УДК 530.12:531.18

В. В. Войтик[1]

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИВОЛИНЕЙНОГО РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Тремя эквивалентными способами вычислены параметры общего криволинейного движения в лабораторной системе S^* равноускоренной системы отсчёта s. Один из этих способов есть буст из системы отсчёта, в которой s движется прямолинейно с сохранением ориентации. Другой способ заключается в решении уравнений обратной задачи кинематики. Третий способ состоит в решении уравнений движения тетрады. Тем самым показано, что уравнения обратной задачи кинематики и тетрадные уравнения можно считать обоснованными. Также в статье найдено в явном виде преобразование в криволинейно движущуюся равноускоренную систему отсчёта и доказано утверждение, что в системе отсчёта S^* собственная прецессия Томаса и вращение Вигнера системы s противоположно направлены и компенсируют друг друга.

Ключевые слова: прецессия Томаса, вращение Вигнера, равноускоренное движение, обратная задача кинематики, собственное ускорение, собственная угловая скорость

PACS: 03.30.+p

Введение

Равноускоренным движением, как известно, называется такое движение жёсткой системы отсчёта, при котором компоненты собственного ускорения её начала остаются постоянными. При этом такая система отсчёта не вращается относительно мгновенно сопутствующей инерциальной системы отсчёта. Иногда [1, с. 128, п. 19] под таким движением понимается движение под действием силы, остающейся постоянной в лабораторной системе. Но в том случае, если система отсчёта под действием силы двигается не прямолинейно и постольку, поскольку в процессе движения направление скорости системы отсчёта изменяется относительно осей лабораторной системы S^*, то вследствие тензорного закона преобразования 3-сил, сила в собственной системе отсчёта будет изменяться как по величине, так и по направлению. Поэтому в общем случае такое движение нельзя рассматривать как равноускоренное. Это движение - под действием однородного силового поля в лабораторной системе отсчёта здесь будет называться *гиперболическим*. Различие между этими двумя типами движений системы отсчёта s видно ещё и по тому, что для гиперболического движения в системе S^* обычно несущественна собственная ориентация s, поэтому оно полностью определяется начальной скоростью s. Равноускоренное же движение s характеризуется, кроме начальной скорости ещё и 3 углами, определяющими начальную ориентацию s относительно S^*. Таким образом, следует различать равноускоренное и гиперболическое движения. Только в том случае, когда гиперболическое движение и равноускоренное движение разных систем отсчёта осуществляется вдоль одной прямой линии, скорости их начал отсчёта как функции лабораторного времени будут друг с другом совпадать.[2]

Цели данной статьи две.

Ранее в [2, формулы (2.10), (2.11)] были представлены так называемые "уравнения обратной задачи кинематики" , то есть дифференциальные уравнения для параметров движения неинерциальной системы отсчёта: 3-вектора $\mathbf{v}'$ и матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$. С другой стороны давно известно уравнение движения для ортонормированной тетрады 4-векторов, ассоциированных с данной системой отсчёта [3, формула (4)] (см. также [4, формулы (5.3), (5.4)]). Все эти уравнения являются следствием (см. [2], [5, формулы (15), (16)]) известного преобразования Лоренца-Мёллера-Нэлсона в произвольную жёсткую систему отсчёта и, следовательно, эквивалентны друг другу. Тем не менее, на практике данные уравнения почти не использовались (см. впрочем [6], [7]) и, поэтому, они всё ещё недостаточно обоснованы. Таким образом, одна из целей статьи заключается в проверке данных уравнений на примере наиболее общего равноускоренного движения. Причиной для применения в качестве теста именно равноускоренного движения, являются математические трудности при решении общих дифференциальных уравнений обратной задачи кинематики.

---

[1] E-mail: voytik1@yandex.ru

[2] Это утверждение будет доказано в другой статье.

Кроме того, общее (не обязательно прямолинейное) равноускоренное движение интересно само по себе. На практике движение равноускоренной системы отсчёта может встретиться в будущем в космонавтике, так как космические станции, совершая перелёты, будут представлять собой системы с постоянным собственным ускорением. Задача о равноускоренном движении применяется, например, при изучении электромагнитного излучения заряда. Вследствие своей важности равноускоренное движение рассматривалось на самых ранних этапах развития теории относительности. Пионерской работой, в которой было получено правильное релятивистское преобразование в прямолинейно движущуюся равноускоренную систему отсчёта является [8]. Затем, исходя из различных исходных предположений, предпринималось множество попыток рассматривать общее преобразование в равноускоренную систему отсчёта. Однако следует признать, что общее преобразование в равноускоренную систему в явном виде по какой-то причине не записано. Поэтому другая цель статьи заключается в том, чтобы без каких либо упрощений и предположений получить в явном виде, с точностью до произвольного поворота, преобразование в криволинейно движущуюся относительно лабораторной системы отсчёта S^* равноускоренную систему отсчёта s.

Статья построена следующим образом.

В первом параграфе данной статьи даются предварительные сведения касающиеся поведения параметров преобразования Лоренца-Мёллера-Нэлсона при совершении буста. В п. 2 общее равноускоренное движение и все его параметры получаются простым лоренцевским бустом из первоначального прямолинейного равноускоренного движения. Вследствие своей наглядности, параметры общего равноускоренного движения полученные бустом будут служить образцом для сверки с двумя другими способами определения равноускоренного движения. Один из этих способов заключается в прямом решении в п. 4 уравнений обратной задачи кинематики, а второй (в п. 5) - в решении уравнений движения тетрады. Сверка решений, полученных всеми этими способами осуществяется в п. 6. Наконец, в п. 7 находится общее преобразование в равноускоренную жёсткую систему отсчёта. Кроме того, в третьем параграфе будет проверено одно утверждение статьи [4] о взаимной компенсации вращения Вигнера и прецессии Томаса для равноускоренного движения системы s .

1. Изменение специального преобразования Лоренца-Мёллера-Нэлсона при бусте

Напомним как изменяется при бусте так называемое специальное преобразование Лоренца-Мёллера-Нэлсона (здесь и далее $c = 1$) из лабораторной системы отсчёта $S : (T, \mathbf{R})$ в неинерциальную, радиально жёсткую систему отсчёта $s : (t, \mathbf{r})$, которая движется произвольно «без поворота» относительно S [9]

$$T = \frac{\mathbf{vr}}{\sqrt{1-v^2}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-v^2}} \ , \tag{1.1}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}(\mathbf{vr})\mathbf{v} + \int_0^t \frac{\mathbf{v}dt}{\sqrt{1-v^2}} \ . \tag{1.2}$$

Совершим переход из системы отсчёта S в движущуюся с постоянной скоростью $\mathbf{u}$ относительно неё инерциальную систему отсчёта $S^* : (T^*, \mathbf{R}^*)$. Координаты и время в системах отсчёта S, S^* связаны обычным преобразованием Лоренца

$$T^* = \frac{T - \mathbf{uR}}{\sqrt{1-u^2}} \ , \tag{1.3}$$

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}(\mathbf{uR})\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}T}{\sqrt{1-u^2}} \ . \tag{1.4}$$

Оказывается, что системы отсчёта S^* и s связаны общим преобразованием Лоренца-Мёллера-Нэлсона вида

$$T^* = \frac{v^*_\alpha a_{\beta\alpha} r'_\beta}{\sqrt{1-v^{*2}}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-v^{*2}}} \ , \tag{1.5}$$

$$R^*_\alpha = a_{\beta\alpha} r'_\beta + \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}} \, v^*_\alpha v^*_\gamma a_{\beta\gamma} r'_\beta + \int_0^t \frac{v^*_\alpha dt}{\sqrt{1-v^{*2}}} \ , \tag{1.6}$$

где

$$\mathbf{v}^* = \frac{\sqrt{1-u^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}}{1-\mathbf{uv}} + \frac{(1-\sqrt{1-u^2})(\mathbf{uv})\mathbf{u}}{u^2(1-\mathbf{uv})} \ . \tag{1.7}$$

Смысл $\mathbf{v}^*$ заключается в том, что эта величина является скоростью начала системы отсчёта s в новой лабораторной системе S^* выраженной через собственное время. Матрица $a_{\alpha\beta}$ является матрицей поворота системы s относительно новой системы отсчёта k, преобразование в которую является специальным (т. е. вида (1.1), (1.2)) с параметром $\mathbf{v}^*$. При этом начала систем s и k совпадают и условно считается, что оси системы k ориентированы без поворта относительно S^*. Величина $v'^*_\beta = v^*_\alpha a_{\beta\alpha}$ является вектором скорости начала системы отсчёта s определённой в системе координат s и

$$\mathbf{v}'^* = \frac{\mathbf{v} - \sqrt{1-v^2}\mathbf{u}}{1-\mathbf{uv}} - \frac{(1-\sqrt{1-v^2})(\mathbf{uv})\mathbf{v}}{v^2(1-\mathbf{uv})} \ . \tag{1.8}$$

Матрица поворота $a^{\beta\alpha}$ в координатах: ось поворота $\mathbf{n}$, угол поворота ϕ имеет вид

$$a^{\beta\alpha} = \delta^{\alpha\beta}\cos\phi_W + n^\beta n^\alpha(1-\cos\phi_W) - e^{\alpha\beta\gamma}n^\gamma \sin\phi_W \ . \tag{1.9}$$

Угол поворота, который получил название поворота Вигнера и соответствует матрице $a_{\beta\alpha}$ равен

$$\mathbf{n}\sin\phi_W = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{1+\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}-\mathbf{uv}} \cdot \left(1 - \frac{(1-\sqrt{1-u^2})(1-\sqrt{1-v^2})}{u^2v^2}\ \mathbf{uv}\right), \tag{1.10}$$

$$\cos\phi_W = \frac{\sqrt{1-u^2}+\sqrt{1-v^2}-\mathbf{uv}+\frac{(1-\sqrt{1-u^2})(1-\sqrt{1-v^2})}{u^2v^2}(\mathbf{uv})^2}{1+\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}-\mathbf{uv}} \ , \tag{1.11}$$

$$\mathbf{n}\ \mathrm{tg}\,\frac{\phi_W}{2} = \mathbf{n}\frac{\sin\phi_W}{1+\cos\phi_W} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)\left(1+\sqrt{1-v^2}\right)-\mathbf{uv}} \ , \tag{1.12}$$

где $\mathbf{n}$ есть единичный вектор в направлении поворота.

2. Определение параметров равноускоренного движения с помощью буста

Поставим задачу следующим образом. Предварительно выберем собственную ориентацию равноускоренной системы отсчёта $s:(t,\mathbf{r})$ так, чтобы её собственное ускорение было направлено вдоль оси 1. Пусть в начальный момент времени равноускоренная система отсчёта $s:(t,\mathbf{r})$ в некоторой лабораторной системе отсчёта $S:(T,\mathbf{R})$ находилась в покое и полностью совпадала с S. Далее она относительно S движется прямолинейно с собственным ускорением W в положительном направлении оси 1. В этом случае равноускоренное движение хорошо известно. Скорость её начала равна $v_1 = \mathrm{th}\,Wt$ [10, с. 207, формула (8.168)]. Перейдём теперь из системы S в новую инерциальную систему отсчёта $S^*:(T^*,\mathbf{R}^*)$, которая двигается в плоскости осей 1 и 3 со скоростью $\mathbf{u}=(u_1,0,u_3)$. При таком бусте у системы s в новой системе отсчёта появляются начальные компоненты скорости вдоль осей 1 и 3. Следовательно движение системы s в системе отсчёта S^*, которую можно принять за лабораторную систему, будет общим равноускоренным движением. Требуется только определить новые параметры движения s в S^*.

Зная теперь формулы (1.7)-(1.12) нетрудно найти параметры криволинейного равноускоренного движения. Согласно формуле (1.7) новая скорость s относительно S^* будет равна (греческие индексы у компонент векторов будем писать внизу, чтобы отличать их от показателей степени)

$$v_1^* = \frac{\sqrt{1-u^2}\ \mathrm{th}Wt - u_1}{1-u_1\mathrm{th}Wt} + \frac{\left(1-\sqrt{1-u^2}\right)u_1^2\,\mathrm{th}Wt}{u^2(1-u_1\mathrm{th}Wt)} \ , \tag{2.1}$$

$$v_2^* = 0 \ , \tag{2.2}$$

$$v_3^* = -\frac{u_3}{1-u_1\mathrm{th}Wt} + \frac{\left(1-\sqrt{1-u^2}\right)u_1u_3\,\mathrm{th}Wt}{u^2(1-u_1\mathrm{th}Wt)} \ . \tag{2.3}$$

Эта же скорость выраженная в системе координат s равна согласно (1.8)

$$v_1'^* = \frac{v_1-u_1}{1-u_1v_1} = \frac{\mathrm{th}Wt - u_1}{1-u_1\,\mathrm{th}Wt} \ , \tag{2.4}$$

$$v_2'^* = 0 \ , \tag{2.5}$$

$$v_3'^* = -\frac{\sqrt{1-v^2}\ u_3}{1-u_1 v_1} = -\frac{u_3}{\mathrm{ch}Wt - u_1\,\mathrm{sh}Wt}\ . \tag{2.6}$$

При этом

$$v_\alpha = a_{\beta\alpha} v'_\beta\ , \tag{2.7}$$

а матрица вращения Вигнера системы s относительно S^* равна

$$a_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\phi_W & 0 & -\sin\phi_W \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi_W & 0 & \cos\phi_W \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Поворот Вигнера, который необходимо сделать при бусте между системой координат s и системой координат, которая двигается «без поворота» относительно S осуществляется в плоскости осей 1 и 3 в направлении $3 \to 1$. Согласно (1.10)-(1.12) угол этого поворота удовлетворяет равенствам

$$\sin\phi_W = \frac{u_3\left[\ \mathrm{sh}Wt - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\ u_1\,(\mathrm{ch}Wt-1)\right]}{\mathrm{ch}Wt - u_1\,\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ , \tag{2.9}$$

$$\cos\phi_W = \frac{\left(\sqrt{1-u^2} + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\ u_1^2\right)\mathrm{ch}Wt - u_1\,\mathrm{sh}Wt + 1 - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\ u_1^2}{\mathrm{ch}Wt - u_1\,\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ , \tag{2.10}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\phi_W}{2} = \frac{u_3\ \mathrm{sh}Wt}{\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)(1+\mathrm{ch}Wt) - u_1\,\mathrm{sh}Wt}\ . \tag{2.11}$$

Отсюда видно, что начальный угол ориентации равноускоренной системы, полученной бустом из (2.11) равен нулю. Вычислением векторов $\mathbf{v}^*$ и угла Вигнера ϕ_W равноускоренное движение полностью задано. Параметры равноускоренного движения, полученные таким способом могут служить образцом для сравнения с другими решениями.

3. Взаимная компенсация прецессии Томаса и вращения Вигнера в случае равноускоренного движения

Поскольку равноускоренное движение не обладает собственным вращением, то вращение Вигнера и прецессия Томаса должны компенсировать друг друга. Покажем это прямым расчётом. Угловую скорость вращения Вигнера можно получить дифференцируя уравнение (2.9). Получим

$$\omega_W\cos\phi_W = \frac{Wu_3\left[\left(\sqrt{1-u^2} + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}u_1^2\right)\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + 1 - \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}u_1^2\right]}{\left[\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}\,\right]^2}\ .$$

Поделив это выражение на (2.10) получим

$$\omega_W = \frac{Wu_3}{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ . \tag{3.1}$$

Вычислим сейчас угловую скорость прецессии Томаса $\mathbf{\Omega}_T$

$$\mathbf{\Omega}_T = \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ \mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^* \tag{3.2}$$

. Первый множитель в её определении будет равен

$$\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{\left[\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt\right]^2}{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ . \tag{3.3}$$

Дифференцируя параметр скорости получим

$$\dot{v}_1^* = \frac{W\sqrt{1-u^2}}{\left(\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt\right)^2}\left[1 - \frac{\left(1-\sqrt{1-u^2}\right)u_1^2}{u^2}\right], \tag{3.4}$$

$$\dot{v}_2^* = 0 \ , \tag{3.5}$$

$$\dot{v}_3^* = -\frac{\sqrt{1-u^2}\left(1-\sqrt{1-u^2}\right)}{u^2} \cdot \frac{Wu_1u_3}{\left(\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt\right)^2} \ . \tag{3.6}$$

Второй множитель является векторным произведением и равен учитывая (2.1)- (2.3), (3.4)- (3.6)

$$(\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{v}}^*)_2 = v_3^*\dot{v}_1^* - v_1^*\dot{v}_3^* = -\frac{W\sqrt{1-u^2}\,u_3}{\left(\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt\right)^2} \ . \tag{3.7}$$

Следовательно перемножая (3.3) и (3.7) получим, что прецессия Томаса равна

$$\Omega_T = -\frac{Wu_3}{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}} \ . \tag{3.8}$$

Сравнивая формулы (3.1) и (3.8) видно, что в сумме собственная прецессия Томаса и собственное вращение Вигнера системы s дают нуль как это и должно быть.

4. Определение параметров движения решением уравнений обратной задачи кинематики

Рассмотрим теперь применение дифференциальных уравнений обратной задачи кинематики [2] к криволинейному равноускоренному движению

$$\mathbf{W}' = \mathrm{const} \ , \ \mathbf{\Omega}' = 0 \ . \tag{4.1}$$

С учётом этого условия, дифференциальные уравнения обратной задачи кинематики [2, формулы (2.10), (2.11)] принимают вид

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{W}' - (\mathbf{W}'\mathbf{v}')\mathbf{v}' \ , \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\omega}' = -\frac{1-\sqrt{1-v'^2}}{v'^2}\,\mathbf{v}' \times \mathbf{W}' \ . \tag{4.3}$$

Согласно п. 2 выберем ось 1 лабораторной системы отсчёта S вдоль вектора ускорения $\mathbf{W}'$ системы s, а ось 3 – лежащей в её плоскости траектории. Уравнение (4.2) для оси 1 есть

$$\dot{v}_1' = W(1 - v_1'^2) \ .$$

Интегрируя это уравнение получим

$$v'_1(t) = \ \mathrm{th}(Wt + k) \ , \tag{4.4}$$

где

$$\mathrm{th}k = v'_1(0) \ .$$

Проецируя уравнение (4.2) на ось 3 перпендикулярную ускорению получим с учётом (4.4), что

$$\dot{v}'_3 + W \ \mathrm{th}\,(Wt + k)\, v'_3 = 0 \ .$$

Отсюда

$$v'_3(t) = v'_3(0)\frac{\mathrm{ch}\,k}{\mathrm{ch}\,(Wt + k)} \ , \tag{4.5}$$

$$v'^2 = v_1'^2 + v_3'^2 = \frac{v_3'^2(0)\mathrm{ch}^2k + \mathrm{sh}^2(Wt+k)}{\mathrm{ch}^2(Wt+k)} \ , \sqrt{1-v'^2} = \frac{\sqrt{1-v'^2(0)}\ \mathrm{ch}k}{\mathrm{ch}(Wt+k)} \ .$$

Подставляя эти значения в выражение (4.3) получим, что единственная ненулевая компонента вектора $\boldsymbol{\omega}'_W$ есть

$$\omega'_{2W} = \dot{\phi}_W = -\frac{1-\sqrt{1-v'^2}}{v'^2}\,v'_3W = -\frac{Wv_3'(0)\,\mathrm{ch}k}{\mathrm{ch}(Wt+k) + \sqrt{1-v_3'^2(0)\ \mathrm{ch}^2k}} \ . \tag{4.6}$$

Интегрируя это выражение получим, что

$$\phi_W = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{Wt+k} + \sqrt{1-v_3'^2(0)\mathrm{ch}k}}{v_3'(0)\mathrm{ch}^2k} - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^k + \sqrt{1-v_3'^2(0)\mathrm{ch}k}}{v_3'(0)\mathrm{ch}^2k} + \alpha \ . \tag{4.7}$$

5. Определение параметров движения решением уравнений движения тетрады 4-векторов

Равноускоренное движение можно также определить сразу в 4-мерном виде, решая уравнения движения тетрады единичных 4-векторов связанных с началом равноускоренной системы s [3, формула (4)], [4, формулы (5.3), (5.4)]

$$\frac{d\Lambda^{0i}}{dt} = W^{\alpha}\Lambda^{\alpha i}\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dt} = W^{\alpha}\Lambda^{0i} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega^{\gamma}\Lambda^{\beta i}\,, \tag{5.2}$$

при условиях ортонормированности

$$\Lambda^{0i}\Lambda^{0}{}_{i} = 1,\;\; \Lambda^{0i}\Lambda^{\alpha}{}_{i} = 0,\;\; \Lambda^{\alpha i}\Lambda^{\beta}{}_{i} = -\,\delta^{\alpha\beta}\,. \tag{5.3}$$

Четыре 4-вектора обладают 16 компонентами, которые входят в 16 уравнений (5.1), (5.2). Данные компоненты связаны друг с другом 1+3+6=10 условиями (5.3). Таким образом всего имеется 16-10=6 независимых величин, для которых можно записать 16-10=6 независимых уравнений, так, что данные уравнения допускают решение. Хотя в общем случае уравнения (5.1), (5.2) не проще уравнений обратной задачи кинематики, но для равноускоренной системы отсчёта они серьёзно упрощаются и допускают быстрое решение. Идея воспользоваться данными уравнениями принадлежит Фридману и Скарру [6], [7].

Учитывая (4.1) продифференцируем (5.1) по t и подставим в получившееся выражение значение (5.2). Получим, что

$$\frac{d^{2}\Lambda^{0i}}{dt^{2}} = W^{2}\Lambda^{0i}\,, \tag{5.4}$$

Решение данного уравнения с учётом первого из уравнений (5.3) есть

$$\Lambda^{0i} = A^{i}\,\mathrm{sh}Wt + B^{i}\,\mathrm{ch}Wt\,, \tag{5.5}$$

$$A^{i}A_{i} = -1,\;\; A^{i}B_{i} = 0,\;\; B^{i}B_{i} = 1\,. \tag{5.6}$$

Далее, равноускоренную систему координат выбираем согласно п. 2 так, чтобы собственное ускорение было направлено вдоль оси 1. Продифференцируем теперь с учётом (5.1) решение (5.5) по t. Получим, что первый 4-вектор равен

$$\Lambda^{1i} = B^{i}\,\mathrm{sh}Wt + A^{i}\,\mathrm{ch}Wt\,. \tag{5.7}$$

Уравнения для остальных 4-векторов тривиальны

$$\frac{d\Lambda^{2i}}{dt} = \frac{d\Lambda^{3i}}{dt} = 0\,. \tag{5.8}$$

Постоянные 4-векторы A^i, B^i, Λ^{2i}, Λ^{3i} определяются из того условия, что 4-вектора Λ^{0i} , $\Lambda^{\alpha i}$ как функции времени t должны иметь следующий вид [4, формулы (2.1), (2.2)] (индексы пишем внизу)

$$\Lambda_{0i} = (\Lambda_{00},\Lambda_{0\alpha}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^{*2}}}\,,\frac{v^{*}_{\alpha}}{\sqrt{1-v^{*2}}}\right), \tag{5.9}$$

$$\Lambda_{\alpha i} = (\Lambda_{\alpha 0},\Lambda_{\alpha\beta}) = \left(\frac{v^{*}_{\gamma}a_{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-v^{*2}}}\,,\; a_{\alpha\beta} + \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\; v^{*}_{\beta}v^{*}_{\mu}a_{\alpha\mu}\right). \tag{5.10}$$

Учитывая эти равенства и то, что в начальный момент времени $v_1 = -u_1$, $v_3 = -u_3$, а угол поворота равноускоренной системы относительно лабораторной системы отсчёта равен нулю, легко заметить, что

$$A^{i} = \left(-\frac{u_1}{\sqrt{1-u^2}}, 1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\,u_1^2, 0, \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\,u_1u_3\right), \tag{5.11}$$

$$B^{i} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, -\frac{u_1}{\sqrt{1-u^2}}, 0, -\frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\right), \tag{5.12}$$

$$\Lambda^{2i} = (0,0,1,0)\ , \tag{5.13}$$

$$\Lambda^{3i} = \left(-\frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1 u_3, 0, 1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_3^2 \right) . \tag{5.14}$$

6. Эквивалентность данных способов определения равноускоренного движения

Сравним теперь решения (4.4), (4.5) с уже известными соответственно (2.4), (2.6). Нетрудно заметить, что эти решения совпадают (как это и должно быть) при следующем выборе постоянных

$$k = -\operatorname{arth} u_1\ , \tag{6.1}$$

$$v'_3(0) = -\, u_3\ . \tag{6.2}$$

Можно также убедиться в тождественности (4.6) и (3.1) при условиях (6.1), (6.2). Следовательно и интегрирование (4.6) приводит с точностью до постоянной α в (4.7), определяющей начальную ориентацию системы s относительно S^*, к вигнеровскому углу (2.9)-(2.11). Таким образом два решения, определяющих равноускоренное движение: с помощью буста и с помощью решения уравнений обратной задачи кинематики полностью совпадают.

Покажем, что способы определения равноускоренного движения с помощью буста и с помощью решения уравнений движения тетрады эквивалентны. Для этого вычислим сначала те компоненты 4-скорости начала отсчёта (5.9) и 4-векторов единичных ортов (5.10), расчёт которых не представляет трудности. Подставляя (2.1)-(2.3) в (5.9) и (5.10) получим, что

$$\Lambda_{00} = \frac{1}{\sqrt{1-v^{*2}}} = \frac{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt}{\sqrt{1-u^2}}\ , \tag{6.3}$$

$$\Lambda_{01} = \frac{v_1^*}{\sqrt{1-v^{*2}}} = \left(1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1^2\right)\mathrm{sh}Wt - \frac{u_1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{ch}Wt\ , \tag{6.4}$$

$$\Lambda_{02} = \Lambda_{20} = \frac{v_2^*}{\sqrt{1-v^{*2}}} = 0\ , \tag{6.5}$$

$$\Lambda_{03} = \frac{v_3^*}{\sqrt{1-v^{*2}}} = \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}} \cdot u_1 u_3\,\mathrm{sh}Wt - \frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{ch}Wt\ , \tag{6.6}$$

$$\Lambda_{10} = \frac{v_1'^*}{\sqrt{1-v'^{*2}}} = \frac{\mathrm{sh}Wt - u_1\mathrm{ch}Wt}{\sqrt{1-u^2}}\ , \tag{6.7}$$

$$\Lambda_{30} = \frac{v_3'^*}{\sqrt{1-v'^{*2}}} = -\frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\ , \tag{6.8}$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \Lambda_{32} = \Lambda_{23} = 0\,, \tag{6.9}$$

$$\Lambda_{22} = 1\,, \tag{6.10}$$

Чтобы посчитать оставшиеся компоненты 4-векторов введём величины

$$\Lambda'_{\alpha\gamma} = \Lambda'_{\gamma\alpha} = \delta_{\alpha\gamma} + \frac{1-\sqrt{1-v'^{*2}}}{v'^{*2}\sqrt{1-v'^{*2}}}\ v_\alpha'^* v_\gamma'^*\ , \tag{6.11}$$

тогда

$$\Lambda_{\alpha\beta} = a_{\gamma\beta}\Lambda'_{\gamma\alpha}\ . \tag{6.12}$$

Вычислим коэффициенты $\Lambda'_{\alpha\gamma}$ учитывая (2.4)-(2.6). Получим

$$\Lambda'_{11} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{(\mathrm{sh}Wt - u_1\mathrm{ch}Wt)^2}{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ , \tag{6.13}$$

$$\Lambda'_{33} = 1 + \frac{u_3^2}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}}\ , \tag{6.14}$$

$$\Lambda'_{13} = -\frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{\mathrm{sh}Wt - u_1 \mathrm{ch}Wt}{\mathrm{ch}Wt - u_1 \mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2}} \ . \tag{6.15}$$

Следующие четыре равенства не столь очевидны. Заменяя $\cos\phi_W$ и $\sin\phi_W$ их значениями из (2.9), (2.10) и зная равенства (6.13)-(6.15) можно доказать, что

$$\Lambda_{11} = a_{\gamma 1}\Lambda'_{\gamma 1} = a_{11}\Lambda'_{11} + a_{31}\Lambda'_{31} = \cos\phi_W \Lambda'_{11} + \sin\phi_W \Lambda'_{31} =$$

$$= \left(1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1^2\right)\mathrm{ch}Wt - \frac{u_1}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{sh}Wt\,, \tag{6.16}$$

$$\Lambda_{33} = a_{\gamma 3}\Lambda'_{\gamma 3} = a_{13}\Lambda'^{13} + a_{33}\Lambda'_{33} = -\sin\phi_W \Lambda'_{13} + \cos\phi_W \Lambda'_{33} = 1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_3^2\,, \tag{6.17}$$

$$\Lambda_{13} = a_{\gamma 3}\Lambda'_{\gamma 1} = a_{13}\Lambda'_{11} + a_{33}\Lambda'_{31} = -\sin\phi_W \Lambda'_{11} + \cos\phi_W \Lambda'_{31} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1 u_3\, \mathrm{ch}\, Wt - \frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{sh}Wt\,, \tag{6.18}$$

$$\Lambda_{31} = a_{\gamma 1}\Lambda'_{\gamma 3} = a_{11}\Lambda'_{13} + a_{31}\Lambda'_{33} = \cos\phi_W \Lambda'_{13} + \sin\phi_W \Lambda'_{33} = \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1 u_3\,. \tag{6.19}$$

Доказательство равенств (6.16)-(6.19) заключается в аккуратном умножении данных уравнений на $(\mathrm{ch}Wt - u_1\mathrm{sh}Wt + \sqrt{1-u^2})^2$, раскрытии скобок и приведении подобных членов.

Сравнивая теперь (5.5), (5.7), (5.11)-(5.14) с (6.3)-(6.10) и (6.16)-(6.19) можно убедиться, что способы определения равноускоренной системы отсчёта с помощью буста и с помощью решения уравнения движения тетрады эквивалентны друг другу.

7. Преобразование в равноускоренную систему отсчёта в явном виде

Общее преобразование Лоренца-Мёллера-Нэлсона в 4-мерной форме записывается в виде

$$T = \Lambda_{\alpha 0} r'_\alpha + \int_0^t \Lambda_{00} dt, \quad R_\beta = \Lambda_{\alpha\beta} r'_\alpha + \int_0^t \Lambda_{0\beta} dt. \tag{7.1}$$

Подставляя 4-векторы, вычисленные в двух предыдущих параграфах и интегрируя можно записать общее преобразование в равноускоренную систему отсчёта в виде

$$T = \frac{\mathrm{sh}Wt - u_1\mathrm{ch}Wt}{\sqrt{1-u^2}}\left(r'_1 + \frac{1}{W}\right) - \frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\, r'_3 + \frac{u_1}{W\sqrt{1-u^2}}\ , \tag{7.2}$$

$$R_1 = \left[\left(1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1^2\right)\mathrm{ch}Wt - \frac{u_1}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{sh}Wt\right]\left(r'_1 + \frac{1}{W}\right) + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1 u_3\, r'_3 -$$

$$-\frac{1}{W}\left[1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1^2\right]\,, \tag{7.3}$$

$$R_2 = r'_2\,, \tag{7.4}$$

$$R_3 = \frac{u_3}{\sqrt{1-u^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2}\, u_1\,\mathrm{ch}\, Wt - \mathrm{sh}Wt\right]\left(r'_1 + \frac{1}{W}\right) + \left(1 + \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u^2\sqrt{1-u^2}}\, u_3^2\right) r'_3 -$$

$$-\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{Wu^2\sqrt{1-u^2}}\, u_1 u_3\,. \tag{7.5}$$

Здесь начальная скорость системы s равна $-\mathbf{u}$ и предполагается, что начальная ориентация s совпадает с ориентацией лабораторной системы отсчёта.

Заключение

В заключение подчеркнём, что известный закон гиперболического движения частицы под действием постоянной силы не имеет отношения к задаче о равноускоренном движении. Равноускоренная система отсчёта двигается таким образом, что её частоты собственной прецессии Томаса (3.8) и собственного вращения Вигнера (3.1) взаимно компенсируются и результирующее вращение равноускоренной системы s равно нулю, как это и должно быть.

Наиболее общее преобразование в равноускоренную систему отсчёта можно найти минимум тремя способами: простым лоренцевским бустом (п. 2), решением уравнений (4.2), (4.3) обратной задачи кинематики (п. 4) и решением уравнений движения тетрады (п. 5). Совпадение параметров равноускоренной системы отсчёта, полученных решением уравнений (4.2), (4.3) или уравнений (5.1), (5.2) с параметрами полученными лоренцевским бустом (2.1)-(2.3), (2.9)-(2.11) позволяет даже осторожному исследователю сделать вывод, что уравнения обратной задачи кинематики и уравнение движения тетрады эквивалентны друг другу, проверены и полностью обоснованы.

Трёхмерный вектор скорости начала системы отсчёта, выраженный в собственной системе координат вместе с матрицей направляющих косинусов и тетрада ортонормированных 4-векторов, конечно же, не исчерпывают всё множество возможных кинематических способов представления движения жёсткой системы отсчёта. Поэтому представляет интерес и задача нахождения уравнений, аналогичных уравнениям обратной задачи кинематики или уравнениям движения тетрады для другой возможной параметризации ориентации пространства-времени, например, с помощью бикватернионов. Эта задача предлагается к решению всем заинтересованным специалистам.

Благодарность

Автор благодарит профессора Н. Г. Мигранова за полезные советы, замечания и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Логунов. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы, М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит.. 1987. 272 с.
2. В.В. Войтик. Об уравнениях обратной задачи кинематики // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 28–36.
3. B. Mashhoon, U. Muench. Annalen Phys., no. 11(2002): 532–547.
4. В.В. Войтик. Собственные характеристики системы отсчёта как 4-инварианты // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 1. С. 56–63.
5. В.В. Войтик. Четырёхмерное представление преобразования в неинерциальную жёсткую систему отсчёта // Сборник трудов международной заочной научно-практической Интернет-конференции «Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте ‘2013» , 17–26 декабря 2013 г. Сборник научных трудов SWorld. – вып. 4. т. 4. Одесса: Куприенко СВ. 2013. С. 47–50. URL: http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/physics-and-mathematics-413/physics-and-astronomy-mechanics-413/20589-413-0592 (дата обращения: 27.06.2015)
6. Friedman Y. Making the relativistic dynamics equation covariant: explicit solutions for motion under a constant force / Y. Friedman, T. Scarr // Physica Scripta, 2012. – v. 86. – № 6, 2012.
7. Friedman Y. Covariant Uniform Acceleration/Y. Friedman, T. Scarr. // Journal of Physics: Conference Series, 437. 2013. – 012009
8. Møller C. On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox/C. Møller // Trans. Dan. Acad. Sci., Kobenhavn, 1943. – 2. – № 19. – p. 3–25.
9. В.В. Войтик, Н.Г. Мигранов. Радиально-жёсткая неинерциальная система отсчёта и форминвариантность общего преобразования // борник трудов XIX международной заочной научно-практической конференции «Инновации в науке». Новосиб.: «СибАК». 2013. С.7–19. URL: http://sibac.info/index.php/component/content/article/50-2011-12-21-06-47-43/7620-2013-04-30-08-34-04 (дата обращения: 27.06.2015)
10. К. Мёллер. Теория относительности, 2-е изд., М.: Атомиздат. 1975. 400 с.

Поступила в редакцию 29.06.2015

Войтик Виталий Викторович, к.ф.-м. н., преподаватель, кафедра медицинской физики и информатики, Башкирский государственный медицинский университет, 450000, Россия, г. Уфа, ул. Ленина, 3.
E-mail: voytik1@yandex.ru

V. V. Voytik

Some ways parameter calculation curvilinear uniformly accelerated motion

Keywords: Thomas precession, Wigner rotation, uniformly accelerated motion, inverse problem kinematics, proper acceleration, proper angular velocity

PACS: 03.30.+p

The parameters of the general curvilinear motion in the laboratory frame S^* of uniformly accelerated reference frame s three equivalent ways is calculated. One of these methods is a boost from the frame reference in which s is moving in a straight line while maintaining proper orientation. Another method is to solve the equations of inverse problem kinematics. The third method is to solve the equations of motion of the tetrad. This shows that these equations can be considered reasonable. The article also found explicitly transformation to a curvilinear moving uniformly accelerated reference frame and proved the assertion that in the frame reference S^*, Thomas precession and Wigner rotation s in opposite directions and cancel each other out.

REFERENCES

1. A.A. Logunov. Lekcii po teorii otnositel'nosti i gravitacii: Sovremennyj analiz problemy [Lectures on the Theory of Relativity and Gravitation: Modern Analysis of the problem], Moscow, Nauka, 1987, 272 p.

2. V.V. Voytik. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya* [Space, time and fundamental interactions], no. 1 (2014): 28–36.

3. B. Mashhoon, U. Muench. *Annalen Phys.*, no. 11(2002): 532–547.

4. V.V. Voytik. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya* [Space, time and fundamental interactions], no. 1 (2015): 56–63.

5. V.V. Voytik. Sbornik trudov mezhdunarodnoj zaochnoj nauchno-prakticheskoj Internet-konferencii "Perspektivnye innovacii v nauke, obrazovanii, proizvodstve i transporte '2013"[Proc. Int. Sci. and Pract. Internet-conference "Promising innovations in science, education, manufacturing and transport '2013"], 17 - 26 January 2013, Collection of scientific papers SWorld, Odessa, Kuprienko SV, 2013. pp. 47–50.
Available at: http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/physics-and-mathematics-413/physics-and-astronomy-mechanics-413/20589-413-0592 (accessed 27 June 2015).

6. Y. Friedman, T. Scarr *Physica Scripta*, 86 (2012) 06500.8

7. Y. Friedman, T. Scarr *J. Phys.: Conf. Ser.*, 437 (2013) 012009.

8. C. Møller *Trans. Dan. Acad. Sci.*, 19 (1943): 3–25.

9. V.V. Voytik, N.G. Migranov. Sbornik trudov XIX mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Innovatsii v nauke". [Proc. XIX Int. corresp. sci.-pract. conf. "Innovations in science."] Novosyb.: "SybAK", 2013, pp. 7–19.
Available at: http://sibac.info/index.php/component/content/article/50-2011-12-21-06-47-43/7620-2013-04-30-08-34-04 (accessed 27 June 2015).

10. Møller C. Teorija otnositel'nosti [Theory of relativity]. Moscow, Atomizdat, 1975, 400 p.

Received 29.06.2015

Voytik Vitaliy Victorovich, Cand Sc., teacher, Department of Medical Physics and Informatics, Bashkir State Medical University, st. Lenin, 3, Ufa, 450000, Russia.
E-mail: voytik1@yandex.ru