УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

НЕМИНИМАЛЬНЫЕ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ. IV. СЛУЧАЙ КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ [2]

В статье рассматривается обобщение макроскопической модели плазмы скалярно заряженных частиц, основанной на уравнениях микроскопической динамики частицы в присутствии скалярных полей, на случай конформно инвариантного в ультрарелятивистском пределе скалярного поля. Исследованы асимптотические трансформационные свойства модели по отношению к конформным преобразованиям в ультрарелятивистском пределе. Найдено точное решение уравнений Эйнштейна в этом пределе.

Ключевые слова: Релятивистская кинетика, фантомные скалярные поля, скалярное взаимодействие частиц, конформные преобразования

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Введение

В начале 80-х годов прошедшего столетия в работах Автора были сформулированы основы релятивистской кинетической теории статистических систем со скалярным взаимодействием [1, 3, 4, 4, 5]. В те годы релятивистская кинетическая теория частиц со скалярным взаимодействием казалась умозрительной теоретической конструкцией, необходимой лишь для достижения полноты кинетической теории. Однако, в последнее десятилетие в связи открытием фактора темной энергии в космологии и Хиггсовых бозонов развитие этой теории представляется актуальным и необходимым для развития самой теоретической физики. В ряде последних работ Автора была сформулирована строгая релятивистская кинетическая теория статистических систем скалярно заряженных частиц, основанная на канонической микроскопической динамике и последующими аккуратными процедурами макроскопического усреднения, расширяющая эту теорию на случай фантомных полей и отрицательных эффективных масс частиц [6–15][3]. В том числе были построены космологические модели, основанные на таких системах [18–22]. В этих последних работах рассматривались модели с конформно неинвариантным скалярным полем. В данной работе мы распространим теорию и на конформно инвариантные скалярные поля.

2. Строгие макроскопические соотношения релятивистской кинетической теории

В этом разделе мы выпишем строгие соотношения релятивистской кинетической теории, не зависящие от трансформационных свойств скалярного поля, полученные в предыдущей статье [12].

2.1. Уравнения переноса динамических величин

Пусть в плазме протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^{m}\nu_A a_A \rightleftarrows \sum_{B=1}^{m'}\nu'_B a'_B, \tag{2.1}$$

где a_A – символы частиц, а ν_A – их числа в каждом канале реакций. Вследствие принципа локального соответствия и предположения о 4-х мерной точечности столкновений частиц в каждом акте межчастичного взаимодействия сохраняется обобщенный импульс системы взаимодействующих частиц:

$$\sum_I P_i = \sum_F P'_i, \tag{2.2}$$

[1] E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2] This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

[3] см. также монографии [8, 17].

где суммирование проводится по всем начальным, P_i, и конечным, P'_i, состояниям. Таким образом, обобщенные импульсы начального и конечного состояний равны:

$$P_I = \sum_{A=1}^{m} \sum_{\alpha}^{\nu_A} P_A^{\alpha}, \quad P_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} {P'}_B^{\alpha'}. \tag{2.3}$$

Уравнения переноса динамических величин являются строгими интегро - дифференциальными следствиями релятивистских кинетических уравнений в предположении сохранения 4-вектора обобщенного импульса во всех каналах взаимодействия элементарных частиц:

$$\nabla_i \sum_a \int\limits_{P_0} \Psi_a f_a P^i dP_a - \sum_a \int\limits_{P_0} f_a m_* [H_a, \Psi_a] dP_a =$$

$$- \sum_{by\ chanels} \int \left(\sum_{A=1}^{m} \nu_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \Psi'_B \right) \delta^4(P_F - P_I)(Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \tag{2.4}$$

где суммирование проводится по всем каналам реакций (2.1).

При $\Psi_a = g_a$, где g_a – некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (2.1), получим с учетом (2.2), (2.3) и (2.4) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц плазмы:

$$\nabla_i J^i_G = 0, \tag{2.5}$$

где:

$$J^i_G = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \, g_a \int\limits_{P_0} f_a(x, P) P^i dP_0. \tag{2.6}$$

– вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a.

Полагая в (2.4) $\Psi_a = P^k$, получим уравнения переноса энергии-импульса плазмы:

$$\nabla_k T^{ik}_p - \sum_r \sigma_{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \tag{2.7}$$

где введены *тензор энергии - импульса плазмы*

$$T^{ik}_p = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int\limits_{P_0} f_a(x, P) P^i P^k dP_0 \tag{2.8}$$

и *скалярные плотности заряда плазмы относительно скалярного поля* Φ_r, $\sigma^{(r)}$:

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma^{(r)}_a, \tag{2.9}$$

где $\sigma^{(r)}_a$ – *скалярные плотности заряда a-той компоненты плазмы относительно скалярного поля* Φ_r:

$$\sigma^{(r)}_a = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m^*_a q^{(r)}_a \int\limits_{P_0} f_a(x, P) dP_0, \tag{2.10}$$

В частности, для зарядового синглета (q, Φ) закон сохранения (2.7) принимает вид:

$$\nabla_k T^{ik}_p - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \tag{2.11}$$

где (см. [3, 11]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int\limits_{P_0)} f(x, P) dP_0. \tag{2.12}$$

Следует отметить, что форма ТЭИ (2.8), а также скалярной плотности заряда (2.10), найденная для скалярно заряженных частиц, при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

2.2. Термодинамическое равновесие плазмы в гравитационном поле

В условиях термодинамического равновесия вследствие так называемых функциональных уравнений Больцмана функции распределения принимают *локально - равновесную* форму:

$$f^0_a(x,\mathrm{P}_a)=\{\exp[-\lambda_a+(\xi,\mathrm{P}_a)]\mp 1\}^{-1}\ , \tag{2.13}$$

где верхний знак соответствует бозонам, нижний – фермионам, причем вектор $\xi^i(x)$ должен быть времениподобен:

$$\xi^2\equiv(\xi,\xi)>0\,, \tag{2.14}$$

а *приведенные химические потенциалы* λ_a должны удовлетворять серии условий *химического равновесия*:

$$\sum_{A=1}^{m}\nu_A\lambda_A=\sum_{B=1}^{m'}\nu'_B\lambda'_B \tag{2.15}$$

соответственно реакциям (2.1). Времениподобный вектор $\xi^i(x)$ определяет макроскопические кинематическую и динамическую скорости системы $v^i(x)$:

$$v^i=\frac{\xi^i}{\xi}\,;\quad (v,v)=1\,, \tag{2.16}$$

и ее локальную температуру $\theta(x)$:

$$\theta(x)=\xi^{-1}, \tag{2.17}$$

с помощью которой определяются химические потенциалы, $\mu_a(x)$, в обычной нормировке:

$$\mu_a(x)=\theta(x)\lambda_a(x)\,. \tag{2.18}$$

В этих терминах распределение (2.13) может быть записано в виде:

$$f^0_a(x,\mathrm{P}_a)=\left\{\exp\left[\frac{-\mu_a+(v,\mathrm{P}_a)}{\theta}\right]\mp 1\right\}^{-1}\ , \tag{2.19}$$

а моменты распределения принимают вид [3], [5]:

$$n^i_a(x)=n_a(x)v^i\,; \tag{2.20}$$

$$\underset{a}{T}^{ik}(x)=(\mathcal{E}_a+P_a)v^iv^k-P_ag^{ik}, \tag{2.21}$$

где:

$$n_a(x)=\frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{P^2dP}{\exp\left(\frac{-\mu_a+\sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right)\mp 1}\,; \tag{2.22}$$

$$\mathcal{E}_a(x)=\frac{\rho}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{m_*^2+P^2}P^2dP}{\exp\left(\frac{-\mu_a+\sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right)\mp 1}\,; \tag{2.23}$$

$$P_a(x)=\frac{\rho}{6\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{P^4dP}{\sqrt{m_*^2+P^2}\exp\left(\frac{-\mu_a+\sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right)\mp 1}\,; \tag{2.24}$$

$$\sigma^{(r)}_a(x)=\frac{\rho m_* q^{(r)}_a}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty\frac{P^2dP}{\sqrt{m_*^2+P^2}\exp\left(\frac{-\mu_a+\sqrt{m_*^2+P^2}}{\theta}\right)\mp 1}\,. \tag{2.25}$$

При этом:

$$\mathcal{E}=\sum_a\mathcal{E}_a;\ P=\sum_a P_a;\ \sigma^{(r)}=\sum_a\sigma^{(r)}_a. \tag{2.26}$$

3. Самосогласованная кинетическая модель самогравитирующей плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

Полная система макроскопических уравнений состоит, во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_s^{ik}), \tag{3.1}$$

где T_p^{ik} – определенный выше ТЭИ статистической системы, а T_s^{ik} – ТЭИ системы N независимых скалярных полей. В этой статье в целях методической простоты мы рассмотрим систему из одного скалярного поля, Φ. Обобщение результатов на случай n скалярных полей с учетом вышеприведенных формул и аддитивности функции Лагранжа не требует особых усилий.

3.1. Неконформное скалярное поле

Рассмотрим сначала функцию Лагранжа классического массивного вещественного скалярного поля Φ. В этом случае Лагранжиан вещественного скалярного поля можно выбрать в виде:

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - \epsilon_2 m_s^2\Phi^2\right), \tag{3.2}$$

где m_s – масса квантов скалярного поля, $\epsilon_2 = 1$ для классического скалярного поля, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$. Тогда тензор энергии-импульса скалярного поля есть:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(2\Phi^{,i}\Phi^{,k} - g^{ik}\Phi^{,j}\Phi_{,j} + \epsilon_2 g^{ik} m_s^2\Phi^2\right). \tag{3.3}$$

Уравнения Эйнштейна для статистической системы скалярно заряженных частиц имеют вид:

$$R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik} = 8\pi(T_p^{ik} + T_s^{ik}), \tag{3.4}$$

куда необходимо подставить выражения для компонент тензоров энергии импульса плазмы (2.21), (2.23), (2.24) и скалярного поля (3.3). Вычисляя ковариантные дивергенции от обеих частей уравнений Эйнштейна (3.4), получим из (2.7) и (3.3) законы сохранения суммарных энергии - импульса:

$$\nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \frac{1}{4\pi}\nabla^i\Phi\left[\epsilon_1(\Box\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi) + 4\pi\sigma\right] = 0, \tag{3.5}$$

откуда, полагая $\Phi \not\equiv \mathrm{Const}$, получим уравнение массивного неконформного скалярного поля с источником [3]:

$$\Box\Phi + m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma, \tag{3.6}$$

где

$$\Box\Phi \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\Phi$$

– оператор д'Аламбера. След тензора энергии-импульса скалярного поля (3.3) равен:

$$T_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi}(-\Phi^{,j}\Phi_{,j} + 2\epsilon_2 m_s^2\Phi^2). \tag{3.7}$$

3.2. Конформное скалярное поле

Рассмотрим теперь функцию Лагранжа классического массивного вещественного конформного скалярного поля Φ (см., например, [4,5]; для массивного скалярного поля конформная инвариантность понимается как асимптотическое свойство при ($m_s \to 0$)):

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} - \epsilon_2 m_s^2\Phi^2 + \frac{R}{6}\Phi^2\right). \tag{3.8}$$

Функция Лагранжа отличается от стандартной (см., например, [25]) наличием множителя $1/8\pi$, а также введенными единичными индикаторами ϵ_α. Кроме того, в нашей работе тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индексов тензора Римана $R_{jl} = g^{ik}R_{ijkl}$. Компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля относительно функции Лагранжа (3.8) равны [25]:

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\Bigl[\Phi^{,i}\Phi^{,k} - \frac{1}{2}g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \frac{1}{2}\epsilon_2 m_s^2 g^{ik}\Phi^2 + \frac{1}{6}\Bigl(R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik}\Bigr)\Phi^2 - \frac{1}{6}\bigl(\nabla^i\nabla^k - g^{ik}\Box\bigr)\Phi^2\Bigr]. \tag{3.9}$$

Если провести дифференцирование Φ^2 в этом выражении, то мы получим другую форму записи тензора энергии - импульса скалярного поля (см., например, [8])

$$T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\Bigl[\frac{4}{3}\Phi^{,i}\Phi^{,k} - \frac{1}{3}g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \epsilon_2 m_s^2 g^{ik}\Phi^2 + \frac{1}{3}\Bigl(R^{ik} - \frac{1}{2}Rg^{ik}\Bigr)\Phi^2 - \frac{2}{3}\Phi\Phi^{,ik} + \frac{2}{3}g^{ik}\Phi\Box\Phi\Bigr]. \tag{3.10}$$

Ковариантная дивергенция от тензора (3.9) с учетом коммутационных соотношений для вторых ковариантных производных вектора (см., например, [24]):

$$u_{i,kl} - u_{i,lk} = R^m_{.ikl}u_m \Rightarrow g^{kl}\nabla_k\bigl(\nabla_l\Phi_{,i}\bigr) = \nabla_i\Box\Phi + R^k_i\nabla_k\Phi \tag{3.11}$$

равна:

$$\nabla_k T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\nabla^i\Phi\left(\Box\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi - \frac{R}{6}\Phi\right), \tag{3.12}$$

Вычисляя ковариантные дивергенции от обеих частей уравнений Эйнштейна (3.4), получим из (2.7) и (3.12) законы сохранения суммарных энергии - импульса:

$$\nabla_k(T_p^{ik} + T_s^{ik}) = \frac{1}{4\pi}\nabla^i\Phi\left[\epsilon_1\left(\Box\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi - \frac{R}{6}\Phi\right) + 4\pi\sigma\right] = 0, \tag{3.13}$$

откуда, полагая $\Phi \not\equiv \mathrm{Const}$, получим уравнение массивного скалярного поля с источником (см. [4]):

$$\Box\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi - \frac{R}{6}\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma. \tag{3.14}$$

Система уравнений (2.7), (3.1) и (3.14) совместно с определениями (2.8) и (2.9) представляют замкнутую систему самосогласованных уравнений, описывающих статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. Вычисляя след тензора энергии-импульса скалярного поля (3.9), получим с учетом (3.14): Вычисляя след тензора энергии-импульса скалярного поля, найдем:

$$T_s \equiv g_i k T_s^{ik} = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\Phi\left(\Box\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi - \frac{R}{6}\Phi\right), \tag{3.15}$$

откуда с учетом уравнения поля (3.14) получим более простое выражение;

$$T_s = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{4\pi}m_s^2\Phi^2 - \sigma\Phi. \tag{3.16}$$

4. Самосогласованная космологическая модель для локально равновесной плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием

В случае выполнения условия ЛТР $t \gg \tau_{eff}$ (t – характерный временной масштаб статистической системы, τ_{eff} – эффективное время межчастичных взаимодействий) интеграл столкновений в правой части кинетических уравнений становится большой величиной, поэтому для локально равновесной плазмы вместо решения кинетических уравнений необходимо воспользоваться определением тензора энергии - импульса жидкости (2.21), а также соотношениями (2.22)–(2.24), определяющими макроскопические скаляры, и уравнениями химического равновесия (2.18). При этом необходимо учитывать, что локально-равновесные функции распределения (2.13) при выполнении условий химического равновесия автоматически обращают в нуль интеграл столкновений (см. [12]). Однако, согласно логике гидродинамического приближения (см., например, [1]) равенство нулю правой части кинетических уравнений в этом случае необходимо понимать лишь как приближенное соотношение, справедливое лишь для макроскопических моментов локально равновесной функции распределения.

4.1. Самосогласованная система уравнений для изотропной однородной пространственно плоской Вселенной

Рассмотрим пространственно-плоскую космологическую модель Фридмана

$$ds^2 = a^2(\eta)ds_0^2 \equiv a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2), \tag{4.1}$$

когда материя состоит из равновесной плазмы скалярно взаимодействующих частиц и массивного скалярного поля, зависящего лишь от космологического времени, $\Phi(t)$. Состоянию покоя плазмы относительно синхронной в метрике (4.1) системы отсчета соответствует вектор макроскопической скорости:

$$v^i = a^{-1}\delta^i_4. \tag{4.2}$$

Компоненты тензора Эйнштейна относительно метрики (4.1) равны:

$$G^i_k = 2\frac{2a'^2 - aa''}{a^4}v^i v_k + \frac{2aa'' - a'^2}{a^4}\delta^i_k. \tag{4.3}$$

Далее, вычисляя компоненты $\Phi^{,i}_{\ ,k}$, найдем:

$$\Phi^{,i}_{\ ,k} = \left(\Phi'' - 2\frac{a'}{a}\Phi'\right)\frac{v^i v_k}{a^2} + \frac{a'\Phi'}{a^3}\delta^i_k. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (3.16) следует:

$$-R = 6\frac{a''}{a^3} = -8\pi\sigma\Phi + 2\epsilon_1\epsilon_2 m_s^2\Phi^2. \tag{4.5}$$

4.2. Неконформное скалярное поле

В этом случае получим из (3.3):

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(\frac{\Phi'^2}{a^2} + m_s^2\Phi^2\right); \quad P_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(\frac{\Phi'^2}{a^2} - m_s^2\Phi^2\right). \tag{4.6}$$

При этом для следа тензора энергии-импульса скалярного поля получим:

$$T_s = \mathcal{E}_s - 3P_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi}(-\frac{\Phi'^2}{a^2} + 2m_s^2\Phi^2), \tag{4.7}$$

а также:

$$\mathcal{E}_s + P_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\frac{\Phi'^2}{a^2}. \tag{4.8}$$

4.3. Конформное скалярное поле

Отметим полезное для дальнейшего соотношение:

$$\left(\Box - \frac{R}{6}\right)\frac{\phi}{a} = \frac{\phi''}{a^3}, \tag{4.9}$$

с помощью которого уравнение конформного скалярного поля (3.14) $\Phi(\eta)$ в метрике (4.1) может быть записано в виде:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d^2}{d\eta^2}a\Phi + \epsilon_2 m_s^2\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma. \tag{4.10}$$

Учитывая соотношения (4.3)–(4.5), вычислим компоненты тензора энергии-импульса конформного скалярного поля (3.9) и представим их в виде компонент тензора энергии-импульса идеальной жидкости

$$\underset{s}{T}{}^i_{\ k} = (\mathcal{E}_s + P_s)v^i v_k - P_s\delta^i_k, \tag{4.11}$$

где $\mathcal{E}_s$ и P_s - плотность энергии и давление скалярного поля, соответственно:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left[\frac{1}{a^4}(a\Phi)'^2 + \epsilon_2 m_s^2\Phi^2\right]; \tag{4.12}$$

$$P_s = \frac{\epsilon_1}{24\pi}\left[\frac{1}{a^4}(a\Phi)'^2 - \epsilon_2 m_s^2\Phi^2 + 8\pi\epsilon_1\Phi\sigma\right]. \tag{4.13}$$

4.4. Конформные преобразования макроскопических скаляров

Исследуем трансформационные свойства макроскопических скаляров (2.22) – (2.25) по отношению к конформным преобразованиям:

$$ds^2 = a^2(\eta)d\bar{s}^2; \quad \Phi(\eta) = \frac{\bar{\Phi}(\eta)}{a(\eta)}, \tag{4.14}$$

полагая здесь и в дальнейшем

$$m_* = q\Phi \Rightarrow m_* = \frac{\bar{m}_*}{a(\eta)}. \tag{4.15}$$

Таким образом, мы видим, что при преобразовании импульса и термодинамических скаляров по закону:

$$p = \frac{\bar{p}}{a(\eta)}; \quad \theta = \frac{\bar{\theta}}{a(\eta)}; \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{a(\eta)} \tag{4.16}$$

макроскопические скаляры (2.22) – (2.25) преобразуются по законам:

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{\bar{n}_a}{a^3(\eta)}; \quad \mathcal{E}_a = \frac{\bar{\mathcal{E}}_a}{a^4(\eta)}; \\ P_a &= \frac{\bar{P}_a}{a^4(\eta)}; \quad \sigma_a = \frac{\bar{\sigma}_a}{a^3(\eta)}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Тогда закон сохранения некоторого фундаментального заряда Q принимает вид:

$$\frac{1}{a^4}\frac{d}{d\eta}a^3\sum_a q_a n_a = 0 \Rightarrow \sum_a q_a\bar{n}_a = \mathrm{Const}. \tag{4.18}$$

Далее при нулевом массивном члене в уравнении скалярного поля (4.10) получим закон преобразования полевого уравнения:

$$\frac{1}{a^3}\frac{d^2}{d\eta^2}a\Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma \Rightarrow \frac{d^2}{d\eta^2}\bar{\Phi} = -4\pi\epsilon_1\bar{\sigma}. \tag{4.19}$$

Уравнение переноса энергии-импульса плазмы (2.7) в метрике (4.1) можно записать в виде:

$$\mathcal{E}'_{pl} + 3\frac{a'}{a}(\mathcal{E}_{pl} + P_{pl}) = \sigma\Phi'. \tag{4.20}$$

Производя в этом уравнении конформные преобразования (4.14) – (4.16) с учетом (4.17) получим:

$$\bar{\mathcal{E}}'_{pl} - \bar{\sigma}\bar{\Phi}' = \frac{a'}{a}(\bar{\mathcal{E}}_{pl} - 3\bar{P}_{pl} + \bar{\sigma}\bar{\Phi}). \tag{4.21}$$

Если бы правая часть (4.21) равнялась нулю, то мы получили бы конформный закон сохранения

$$\bar{\mathcal{E}}'_{pl} - \bar{\sigma}\bar{\Phi}' = 0. \tag{4.22}$$

В общем случае это не так, однако, в ульрарелятивистском пределе

$$\frac{p}{m_*} \to \infty; \Rightarrow \bar{\mathcal{E}}_{pl} - 3\bar{P}_{pl} \to 0; \quad \bar{\sigma} \to 0 \tag{4.23}$$

восстанавливается конформная инвариантность модели скалярного взаимодействия.

Далее заметим, что при этом (решение уравнения поля $\Phi = \mathrm{Const}/a(\eta)$) согласно (4.12) плотность энергии скалярного поля равна нулю $\mathcal{E}_s = 0$, а единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{a'^2}{a^4} = 8\pi\mathcal{E}; \tag{4.24}$$

принимает вид:

$$3\frac{a'^2}{a^4} = 8\pi\frac{\bar{\mathcal{E}}}{a^4} \Rightarrow; a' = \mathrm{Const}, \tag{4.25}$$

т.е., имеет своим решением ультрарелятивистское решение $a = a_1\eta$.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 1 *Для безмассового конформно инвариантного скалярного поля в ультрарелятивистском пределе имеется точное решение уравнений Эйнштейна:*

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{a_0}{\eta} \quad \Phi = \frac{\Phi_0}{\eta} \quad \theta = \frac{\theta_0}{\eta};\\ n &= \frac{n_0}{\eta^3} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{\eta^3} \quad \mathcal{E}_{pl} = \frac{\mathcal{E}^0_{pl}}{\eta^4}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

5. Заключение

Таким образом, поведение космологической материи в случае конформно инвариантного скалярного поля существенно отличается от поведения системы в случае конформно неинвариантного скалярного поля. В последующих публикациях мы более полно исследуем эти различия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu.G. Ignat'ev. Relativistic kinetic theory and conformal transformations // Russ. Phys. J., 25, 372–375 (1982).
2. Yu.G. Ignat'ev. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity // Russ. Phys. J., 26, 686–690 (1983).
3. Yu.G. Ignat'ev, Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field // Russ. Phys. J., 26, 690–694 (1983).
4. Yu.G. Ignat'ev. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles // Russ. Phys. J., 26, 1068–1072 (1983).
5. Ю. Г. Игнатьев, Р. Р. Кузеев. Термодинамическое равновесие самогравитирующей плазмы со скалярным взаимодействием // Украинский физический журнал, Т. 29, №. 7, 1984 – с. 1021–1026.
6. Yu. G. Ignat'ev, Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction. // Russ. Phys. J., 55, 166–172 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc].
7. Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model. // Russ. Phys. J., 55, 550–560, (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].
8. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev), Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. model with attraction of like-charged scalar particles. // Russ. Phys. J., 55, 1345–1350 (2013);arXiv:1307.2509 [gr-qc].
9. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamics. // Grav. and Cosmol., 2014, Vol. 20, No. 4, pp. 299–303; arXiV:1408.3404v1 [gr-qc].
10. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models. // Grav. and Cosmol., Vol. 20, pp. 304–308 (2014); arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].
11. Yu. G. Ignat'ev, Space, Time and Foudamental Interections. 2014, No 1. – p. 47–69 (In Russian).
12. Игнатьев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. III. Расширение теории на отрицательные массы. // Space, Time and Foudamental Interections. – Вып. 1 – 2015. – с. 5–23 (In Russian).

13. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev). The Possibility of a Strict Global Thermodynamic Equilibrium in the Expanding Universe in the Presence of a Fundamental Scalar Field // Grav. and Cosmol., 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 113–117; arXiv:1410.2487v1 [physics.ge].

14. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics. I. Extension of the Theory for Negative Masses. // Grav. and Cosmol., (in print); arXiv:1504.02768v1 [gr-qc].

15. Yu.G. Ignat'ev Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics. II. Transport Equations. // Grav. and Cosmol., (in print); arXiv:1504.03649v1 [gr-qc].

16. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

17. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution, Kazan: Kazan University Press, 2013; http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf

18. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles // Grav. and Cosmol. – 2011, Vol. 17, No. 2, pp. 190–193; arXiv:1011.5774[gr-qc].

19. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev) and A. A. Agathonov. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles // Grav. and Cosmol. – 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 105–112; arXiv:1408.4738v1 [gr-qc].

20. Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов, Д.Ю. Игнатьев, М.Л. Михайлов Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. II. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным фантомным взаимодействием. // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – Вып. 3 – 2014. – с. 16–31.

21. Yurii Ignat'ev, Alexander Agathonov, Mikhail Mikhailov, Dmitry Ignatyev. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles // Astrophys Space Sci (2015) 357:61; arXiv:1411.6244v1 [gr-qc].

22. Yu. G. Ignat'ev, M. L. Mikhailov. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases. // Russ. Phys. J. – 2015, Vol. 57, Issue 12, pp. 1743–1752.

23. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.

24. A.Z. Petrov, Einstein spaces. Published by Pergamon Press (1969).

25. Vitaly N. Melnikov, Fields and Constants in the Theory of Gravitation, CBPF-MO-002/02, Rio de Janeiro, 2002.

Поступила в редакцию 12.03.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics. IV. Advancing theory on the conformal invariant scalar fields.

Keywords: Relativistic Kinetics, Phantom Scalar Fields, Scalar Interaction of Particles, Conformal Transformations.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

In article generalisation of macroscopical model of plasma of scalar charged particles, microscopic dynamics of a particle based on the equations in the presence of scalar fields, on a case of is conformal invariant scalar fields in an ultrarelativistic limit is considered. Asymptotic transformation properties of model in relation to conformal transformations to an ultrarelativistic limit are investigated. The exact solution of the equations of Einstein is found in this limit.

REFERENCES

1. Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 25, 372–375 (1982).
2. Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 26, 686–690 (1983).
3. Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 26, 690–694 (1983).
4. Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 26, 1068–1072 (1983).
5. Yu.G. Ignat'ev and R.R. Kuzeev., *Ukr. Fiz. J.* – Vol. 29. – 1984. – p. 1021–1026.
6. Yu. G. Ignat'ev, *Russ. Phys. J.*, 55, 166–172 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc].
7. Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), *Russ. Phys. J.*, 55, 550–560, (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].
8. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev), *Russ. Phys. J.*, 55, 1345–1350 (2013);arXiv:1307.2509 [gr-qc].
9. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, 2014, Vol. 20, No. 4, pp. 299–303; arXiV:1408.3404v1 [gr-qc].
10. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, Vol. 20, pp. 304–308 (2014); arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].
11. Yu. G. Ignat'ev, *Space, Time and Foudamental Interections*. 2014, No 1. – pp. 47–69 (In Russian).
12. Yu. G. Ignat'ev, *Space, Time and Foudamental Interections*. 2015, No 1. – pp. 5–23 (In Russian).
13. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev), *Grav. and Cosmol.*, 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 113–117; arXiv:1410.2487v1 [physics.ge].
14. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), *Grav. and Cosmol.*, (in print); arXiv:1504.02768v1 [gr-qc].
15. Yu.G. Ignat'ev, *Grav. and Cosmol.*, (in print); arXiv:1504.03649v1 [gr-qc].
16. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev), *Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields*. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.
17. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev), *The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution*, Kazan: Kazan University Press, 2013; http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_ Ignatiev.pdf
18. Yu.G. Ignatyev and R.F. Miftakhov. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles, *Grav. and Cosmol.* – 2011, Vol. 17, No. 2, pp. 190–193; arXiv:1011.5774 [gr-qc].
19. Yu. G. Ignatyev (Ignat'ev) and A. A. Agathonov, *Grav. and Cosmol.* – 2015, Vol. 21, No. 2, pp. 105–112; arXiv:1408.4738v1 [gr-qc].
20. Yurii Ignat'ev, Alexander Agathonov, Dmitry Ignatyev, Mikhail Mikhailov,*Space, Time and Foudamental Interections*, No. 3 – 2014. – pp. 16–31.
21. Yurii Ignat'ev, Alexander Agathonov, Mikhail Mikhailov, Dmitry Ignatyev, *Astrophys Space Sci* (2015) 357:61; arXiv:1411.6244v1 [gr-qc].
22. Yu. G. Ignat'ev, M. L. Mikhailov, *Russ. Phys. J.* – 2015, Vol. 57, Issue 12, pp. 1743–1752.
23. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Statistical Physics*. Vol. 5 (3rd ed.). Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1980.
24. Vitaly N. Melnikov, *Fields and Constants in the Theory of Gravitation*, CBPF-MO-002/02, Rio de Janeiro, 2002.
25.] A.Z. Petrov, *Einstein spaces*. Published by Pergamon Press (1969).

Received 12.03.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru