствие ортогональности векторов скорости и ускорения:

$$g_{ik}u^i\frac{du^k}{ds} \equiv 0. \tag{2.27}$$

Заметим, что лагранжевы уравнения движения (2.24) инвариантны относительно знака скалярной функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \to -\varphi(x). \tag{2.28}$$

Также инвариантна относительно преобразования (2.28) и функция Гамильтона (2.20) при нулевой ее нормировке. Поэтому из соотношений (2.22), (2.21), а также уравнений Лагранжа - Эйлера (2.24) следует, что квадрат скаляра φ имеет смысл квадрата *эффективной инертной массы частицы, m_*, в скалярном поле*:

$$\varphi^2 = m_*^2. \tag{2.29}$$

Заметим, что указанному выбору функции Гамильтона соответствует следующая функция действия:

$$S = \int m_* ds, \tag{2.30}$$

формально совпадающая с функцией Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_* в гравитационном поле (см., например, [15]).

2.3. Выбор функции массы

Пусть теперь в системе имеются n различных скалярных полей, Φ_r, а каждая частица обладает n соответствующими фундаментальными скалярными зарядами, q_r ($r = \overline{1,n}$), среди которых могут быть и нулевые. Возникает вопрос о выборе функции $m_*(\Phi_r)$. Не конкретизируя пока эту функцию, отметим следующее важное обстоятельство. Для того, чтобы уравнения движения (2.6) допускали линейный интеграл движения $\Psi = (\xi, P) = \mathrm{Const}$, согласно (2.8) необходимо и достаточно, чтобы $[H, \Psi] = 0$, что, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда [16]:

$$(\xi, P) = \mathrm{Const} \Longleftrightarrow \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \varphi g_{ik} = 0, \tag{2.31}$$

где $\underset{\xi}{\mathrm{L}}$ – производная Ли в направлении ξ (см., например, [17]).

Рассмотрим статические поля g_{ik} и Φ_r, допускающие времениподобный вектор Киллинга $\xi^i = \delta^i_4$, когда сохраняется полная энергия заряженной частицы, $P_4 = E_0 = \mathrm{Const} > 0$. Выберем систему отсчета, в которой $g_{\alpha 4} = 0, \alpha, \beta = \overline{1,3}$, так что координата x^4 совпадает с мировым временем t.

Тогда из соотношений связи между вектором кинематической скорости u^i и вектором полного импульса частицы P_i (2.21) следует:

$$P_4 ds = \varphi dt.$$

Поэтому, если мы *хотим* сохранить одинаковую ориентацию мирового, t, и собственного, s, времени (т.е., $u^4 = dt/ds > 0$), необходимо выбрать такую функцию массы, которая всегда бы оставалась неотрицательной:

$$m_* = |\varphi| > 0.$$

Однако, такой консервативный и, на первый взгляд, правильный подход, использованный в работах Автора [1] – [4], противоречит более фундаментальному принципу аддитивности функции Лагранжа. Как показано в [16], отрицательность функции эффективной массы частицы не приводит к каким-либо противоречиям на уровне микроскопической динамики, так как наблюдаемый импульс частицы (как и наблюдаемая трехмерная скорость $v^\alpha = u^\alpha/u^4$), в отличие от ненаблюдаемой кинематической 4-скорости частицы, u^i, сохраняет свою ориентацию:

$$p^i = m_* \frac{dx^i}{ds} \equiv P^i. \tag{2.32}$$

Принципу же аддитивности функции действия соответствует выбор линейной функции массы в (2.30):

$$m_* = m_0 + \sum_r q^{(r)} \Phi_r,$$

где m_0 – некоторая начальная масса покоя, а $q^{(r)}$ — заряд частицы относительно скалярного поля Φ_r, которые мы будем полагать функционально независимыми. В дальнейшем мы будем полагать $m_0 = 0$, при этом вся масса покоя частиц будет обеспечиваться взаимодействием со скалярными полями:

$$m_* = \varphi = \sum_r q_r \Phi_r. \tag{2.33}$$

Этот выбор отвечает и эстетическим критериям, так как в этом случае функция Гамильтона (2.15) не зависит от массы покоя. С другой стороны видно, что при выборе функции $\varphi(\Phi)$ в форме (2.33) уравнения Лагранжа (2.24) становятся симметричными относительно замены $\Phi_r \to -\Phi_r$ или $q_r \to -q_r$. Поэтому, если частицы a и античастицы $\bar{a}$ отличаются знаком скалярных зарядов, то $\bar{m}_* = -m_*$, но траектории частицы и античастицы в гравитационном и скалярных полях отличаться не будут. При этом согласно (2.18) 4-векторы их кинематической скорости будут отличаться знаком: $\bar{u}^i = -u^i$, а векторы наблюдаемого обобщенного импульса будут совпадать $\bar{P}^i = P^i$. Заметим, что при этом векторы трехмерной скорости $v^\alpha = u^\alpha/u^4$ ($\alpha = \overline{1,3}$) частиц и античастиц также совпадают: $\bar{v}^\alpha = v^\alpha$. При выборе эффективной массы в форме (2.33) функция Гамильтона (2.20) и соотношение нормировки (2.22) для обобщенного импульса принимают вид:

$$H(x,P) = \frac{1}{2}\left[m_*^{-1}(x)(P,P) - m_*\right] = 0, \tag{2.34}$$

$$(P,P) = m_*^2. \tag{2.35}$$

Отметим полезные в дальнейшем тождества, справедливые для функции Гамильтона (2.34):

$$\widetilde{\nabla}_i H = -\nabla_i m_*, \tag{2.36}$$

$$[H,\Psi] = \frac{1}{m_*} P^i \widetilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \tag{2.37}$$

где $\Psi(x,P)$ есть произвольная функция.

2.4. Квантовые уравнения

Из классической функции Гамильтона (2.34) с помощью стандартной подстановки:[8]

$$P_i \to i\hbar \nabla_i \tag{2.38}$$

[8] В этом разделе мы временно отступаем от универсальной системы единиц, в которой $\hbar = 1$.

получим оператор Гамильтона:

$$\hat{\mathrm{H}} = -\frac{1}{2}m_*^{-1}(\hbar^2 g^{ik}\nabla_i\nabla_k + m_*^2). \tag{2.39}$$

Таким образом, для свободного массивного скалярного поля мы получим волновые уравнения в форме стандартных уравнений Клейна-Гордона с той лишь разницей, что масса покоя бозонов должна замениться на эффективную массу [16]:

$$(\Box + m_*^2/\hbar^2)\Psi = 0, \tag{2.40}$$

а для свободных фермионов – соответствующие уравнения Дирака:

$$(\hbar\gamma^i\nabla_i + m_*)\Psi = 0, \tag{2.41}$$

где γ – спиноры.

Заметим, также что из (2.40) при подстановке $\Psi = \Phi$ и выборе простейшей функции массы $m_* = q\Phi$, как и для функции массы $m = |q\Phi|$, сразу следует уравнение свободного скалярного поля с кубической нелинейностью:

$$\Box\Phi + (q^2/\hbar^2)\Phi^3 = 0. \tag{2.42}$$

Таким образом, константа самодействия в уравнении скалярного поля принимает вполне определенный смысл:

$$\lambda = \frac{q^2}{\hbar^2},$$

т.е., определяется аналогично постоянной тонкой структуры для электромагнитного поля.

3. Вычисление макроскопических средних

Для расширения общерелятивистской кинетической теории на случай отрицательных эффективных масс элементарных частиц необходимо заново пересмотреть те ключевые моменты релятивистской кинетической теории, которые могут зависеть от знака массы частицы. Как оказалось таких ключевых момента всего два, и они определяются двумя обстоятельствами: связью собственного микроскопического времени частицы с собственным временем макроскопических наблюдателей и связью между вектором скорости частицы и ее обобщенным импульсом.

3.1. Инвариантная функция распределения

Общий формализм инвариантных функций распределения развивался в работах [11, 14]. Для учета возможности отрицательного знака эффективной массы частиц необходимо аккуратно применить этот формализм к рассматриваемому случаю. Согласно этому формализму для определения макроскопических средних в релятивистском фазовом пространстве необходимо определить на его базе единичное времениподобное поле макроскопических наблюдателей, $U_i(x) : (U, U) = 1$, по часам которых будет проводиться синхронизация актов измерения отдельных частиц. Это времениподобное поле, в свою очередь, определяет некоторую пространственноподобную трехмерную поверхность, V_3, смещения вдоль которой, δx^i, ортогональны этому полю:

$$V_3:\ \delta x^i U_i = 0, \tag{3.1}$$

а смещения вдоль этого поля dx^i определяют синхронизированное собственное время τ наблюдателей:

$$\frac{dx^i}{d\tau} = U^i \Leftrightarrow \frac{dx^i}{d\tau}U_i = 1 \Rightarrow d\tau = dx^i U_i. \tag{3.2}$$

Таким образом, в макроскопической системе отсчета наблюдателей:

$$X = V \times T \Rightarrow dX = dV d\tau. \tag{3.3}$$

Очевидно, что связь собственного времени частицы, s, с синхронизированным собственным временем τ наблюдателей в каждой точке конфигурационного пространства устанавливается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = U_i\frac{dx^i}{ds}. \tag{3.4}$$

Учитывая теперь соотношение (2.32), являющееся следствием канонических уравнений (2.6), получим окончательно:

$$\frac{d\tau}{ds} = m_*^{-1}(U,P) \Rightarrow \frac{1}{m_*(s)}\frac{ds}{d\tau} = \frac{1}{(U(\tau),P(s))}. \tag{3.5}$$

Соотношение (3.6) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $s(\tau)$, разрешая которое, мы можем определить связь между собственным временем частицы и временем. измеренным по часам синхронизированных наблюдателей:

$$s = s(\tau). \tag{3.6}$$

Инвариантная 8-ми мерная функция распределения тождественных частиц $F(x,P)$ вводится следующим образом [11, 14]. Пусть фазовая траектория частицы, определяемая каноническими уравнениями (2.6) в фазовом пространстве $\Gamma = P(X)\times X$ есть:

$$x^i = x^i(s); \quad P_i = P_i(s) \Rightarrow \eta_a = \eta_a(s)\ (a = \overline{1,8}), \tag{3.7}$$

где s есть собственное время частицы. Тогда число частиц, регистрируемых наблюдателями в области $d\Gamma$ фазового пространства, можно определить как [11, 14]:

$$dN(\tau) = F(x,P)\delta(s - s(\tau))d\Gamma. \tag{3.8}$$

Заметим, что число частиц есть скаляр, зависящий, однако, от выбора поля наблюдателей U^i, т.е., от выбора системы отсчета в римановом пространстве X, тогда как сама 8-ми мерная функция распределения $F(x,P)$, вводимая соотношением (3.8), является инвариантной в фазовом пространстве Г. Заметим также, что невозможно дать другого определения инвариантной функции распределения в 8-ми мерном фазовом пространстве. Все вводимые ранее определения этой функции являются частными случаями (3.8), реализованными в выделенных системах отсчета.

3.2. Макроскопические средние динамических функций

Определение инвариантной функции распределения (3.8), а вместе с ней и других динамических функций, и является первым ключевым моментом релятивистской кинетической теории, который зависит от знака массы частиц. Пусть $\psi(x,P)\equiv\psi(\eta)$ есть некоторая скалярная функция динамических переменных. Тогда согласно (3.8) ее макроскопическое среднее $\Psi(\tau)$ в области $\Omega\subset\Gamma$ определяется следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \int\limits_\Omega \psi(\eta(s))dN = \int\limits_\Omega F(\eta(s))\psi(\eta(s))\delta(s - s(\tau))d\Gamma. \tag{3.9}$$

Подчеркнем еще раз, что функция распределения $F(x,P)$ в отличие от макроскопических средних, определяемых всегда по отношению к полю наблюдателей U, является инвариантной в фазовом пространстве. Полагая далее в соответствии с (3.1), (3.2) $X = V\times T \Rightarrow dX = dVdt$, запишем выражение (3.9) в явном виде:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_V dV\int\limits_T dt\int\limits_{P(X)} dP\psi(\eta)F(\eta)\psi(\eta)\delta(s - s(\tau)) \tag{3.10}$$

Для проведения интегрирования по t в (3.10) учтем связь $t(s)$ (2.32) и $\tau(s)$ (3.6) и свойства δ-функции Дирака:

$$\delta(s - s(\tau))dt = \left|\frac{d\tau}{ds}\right|\delta(t-\tau)ds \equiv |m_*|^{-1}(U,P)\delta(t-\tau)dt. \tag{3.11}$$

При выводе (3.11) мы учли тот факт, что ориентация обобщенного импульса в отличие от ориентации вектора кинематической скорости не зависит от знака эффективной массы. Учитывая теперь (3.11) в (3.10) и проводя интегрирование по временной координате, получим окончательно:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_V U_i dV\frac{1}{|m_*|}\int\limits_{P(X)} P^i dP\psi(\eta)F(\eta)\psi(\eta) \tag{3.12}$$

В частности, полагая $\psi = 1$ получим полное число частиц в области V:

$$N(V) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_V U_i dV \frac{1}{|m_*|}\int\limits_{P(X)} P^i F(\eta) dP \equiv \int\limits_V (U,n) dV, \tag{3.13}$$

где введен *вектор плотности потока частиц*:

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3|m_*|}\int\limits_{P(X)} P^i F(\eta) dP \tag{3.14}$$

Этот фактор модуля эффективной массы не был учтен в предыдущих работах по вышеупомянутой причине консерватизма.

3.3. Переход к семимерной функции распределения

Вследствие соотношения нормировки обобщенного импульса (2.35) инвариантная 8-мерная функция распределения $F(x,P)$ сингулярна на массовой поверхности. Поэтому необходимо ввести несингулярную на этой поверхности функцию распределения $f(x,P)$ с помощью соотношения:

$$F(x,P) = \delta(H(x,P)) f(x,P). \tag{3.15}$$

Вычисляя соотношение

$$F(x,P)dP \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} dP_1 dP_2 dP_3 dP_4 \delta(H(x,P)) f(x,P)$$

с помощью свойств δ-функции Дирака и явного вида функции Гамильтона (2.34), получим:

$$F(x,P)dP = \frac{1}{\sqrt{-g}} dP_1 dP_2 dP_3 \frac{|m_*|}{P^4_+}\delta(P_4 - P_4^+) f(x,P) \equiv |m_*| dP_0 \delta(P_4 - P_4^+) f(x,P), \tag{3.16}$$

где $P_4^+ \equiv P_4$ есть положительный корень уравнения нормировки (2.35), а

$$dP_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{dP_1 dP_2 dP_3}{P^4} \tag{3.17}$$

есть элемент объема трехмерного пространства импульсов.

В результате формулы для макроскопических средних (3.12) можно записать через *семимерную функцию распределения* $f(x,P)$ следующим образом:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_V U_i dV \int\limits_{P_+(X)} P^i dP_0 \psi(\eta) f(\eta), \tag{3.18}$$

куда необходимо подставить вместо P_4 положительный корень уравнения массовой поверхности, а P_+ есть верхняя часть псевдосферы массовой поверхности. Таким образом, при переходе к 7-мерной функции распределения явная зависимость от эффективной массы в этих формулах исчезает.

Таким образом, справедливо следующее символическое правило, понимаемое в смысле интегрирования по соответствующим фазовым объемам:

$$\psi(\eta) F(\eta) \delta(s - s(\tau)) d\Gamma \to \psi(\tilde\eta) f(\tilde\eta)(U,P) dV dP_0, \tag{3.19}$$

где $\tilde\eta$ есть динамические переменные на шестимерном подпространстве $\Gamma_0(\tau) = V \times P_0 \subset \Gamma$ с элементом объема:

$$d\Gamma_0 = dV dP_0. \tag{3.20}$$

В частности, для *вектора плотности потока числа частиц*[9] (3.21) получим из (3.18):

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_{P_0(X)} P^i f(\eta) dP. \tag{3.21}$$

[9] Согласно J. Synge [18].

Заметим, что в [19] был сделан неправильный вывод о том что вектор плотности потока числа частиц зависит от знака эффективной массы. Такой вывод был получен вследствие того, что вычисление макроскопических средних было начато с вычисления моментов функции распределения, тогда как в случае отрицательных масс корректные вычисления необходимо было начинать на более раннем этапе, а именно с интегральных соотношений вида (3.9).

3.4. Скорость изменения динамических средних

Вычислим теперь скорость изменения среднего значения динамической функции $\psi(s)$, (3.9). Вычисляя производную по времени τ от обеих частей (3.9) с учетом символического правила дифференцирования δ - функции Дирака

$$\frac{d}{dx}\delta(g(x)) = \delta(g(x))\frac{d}{dx},$$

найдем:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{\Omega} \delta(s - s(\tau))\frac{ds}{d\tau}\frac{d}{ds}\Bigl(F(\eta(s))\psi(\eta(s))d\Gamma\Bigr). \tag{3.22}$$

Учтем в интеграле (3.22) постоянство фазового объема частицы (2.7) и соотношение для полной производной динамической функции (2.8):

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} &= \int\limits_{\Omega} \frac{d}{ds}\Bigl(F(\eta(s))\psi(\eta(s))\Bigr)\delta(s - s(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\Gamma \\ &= \int\limits_{\Omega}[H, F\psi]\delta(s - s(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\Gamma\end{aligned}$$

Учтем далее соотношение (2.14) и линейность скобки Пуассона:

$$[H, F\psi] = [H, f\delta(H)\psi] = \delta(H)[H, f\psi]. \tag{3.23}$$

Тогда, проводя интегрирование по временной координате и массовой поверхности, получим:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{\Omega_0} m_*[H, f\psi]d\Gamma_0 \tag{3.24}$$

В частности, для скорости изменения числа частиц (3.8) получим, полагая в (3.24) $\psi = 1$:

$$\frac{dN(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{\Omega_0} m_*[H, f]d\Gamma_0 \tag{3.25}$$

Учтем теперь соотношение (2.37) для функции Гамильтона скалярно заряженных частиц и получим окончательно:

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int\limits_{\Omega_0}\left(P^i\widetilde{\nabla}_i + \frac{1}{2}\partial_i m_*^2\frac{\partial}{\partial P_i}\right)f\psi d\Gamma_0. \tag{3.26}$$

Таким образом, соотношение для скорости изменения динамических средних также не зависит от знака массовой функции.

Пусть теперь область Ω_0 охватывает все шестимерное фазовое пространство Γ_0. Для упрощения первого интеграла в (3.26) необходимо воспользоваться интегральным соотношением для производной Картана (см., например, [1]):

$$\int\limits_{P(X)} \widetilde{\nabla}_i\psi(x, P)dP \equiv \nabla_i \int\limits_{P(X)} \psi(x, P)dP. \tag{3.27}$$

Далее, примем предположение относительно свойств динамических функций на бесконечной сфере $\Sigma_P(X)$, охватывающей трехмерное пространство импульсов:

$$f(x, P)\psi(x, P)|_{\Sigma_P(X)} \to 0. \tag{3.28}$$

Тогда, интегрируя по частям, получим интегральное соотношение:

$$\int\limits_{P_0(X)} \frac{\partial}{\partial P_i} f(x,P)\psi(x,P)dP_0 = 0. \qquad (3.29)$$

Таким образом, получим для (3.26):

$$\frac{d\Psi(\tau)}{d\tau} = \int\limits_V dV\nabla_i \int\limits_{P_0} P^i f\psi dP_0. \qquad (3.30)$$

4. Кинетические уравнения и уравнения переноса

4.1. Общерелятивистские кинетические уравнения

Поскольку фактор знака эффективной массы не влияет явно на форму инвариантных общерелятивистских кинетических уравнений, ограничимся краткими сведениями о релятивистских кинетических уравнениях (см., например, [3, 4, 14]). Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х мерной точечности столкновений частиц, в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I P_i = \sum_F P'_i, \qquad (4.1)$$

где суммирование проводится по всем начальным, P_i, и конечным, P'_i, состояниям. Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^{m} \nu_A a_A \rightleftarrows \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \qquad (4.2)$$

где a_A – символы частиц, а ν_A – их числа. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$P_I = \sum_{A=1}^{m}\sum_{\alpha}^{\nu_A} P^{\alpha}_A, \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'}\sum_{\alpha'}^{\nu'_B} P'^{\alpha'}_B. \qquad (4.3)$$

Функции распределения частиц определяются инвариантными кинетическими уравнениями [3][10]:

$$m_*[H_a, f_a] = \mathrm{I}_a(x,P), \qquad (4.4)$$

где $\mathrm{I}_a(x,P_a)$ – интеграл столкновений:

$$\mathrm{I}_a(x,P_a) = -\sum \nu_A \int_a' \delta^4(P_F - P_I)W_{IF}(Z_{IF} - Z_{FI})\prod_{I,F}' dP; \qquad (4.5)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4|M_{IF}|^2 2^{-\sum\nu_A + \sum\nu'_b}$$

– матрица рассеяния канала реакций (4.2), ($|M_{IF}|$ – инвариантные амплитуды рассеяния); I – начальное состояние, F – конечное;

$$Z_{IF} = \prod_I f(P^{\alpha}_A)\prod_F[1 \pm f(P^{\alpha'}_B)]; \quad Z_{FI} = \prod_I[1 \pm f(P^{\alpha}_A)]\prod_F f(P^{\alpha'}_B),$$

знак "+" соответствует бозонам, "-" – фермионам (подробности см. в [3, 4]).

[10] Нормировочный множитель $1/m_*$ в правой части (4.3) учитывает нормировку функции Гамильтона (2.37).

4.2. Уравнения переноса динамических величин

Перейдем теперь к выводу уравнений переноса динамических величин. Используя линейность скобки Пуассона и приравнивая правые части равенств (3.24) и (3.30), получим интегральное соотношение:

$$\int\limits_V dV\left(\nabla_i\int\limits_{P_0}P^i f\psi dP_0-\int\limits_{P_0}\psi m_*[H,f]dP_0-\int\limits_{P_0}fm_*[H,\psi]dP_0\right)=0.$$

Вследствие произвольности области V получим отсюда интегро - дифференциальное соотношение:

$$\nabla_i\int\limits_{P_0}P^i f\psi dP_0-\int\limits_{P_0}\psi m_*[H,f]dP_0-\int\limits_{P_0}fm_*[H,\psi]dP_0=0. \tag{4.6}$$

Подставляя во второй интеграл (4.6) вместо скобки Пуассона ее выражение из кинетических уравнений (4.4), получим;

$$\nabla_i\int\limits_{P_0}P^i f\psi dP_0-\int\limits_{P_0}\psi \mathrm{I}_a dP_0-\int\limits_{P_0}fm_*[H,\psi]dP_0=0. \tag{4.7}$$

Суммируя теперь (4.7) по всем сортам частиц и учитывая выражение для интеграла столкновений, получим в качестве строгих следствий общерелятивистских кинетических уравнений (4.4) *уравнения переноса динамических величин* $\psi_a(x,P_a)$:

$$\nabla_i\sum_a\int\limits_{P_0}\Psi_a f_a P^i dP_a-\sum_a\int\limits_{P_0}f_a m_*[H_a,\Psi_a]dP_a=$$

$$-\sum_{by\ chanels}\int\left(\sum_{A=1}^{m}\nu_A\Psi_A-\sum_{B=1}^{m'}\nu'_B\Psi'_B\right)\delta^4(P_F-P_I)(Z_{IF}W_{IF}-Z_{FI}W_{FI})\prod_{I,F}dP, \tag{4.8}$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (4.2).

Полагая в (4.8) $\Psi_a=g_a$, где g_a – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (4.2), получим с учетом (4.1), (4.3) и (4.8) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J^i_G=0, \tag{4.9}$$

где:

$$J^i_G=\sum_a\frac{2S+1}{(2\pi)^3}\,g_a\int\limits_{P_0}f_a(x,P)P^i dP_0. \tag{4.10}$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a. В частности, закон сохранения (4.9) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a=\delta^b_a$) при условии упругости их столкновений.

Положим в (4.8) $\Psi_a=P^k$, тогда подынтегральное выражение в больших круглых скобках (4.8) вследствие закона сохранения обобщенного импульса при столкновениях (4.1) равно:

$$\sum_{A=1}^{m}\nu_A\Psi_A-\sum_{B=1}^{m'}\nu'_B\Psi'_B\equiv P_I-P_F=0.$$

Таким образом, получим с учетом (2.23) и (4.1) уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T^{ik}_p-\sum_r\sigma_{(r)}\nabla^i\Phi_r=0, \tag{4.11}$$

где введены *тензор энергии - импульса плазмы*

$$T^{ik}_p=\sum_a\frac{2S+1}{(2\pi)^3}\int\limits_{P_0}f_a(x,P)P^iP^k dP_0 \tag{4.12}$$

и *скалярные плотности заряда a - го сорта частиц относительно скалярного поля* Φ_r, $\sigma_a^{(r)}$:

$$\sigma_{(r)} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int\limits_{P_0} f_a(x,P) dP_0. \tag{4.13}$$

В частности, для зарядового синглета (q,Φ) закон сохранения (4.11) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \tag{4.14}$$

где (см. [3, 22]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int\limits_{P_0)} f(x,P) dP_0. \tag{4.15}$$

Следует отметить, что форма ТЭИ (4.12), а также скалярной плотности заряда (4.13), найденная для скалярно заряженных частиц, при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

4.3. Закон сохранения полного тензора энергии - импульса

Полная система макроскопических уравнений состоит, во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \tag{4.16}$$

где T_p^{ik} – определенный выше ТЭИ статистической системы, а T_s^{ik} – ТЭИ системы N независимых скалярных полей:

$$T_s^{ik} = \sum_r \frac{\epsilon_1^{(r)}}{8\pi} \left[2\Phi^{,i}_{(r)} \Phi^{,k}_{(r)} - g^{ik} \Phi_{(r),j} \Phi^{,j}_{(r)} + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)\,2} g^{ik} \Phi^2_{(r)} \right], \tag{4.17}$$

где для классического скалярного поля $\epsilon_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\varepsilon_1 = -1$. Отметим, что ТЭИ скалярного поля в форме (4.17) получается из Лагранжиана [10]:

$$L_s = \sum_r \frac{\epsilon_1^{(r)}}{8\pi} (\Phi_{(r),i} \Phi^{,i}_{(r)} - \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)\,2} \Phi^2_{(r)}). \tag{4.18}$$

Вычисляя ковариантную производную ∇_k от суммарного тензора энергии импульса

$$T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}, \tag{4.19}$$

найдем с учетом (4.14) и (4.17):

$$\nabla_k T_i^k = \frac{1}{4\pi} \sum_r \left[\epsilon_1^{(r)} \left(\Box \Phi_{(r)} + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)\,2} \Phi_{(r)} \right) + 4\pi \sigma_{(r)} \right] \nabla_i \Phi_{(r)} = 0. \tag{4.20}$$

Вследствие функциональной независимости скалярных потенциалов $\Phi_{(r)}$ необходимым и достаточным условием выполнения (4.20) является выполнение серии условий:

$$\Box \Phi_{(r)} + \epsilon_2^{(r)} m_s^{(r)\,2} \Phi_{(r)} = -4\pi \epsilon_1^{(r)} \sigma. \tag{4.21}$$

Таким образом, мы получаем систему уравнения для потенциалов скалярного поля типа уравнений Клейна-Гордона (с точностью до знаков) с источниками.

5. Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

5.1. Локально равновесное распределение

В условиях термодинамического равновесия:

$$\frac{dS}{d\tau} = 0\,. \tag{5.1}$$

Предположим сначала, что взаимодействие всех частиц T - инвариантно. Тогда равенство (5.1) может выполняться лишь при выполнении условий (см. [14]):

$$Z_{fi} - Z_{if} = 0 \tag{5.2}$$

в каждом канале реакций (4.2). Уравнения (5.2) являются аналогом функциональных уравнений Больцмана [27]. Для их решения сделаем замену:

$$F_a = \mathrm{e}^{-\phi_a}\left(e^{-\phi_a} \mp 1\right)^{-1} \equiv \left(1 \mp \mathrm{e}^{\phi_a}\right)^{-1}\,, \tag{5.3}$$

в результате которой величины Z_{if} и Z_{fi} примут вид:

$$Z_{if} = \frac{\prod\limits_i e^{-\phi_a}}{\prod\limits_{i,f}(e^{-\phi_a} \mp 1)}\,; \quad Z_{fi} = \frac{\prod\limits_f e^{-\phi_a}}{\prod\limits_{i,f}(e^{-\phi_a} \mp 1)}\,. \tag{5.4}$$

Тогда после логарифмирования уравнения (5.2) примут вид:

$$\sum_{A=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{\nu_A}\phi_A(\mathrm{P}^\alpha_A) = \sum_{B=1}^{m'}\sum_{\beta=1}^{\nu'_A}\phi'_B(\mathrm{P}'^\beta_B)\,, \tag{5.5}$$

причем, эти соотношения должны выполняться в каждом канале реакций (4.2). Единственным решением (5.5) при произвольных значениях импульсов частиц являются линейные функции импульсов:

$$\phi_A(\mathrm{P}^\alpha_A) = -\lambda_A(x) + (\xi_A, \mathrm{P}^\alpha_A)\,, \tag{5.6}$$

где вследствие инвариантности функции распределения: $\lambda_A(x)$ - скаляры в конфигурационном пространстве, $\xi^i(x)$ - векторы. Подставляя (5.6) в уравнения (5.5) и учитывая закон сохранения обобщенного импульса при столкновениях, получим вследствие произвольности импульсов частиц:

$$\xi^i_A(x) = \xi^i(x)\,; \tag{5.7}$$

$$\sum_{A=1}^{N}\nu^k_A\lambda_A = 0\,, \tag{5.8}$$

где $||\nu^k_A||$ - целочисленная матрица, введенная в [14]. Вследствие очевидного условия замкнутости всех циклов реакций

$$\mathrm{rank}||\nu^k_A|| < N \tag{5.9}$$

уравнения (5.8) всегда имеют нетривиальное решение.

Условия (5.7), (5.8) являются условиями локального термодинамического равновесия (ЛТР); скаляры $\lambda_A(x)$ называются химическими потенциалами статистической системы.

Подставляя решения (5.6) в (5.3) с учетом (5.7) получим *локально - равновесные функции распределения*:

$$f^0_a(x, \mathrm{P}_a) = \left\{\exp[-\lambda_a + (\xi, \mathrm{P}_a)] \mp 1\right\}^{-1}\,, \tag{5.10}$$

где верхний знак, как и ранее, соответствует бозонам, нижний - фермионам.

Для сходимости моментов от распределения (5.10) необходима времениподобность вектора $\xi^i(x)$:

$$\xi^2 \equiv (\xi, \xi) > 0\,. \tag{5.11}$$

Введем с помощью $\xi^i(x)$ единичное времениподобное поле $v^i(x)$:

$$v^i = \frac{\xi^i}{\xi}\,; \quad (v,v) = 1\,, \tag{5.12}$$

локальную температуру $\theta(x)$ [27]:

$$\theta(x) = \xi^{-1} \tag{5.13}$$

и химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x) = \theta(x)\lambda_a(x)\,. \tag{5.14}$$

Тогда распределение (5.10) может быть записано в виде:

$$f_a^0(x,\mathrm{P}_a) = \left\{\exp\left[\frac{-\mu_a + (v,\mathrm{P}_a)}{\theta}\right] \mp `\right\}^{-1}\,. \tag{5.15}$$

5.2. Моменты равновесного распределения

Вычислим моменты распределения (5.10). При этом удобно перейти в локально лоренцевый репер, временная компонента которого направлена вдоль вектора v^i, в котором уравнение массовой поверхности (2.35) принимает вид:

$$P_4^2 = P^2 + m_*^2\,. \tag{5.16}$$

Затем необходимо перейти к сферической системе координат в пространстве импульсов $P(X)$ и ковариантно обобщить полученные результаты. В итоге получим выражения для компонент вектора плотности числа частиц, $n_a^i(x)$, и ТЭИ a-той компоненты плазмы, $\underset{a}{T}^{ik}$, [3], [6]:

$$n_a^i(x) = n_a(x)v^i\,; \tag{5.17}$$

$$\underset{a}{T}^{ik}(x) = (\mathcal{E}_a + P_a)v^iv^k - P_a g^{ik}\,, \tag{5.18}$$

где

$$n_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right] \mp 1\right\}^{-1} P^2dP\,; \tag{5.19}$$

$$\mathcal{E}_a(x) = \frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right] \mp 1\right\}^{-1} \sqrt{m_*^2+P^2}P^2dP\,; \tag{5.20}$$

$$P_a(x) = \frac{\rho}{6\pi^2}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right] \mp 1\right\}^{-1} \frac{P^4dP}{\sqrt{m_*^2+P^2}}\,; \tag{5.21}$$

$$\sigma^{(r)}(x) = \sum_a \frac{\rho}{2\pi^2}m_*q_a^{(r)}\int\limits_0^\infty \left\{\exp\left[\frac{-\mu_a + \sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right] \mp 1\right\}^{-1} \frac{P^2dP}{\sqrt{m_*^2+P^2}}\,. \tag{5.22}$$

Химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа ν_A^k таких частиц, участвующих в реакциях (5.8), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [26]:

$$\underline{\mu}_a = -\mu_a\,. \tag{5.23}$$

Заметим, что единичный вектор в направлении вектора плотности потока числа частиц называется *кинематической скоростью среды*, а собственный времениподобный единичный вектор ТЭИ частиц называется *динамической скоростью среды*, собственное же значение ТЭИ, соответствующее этому вектору, называется *плотностью энергии среды* (см., например, [18]). Таким образом в состоянии ЛТР кинематическая скорость частиц совпадает с их динамической скоростью и равна v^i. Плотность энергии частиц равна согласно (5.18)

$$\mathcal{E}_p(x) = \sum_a \mathcal{E}_a\,, \tag{5.24}$$

а изотропное давление всех сортов частиц:

$$P_p(x) = \sum_a P_a\,, \tag{5.25}$$

где $\mathcal{E}_a$ и P_a, описываются формулами (5.20) и (5.21).

Рассмотрим теперь T-неинвариантные взаимодействия, предполагая, однако, что распределение частиц остается локально равновесным, т.е., (5.10). Но тогда тождественно выполняются функциональные соотношения (5.2). Но тогда скорость изменения энтропии равна нулю, т.е., мы снова получаем условие ЛТР (5.1). Итак, энтропия системы всегда сохраняется, если распределение частиц является локально равновесным.

Обратимся теперь к уравнениям переноса (4.8). В условиях ЛТР вследствие (5.3) эти уравнения принимают более простую форму:

$$\nabla_i \sum_A \int\limits_{\mathrm{P}} \psi f p^i d\pi - \sum_A \int\limits_{\mathrm{P}} f\,[\mathcal{H}\,,\Psi]\,d\pi = -\sum_k \int\limits_{\mathrm{P}} \delta^{(4)}(\mathrm{P}_F - \mathrm{P}_I) \sum_A \nu^k_A \psi_A Z_{if}(W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi\,. \tag{5.26}$$

Полагая, в частности, $\psi_A = \delta^a_A$, получим из (5.26):

$$\nabla_i n^i_a = -\sum_k \nu^k_A \int\limits_{\mathrm{P}} \delta^{(4)}(\mathrm{P}_F - \mathrm{P}_I) Z_{if}(W_{if} - W_{fi}) \prod_{i,f} d\pi\,. \tag{5.27}$$

Проведем в правой части (5.27) интегрирование по конечным состояниям частиц:

$$\sum \nu^k_A \int \prod_f (1 \pm f)(W_{if} - W_{fi}) d\pi_f\,.$$

Вследствие унитарности S-матрицы и оптической теоремы (см. [14]) этот интеграл равен нулю. Поэтому в условиях ЛТР имеет место закон сохранения каждого сорта частиц:

$$\nabla_i n^i_a = 0 \Leftrightarrow N_a = \mathrm{Const}\,. \tag{5.28}$$

В соотношении (5.28) под n^-_a необходимо понимать разность плотностей потоков частиц и античастиц:

$$N^+_a - N^-_a = \mathrm{Const}\,. \tag{5.29}$$

5.3. Глобальное термодинамическое равновесие

Теория глобального термодинамического равновесия тритвиально обобщается на случай возможости отрицательных эффективных масс, поэтому мы приведем здесь лишь основные соотношения, отсылая читателя к ранним работам Автора [4,6]. В случае, когда функции распределения (5.10) (или (5.15)) являются точными решениями кинетических уравнений, статистическая система находится в строгом *глобальном термодинамическом равновесии.* В условиях глобального термодинамического равновесия выполняются строгие законы сохранения частиц каждого сорта (5.28), и энтропия системы строго постоянна $S = \mathrm{Const}$. Для нахождения условий глобального термодинамического равновесия в случае T-инвариантных взаимодействий,подставим решения (5.10) в кинетические уравнения. Поскольку интеграл T-инвариантных взаимодействий обращается в нуль на локально равновесных распределениях, приведем кинетические уравнения к виду:

$$[H_a, \phi_a] = 0\,, \tag{5.30}$$

куда необходимо подставить выражение для ϕ_a из (5.6). С учетом соотношения (2.37), получим:

$$[H_a, \phi_a] = \frac{1}{m_*}\left(P^i P^k \xi_{(i,k)} - P^i \lambda_a + \partial_i m_* \xi^i\right) = 0. \tag{5.31}$$

Таким образом, для обеспечения ГТР должен существовать линейный интеграл движения, причем ξ^i - времениподобный вектор. Учитывая произвольность вектора импульса, получим при $m_* \not\equiv 0$ необходимые и достаточные условия существования глобального термодинамического равновесия:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0; \tag{5.32}$$

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, m_* = 0; \tag{5.33}$$

$$\lambda_a = \mathrm{Const}\,. \tag{5.34}$$

Вследствие определения эффективной массы (2.33) и функциональной независимости скалярных полей, получим из (5.33) более жесткие условия глобального термодинамического равновесия:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Phi_{(r)} = 0, \quad (r = \overline{1,N}). \tag{5.35}$$

Поскольку далее все моменты равновесной функции распределения определяются с помощью скаляров ξ^2, λ_a, $\Phi_{(r)}$ и тензоров ξ^i, g^{ik}, $\xi^i\xi^k$, ..., то выполняются и законы сохранения моментов функции распределения [3]:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, n^i_a = 0\,; \tag{5.36}$$

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\underset{a}{T^{ik}} = 0 \tag{5.37}$$

и т.д. Вследствие этих уравнений вдоль направления ξ^i сохраняются компоненты тензора Римана, Риччи и тензора Эйнштейна:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, R_{ijkl} = 0\,; \quad \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, R_{ij} = 0\,; \quad \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, G_{ij} = 0\,. \tag{5.38}$$

Поэтому вследствие уравнений Эйнштейна должны выполняться соотношения:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, T_{ij} = 0\,. \tag{5.39}$$

6. Заключение

Таким образом, в этой статье мы расширили кинетическую теорию скалярно взаимодействующих частиц на случай произвольного числа скалярных полей, сняв при этом искусственное предположение о неотрицательности эффективной массы частиц. Для корректного обобщения кинетической теории на отрицательные эффективные массы частиц пришлось пересмотреть ряд ключевых положений этой теории. В результате мы получили естественное, непротиворечивое обобщение макроскопической теории взаимодействия вещества со скалярными полями, в которой не возникает никаких проблем в случае отрицательных эффективных масс частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic kinetic theory and conformal transformations, Russ. Phys. J., 25, 372–375 (1982).

2. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in thegeneral theory of relativity, Russ. Phys. J., 26, 686–690 (1983).

3. Yu.G. Ignat'ev, Russ. Phys. J., Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field, 26, 690–694 (1983).

4. Yu.G. Ignat'ev, Russ. Phys. J., Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles, 26, 1068–1072 (1983).

5. G.G. Ivanov, Russ. Phys. J., Relativistic statistical systems of particles with scalar interactions, 26, 31–35 (1983).

6. Yu.G. Ignat'ev and R.R. Kuzeev., Thermodynamic Equilibrium of the Self-Graviting Plasma with Scalar Interaction, Ukr. Fiz. J. – Vol. 29. – 1984. – p. 1021 – 1026.

7. Yu.G. Ignatev (Ignat'ev) and A.A. Popov, Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, Actrophysics and Space Science, 163, 153-174 (1990); arXiv:1101.4303v1 [gr-qc].

8. Yu. G. Ignat'ev, Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction, Russian Physics Journal, 55, 166–172 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc].

9. Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model, Russian Physics Journal, 55, 550–560, (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].

10. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. model with attraction of like-charged scalar particles. // Russian Physics Journal, 55, 1345–1350 (2013);arXiv:1307.2509 [gr-qc].

11. Yu.G. Ignat'ev, The statistical dynamics of classic particles ensemble in gravitational field, Grav. and Cosmol., **13**, 59–81 (2007).

12. E. Cartan, Les espaces de Finsler, Paris, 1934.

13. A.A. Vlasov. Statistical Distribution Functions. Moskow, Nauka, 1966.

14. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

15. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971

16. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev, Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. I. Microscopic Dynamics, Grav. and Cosmol., 20, 299-303 (2014).arXiV:1408.3404v1 [gr-qc]

17. A.Z. Petrov, Einstein spaces. Published by Pergamon Press (1969).

18. Synge J.L.. The relativistic gas. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, (1957).

19. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev, Grav. and Cosmol., Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models, Grav. and Cosmol., 20, pp. 304-308 (2014); arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].

20. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and A.A. Agathonov, Grav. and Cosmol., Numerical Models of Cosmological Evolution of the Degenerated Fermi-system of Scalar Charged Particles, Grav. and Cosmol., 21, to be publish; arXiv:1408.4738v1 [gr-qc].

21. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov, M.L. Mikailov and D.Yu. Ignatyev, Cosmological Evolution of Statistical System of Scalar Charged Particles, Astroph. Space Sci, to be publish.

22. Yu,G. Ignat'ev, Space, Time and Foudamental Interections. 2014, No 1. – p. 47–69 (In Russian).

23. Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov, Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology, Grav. & Cosmol., 12, No 2-3, 179–185 (2006); Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov, arXiv:1011.5774[gr-qc].

24. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and R.F. Miftakhov, Grav. and Cosmol., Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles 17, 190–193 (2011); arXiv:1101.1655 [gr-qc].

25. Syng J.L., Relativity: The General Theory, Amsterdam, 1960.

26. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.

27. N.A. Chernikov, Acta Phys. Polon., **27**, 723 (1965).

28. N.N. Lebedev. Spetial Functions and Its Applications. Moskow-Leningrad, GIFML, (1963).

29. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution, Kazan: Kazan University Press, 2013; http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf

Поступила в редакцию 12.03.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics. III. Advancing theory on negative masses.

Keywords: Relativistic Kinetics, Phantom Scalar Fields, Scalar Interaction of Particles, Negatives Masses.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

In article generalisation of macroscopical model of plasma of scalar charged particles, microscopic dynamics of a particle based on the equations in the presence of scalar fields, on a case of interaction of particles with several fields and negative effective weights of particles is considered. The theory manages to be generalised naturally, having reconsidered a number of its key positions depending on a sign of weight of particles. Thereby, it is possible to remove the artificial restriction contradicting more fundamental principle of additivity functional of action.

REFERENCES

1. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic kinetic theory and conformal transformations, *Russ. Phys. J.*, 25, 372–375 (1982).

2. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in thegeneral theory of relativity, *Russ. Phys. J.*, 26, 686–690 (1983).

3. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field, *Russ. Phys. J.*, 26, 690–694 (1983).

4. Yu.G. Ignat'ev, Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles, *uss. Phys. J.*, 26, 1068–1072 (1983).

5. G.G. Ivanov,Relativistic statistical systems of particles with scalar interactions, *Russ. Phys. J.*, 26, 31–35 (1983).

6. Yu.G. Ignat'ev and R.R. Kuzeev., Thermodynamic Equilibrium of the Self-Graviting Plasma with Scalar Interaction, *Ukr. Fiz. J.* – Vol. 29. – 1984. – p. 1021 – 1026.

7. Yu.G. Ignatev (Ignat'ev) and A.A. Popov, Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson-Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, *Actrophysics and Space Science*, 163, 153-174 (1990); arXiv:1101.4303v1 [gr-qc].

8. Yu. G. Ignat'ev, Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction, *Russian Physics Journal*, 55, 166–172 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc].

9. Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model, *Russian Physics Journal*, 55, 550–560, (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].

10. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. model with attraction of like-charged scalar particles. *Russian Physics Journal*, 55, 1345–1350 (2013); arXiv:1307.2509 [gr-qc].

11. Yu.G. Ignat'ev, The statistical dynamics of classic particles ensemble in gravitational field, *Grav. and Cosmol.*, **13**, 59–81 (2007).

12. E. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Paris, 1934.

13. A.A. Vlasov. *Statistical Distribution Functions*. Moscow, Nauka, 1966.

14. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). *Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields*. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

15. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971.

16. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev, Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. I. Microscopic Dynamics, *Grav. and Cosmol.*, 20, 299–303 (2014).
arXiV:1408.3404v1 [gr-qc]

17. A.Z. Petrov, *Einstein spaces*. Published by Pergamon Press (1969).

18. Synge J.L. *The relativistic gas*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, (1957).

19. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev, Grav. and Cosmol., Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models, *Grav. and Cosmol.*, 20, pp. 304–308 (2014);
arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].

20. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and A.A. Agathonov, Grav. and Cosmol., Numerical Models of Cosmological Evolution of the Degenerated Fermi-system of Scalar Charged Particles, *Grav. and Cosmol.*, 21, to be publish; arXiv:1408.4738v1 [gr-qc].

21. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov, M.L. Mikailov and D.Yu. Ignatyev, Cosmological Evolution of Statistical System of Scalar Charged Particles, *Astroph. Space Sci*, to be publish.

22. Yu,G. Ignat'ev, *Space, Time and Foudamental Interections*. 2014, No 1. – p. 47–69 (In Russian).

23. Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov, Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology, *Grav. and Cosmol.*, 12, No 2–3, 179–185 (2006);
Yu. Ignat'ev, R. Miftakhov, arXiv:1011.5774[gr-qc].

24. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and R.F. Miftakhov, Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles, *Grav. and Cosmol.*, 17, 190–193 (2011);
arXiv:1101.1655 [gr-qc].

25. Syng J.L., *Relativity: The General Theory*, Amsterdam, 1960.

26. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.

27. N.A. Chernikov, *Acta Phys. Polon.*, **27**, 723 (1965).

28. N.N. Lebedev. *Spetial Functions and Its Applications*. Moscow-Leningrad, GIFML, (1963).

29. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). *The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution*, Kazan: Kazan University Press, 2013; http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_ Ignatiev.pdf

Received 12.03.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru