УДК 539.1

И. В. Бахматов,[1] *Э. Т. Мусаев* [2]

ФЕРМИОННАЯ Т-ДУАЛЬНОСТЬ КАК ИНВОЛЮЦИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ ТИПА II [3]

Фермионная Т-дуальность является симметрией теории струн и $\mathcal{N} = 2$ $d = 10$ супергравитации. Мы рассматриваем результат последовательного применения фермионной Т-дуальности вдоль одного и того же направления в суперпространстве и показываем, что преобразование является инволюцией 4 либо 8 порядка, в отличие от бозонной Т-дуальности, являющейся инволюцией 2 порядка. Также рассмотрен простейший вариант перемешивания бозонных и фермионных Т-дуальностей. Результаты статьи имеют приложение к генерированию новых суперсимметричных решений в супергравитации и теории струн.

Ключевые слова: теория струн, супергравитация, Т-дуальность, суперсимметрия

PACS: 11.10.Kk,04.65.+e

Введение

Суперсимметричные расширения эйнштейновской теории гравитации были впервые сконструированы 40 лет назад [1, 2], вскоре после открытия суперсимметрии в работах [3–6]. С тех пор супергравитация занимает важное место среди современных фундаментальных физических теорий. Помимо красоты, с которой суперсимметрия диктует физической теории состав полей материи и допустимые виды взаимодействий, немаловажным аргументом в её пользу является смягчение ультрафиолетовых расходимостей в квантовой суперсимметричной теории поля. Уже в первые годы после открытия супергравитации было установлено, что элементы S-матрицы супергравитации конечны в 1- и 2-петлевом приближении [7, 8]. В настоящее время проходит проверку гипотеза о том, что $\mathcal{N} = 8$ $d = 4$ супергравитация полностью лишена УФ расходимостей [9, 10].

Развитие теорий супергравитации идёт рука об руку с развитием теории струн, которая сводится к супергравитации в низкоэнергетическом пределе [11, 12]. Центральное место в теории струн занимает понятие дуальности [13–16], которое связывает воедино различные струнные и полевые теории и позволяет применять пертурбативные методы в исследовании квантовых систем в режиме сильной связи. Эффективные теории поля играют важную роль в исследовании струнных дуальностей. К примеру, Т-дуальность [17] исторически была найдена как симметрия эффективного потенциала для тороидальной компактификации по отношению к преобразованию радиуса компактного измерения $R \to \frac{\alpha'}{R}$ [18, 19]. Вскоре выяснилось, что Т-дуальность является симметрией полной теории струн [20–22], где она играет важнейшую роль, связывая воедино теории суперструн типа IIA и IIB, а также две различные теории гетеротических суперструн. Преобразование Т-дуальности можно проделать всегда, когда объемлющее пространство для струнной сигма-модели обладает изометрией, причем все фоновые поля также не меняются в направлении этой изометрии. Если выбрать адаптированную систему координат, так, что изометрия действует сдвигами вдоль некоторой координаты x^1, то правила преобразования Т-дуальности для безмассовых полей в спектре струны, полученные Бушером, имеют вид:

$$
\begin{gathered}
g'_{11} = (g_{11})^{-1}, \quad g'_{1i} = (g_{11})^{-1} b_{1i}, \quad b'_{1i} = -(g_{11})^{-1} g_{1i},\\
g'_{ij} = g_{ij} - (g_{11})^{-1}(g_{i1}g_{1j} + b_{i1}b_{1j}), \quad b'_{ij} = b_{ij} - (g_{11})^{-1}(g_{i1}b_{1j} + b_{i1}g_{1j}),\\
\phi' = \phi - \frac{1}{2}\log g_{11}.
\end{gathered}
$$

Здесь отдельно рассматриваются поля, имеющие компоненты вдоль направления изометрии x^1, и вдоль остальных направлений x^i. В преобразовании участвуют безмассовые поля метрики $g_{\mu\nu}$,

---

[1] E-mail: ivbahmatov@kpfu.ru

[2] E-mail: emusaev@hse.ru

[3] Работа И. В. Бахматова выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности КФУ и гранта РФФИ 14-02-31494.

антисимметричного тензорного NS-NS поля $b_{\mu\nu}$ и скалярного поля дилатона ϕ (индекс μ принимает значения $1, i$). То, что данные преобразования полей являются симметрией супергравитации, совершенно не очевидно с точки зрения действия супергравитации. Это позволяет использовать Т-дуальность для генерирования многих новых суперсимметричных решений с необычными свойствами.

Процедура Бушера для получения преобразования Т-дуальности была изначально проделана для теории струн с суперсимметрией на мировом листе (в формализме RNS). В этой формулировке пространство-время имеет только бозонные координаты, изометрические сдвиги вдоль которых могут быть использованы для преобразования Т-дуальности. В то же время, теория суперструн допускает формулировку с суперсимметрией в пространстве-времени, где помимо бозонных вводятся также фермионные координаты в суперпространстве. В этом случае сдвиги вдоль фермионных направлений, которые не меняют фоновых полей (т.е. “фермионные изометрии”), являются преобразованиями суперсимметрии. Повторение процедуры Бушера приводит тогда к новым преобразованиям фоновых полей, известным как фермионная Т-дуальность [23].

Первоначальной мотивацией для поиска этой новой струнной дуальности была обнаруженная в [24, 25] дуальность между амплитудами рассеяния и вильсоновскими петлями в $\mathcal{N} = 4$ $d = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса (SYM). Эта симметрия и вытекающие из неё нетривиальные свойства амплитуд рассеяния в SYM в режиме сильной связи нашли геометрическое объяснение на языке теории струн. Выяснилось, что в рамках AdS/CFT соответствия [16] симметрия между амплитудами рассеяния и вильсоновскими петлями отображается в геометрическую симметрию пространства $AdS_5 \times S^5$ под действием набора Т-дуальностей, как обычных, так и фермионных [23, 26].

Фермионная Т-дуальность была исследована как способ генерирования новых решений в $\mathcal{N} = 2$ $d = 10$ супергравитации [27]. Это и ряд других приложений фермионной Т-дуальности к задачам теории струн [28, 29] (см. также обзор [30]) показали, что ключевым аспектом, препятствующим более широкому использованию фермионной Т-дуальности, является комплексификация дуальных решений. Были найдены некоторые частные случаи, когда результатом преобразования были полностью вещественные поля, однако в общем случае результатом фермионной Т-дуальности являются комплекснозначные фоновые поля, которые, однако, являются формально решениями обычной вещественной супергравитации.

Настоящей работой мы начинаем поиск такой формулировки фермионной Т-дуальности, которая бы гарантированно давала вещественный и по возможности нетривиальный результат преобразования. В разделе 1 будет дан общий обзор преобразования фермионной Т-дуальности и необходимых аспектов супергравитации типа II. В разделе 2 мы производим несколько последовательных преобразований фермионной Т-дуальности для произвольного решения и исследуем инволютивные свойства преобразования. В разделе 3 изучается простейший случай смешивания преобразований бозонной и фермионной Т-дуальности, который послужит прототипом для дальнейших исследований, перспективные направления которых описаны в заключении.

1. Фермионная Т-дуальность

Преобразования компонентных полей 10-мерной супергравитации типа II под действием фермионной Т-дуальности могут быть получены для любого решения полевых уравнений, которое имеет ненарушенные суперсимметрии. Характеристикой ненарушенной суперсимметрии являются спиноры Киллинга, то есть такие спиноры, который дают нулевые преобразования суперсимметрии для фермионных полей супергравитации. В пространстве-времени размерности $d = 1+9$ параметр суперсимметрии является киральным майорана-вейлевским спинором и имеет 16 независимых вещественных степеней свободы. В майорана-вейлевском представлении гамма-матриц такой спинор имеет вид $\left[\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right]$ либо $\left[\begin{smallmatrix}0\\\epsilon\end{smallmatrix}\right]$, в зависимости от киральности. Здесь 0 и ϵ – 16-компонентные вейлевские спиноры-столбцы.

В $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории, каковой является супергравитация типа II, имеется два независимых параметра суперсимметрии. В зависимости от их киральности, мы имеем дело либо с супергравитацией типа IIA (противоположная киральность), либо IIB (одинаковая киральность). С точки зрения преобразования фермионной Т-дуальности, оба случая можно описать в рамках единого формализма. Для этого условимся работать в майорана-вейлевском представлении гамма-матриц следующего вида:

$$\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \bar{\gamma}^\mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Различные свойства этого класса представлений описаны в работе [31]. Для формирования ковариантных спиноров будем использовать майорановское сопряжение $\bar{\epsilon} = \epsilon^T C$. При этом всегда можно выбрать матрицу зарядового сопряжения в виде $C = \Gamma^0$, и 16-компонентные матрицы $\gamma^0 = 1, \bar{\gamma}^0 = -1$.

Условимся также работать исключительно с 16-компонентными спинорами и гамма-матрицами. Тогда параметры суперсимметрии (спиноры Киллинга) супергравитации типа II будем обозначать ϵ^1, ϵ^2, подразумевая, что указанные спиноры имеют разную киральность для типа IIA и одинаковую для типа IIB.

Чтобы получить формулы преобразования супергравитации, необходимо рассмотреть действие суперструны на заданном фоне и выполнить процедуру Бушера [20–22]. При этом необходимо использовать действие с суперсимметрией в пространстве-времени, такое как действие Грина-Шварца или действие Берковица в формализме чистых спиноров [32]. Процедура Бушера и её обобщение на фермионные направления в суперпространстве концептуально несложна, но достаточно трудоёмка технически, поэтому мы отсылаем читателя к описаниям [23,28,30], воспроизводя здесь результат процедуры Бушера без доказательства.

Единственными полями супергравитации, которые преобразуются под действием фермионной Т-дуальности, являются скалярное поле дилатона ϕ и поля антисимметричных RR-форм. В супергравитации типа IIA имеются поля 1- и 3-форм, типа IIB – поля 0-, 2- и 4-форм. Кроме того, тензор напряженности RR 4-формы в теории типа IIB самодуален, $F_5 = \star F_5$, а в теории типа IIA есть дополнительный массовый параметр m [33], который объединяется с тензорами напряжённости 1- и 3-формы. Все перечисленные поля преобразуем в биспиноры F с помощью отображения Клиффорда:

$$\begin{aligned} F &= m\not{1} + \frac{1}{2!}F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{4!}F_{\mu\nu\kappa\lambda}\gamma^{\mu\nu\kappa\lambda} && \text{(IIA)},\\ F &= F_\mu\gamma^\mu + \frac{1}{3!}F_{\mu\nu\rho}\gamma^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2}\frac{1}{4!}F_{\mu\nu\rho\sigma\tau}\gamma^{\mu\nu\rho\sigma\tau} && \text{(IIB)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Закон преобразования RR-полей под действием фермионной Т-дуальности проще всего записывается для биспинора F:

$$e^{\phi'}F' = e^{\phi}F + 16\,i\,C^{-1}(\epsilon^1 \otimes \epsilon^2), \tag{1.3}$$

причём дилатон преобразуется следующим образом:

$$\phi' = \phi + \frac{1}{2}\log C. \tag{1.4}$$

В качестве параметров преобразования здесь выступают спиноры Киллинга ϵ^1 и ϵ^2, а также функция C, которая задаётся уравнением:

$$\partial_\mu C = i(\epsilon^1\bar{\gamma}_\mu\epsilon^1 + \epsilon^2\gamma_\mu\epsilon^2). \tag{1.5}$$

Спиноры Киллинга должны удовлетворять условию антикоммутации:

$$\epsilon^1\bar{\gamma}_\mu\epsilon^1 - \epsilon^2\gamma_\mu\epsilon^2 \overset{!}{=} 0, \tag{1.6}$$

в противном случае фермионная Т-дуальность не переводит решения полевых уравнений супергравитации в решения.

2. Фермионная Т-дуальность как инволюция

Бозонная Т-дуальность является инволюцией, то есть даёт тождественное преобразование фоновых полей, будучи применена дважды:

$$\mathrm{Tb} \circ \mathrm{Tb} = \mathrm{Tb}^{\circ 2} = \mathrm{id}. \tag{2.1}$$

Две последовательные бозонные Т-дуальности вдоль одного направления изометрии возвращают решение к первоначальному виду. Для преобразований фермионной Т-дуальности это неверно, а именно, две последовательные дуальности приводят к нетривиальному комплексному сдвигу дилатона и преобразованию RR-полей:

$$\begin{aligned} e^{\phi} &\to \pm i e^{\phi},\\ F &\to \mp i F, \end{aligned} \tag{2.2}$$

так что комбинация $e^{\phi}F$ инвариантна (отметим, что именно эта комбинация возникает в правой части уравнений Эйнштейна). Для того, чтобы в точности воспроизвести дилатон и RR-поля исходного решения, необходимо проделать последовательно четыре преобразования фермионной Т-дуальности вдоль одного направления суперсимметрии, $\mathrm{Tf}^{\circ 4} = \mathrm{id}$. Можно сказать, что фермионная Т-дуальность является инволюцией более высокого порядка, чем бозонная (в описанном смысле).

Действительно, рассмотрим преобразование RR-биспинора, генерируемое $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрией, параметризованной 16-компонентными спинорами $\epsilon^{1,2}$. Рассмотрим для определённости случай супергравитации типа IIA, где эти спиноры имеют разную киральность. После первой дуальности получаем поля, описываемые выражениями (1.3), (1.4). Полученное решение также является $\mathcal{N} = 2$ IIA суперсимметричным, причём его спиноры Киллинга $\epsilon'^{1,2}$ связаны с $\epsilon^{1,2}$ соотношением [23]

$$\epsilon'^{1,2} = C^{-1}\epsilon^{1,2}. \tag{2.3}$$

Теперь проделаем фермионную Т-дуальность для нового решения вдоль новых спиноров Киллинга, что дает

$$\begin{aligned} e^{\phi''}F'' &= e^{\phi'}F' + 16\,i\,C'^{-1}(\epsilon'^1 \otimes \epsilon'^2),\\ \phi'' &= \phi' + \frac{1}{2}\log C',\\ \partial_\mu C' &= i(\epsilon'^1\bar{\gamma}_\mu\epsilon'^1 + \epsilon'^2\gamma_\mu\epsilon'^2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.3) в последнее уравнение и пользуясь определением C (1.5), получаем

$$C' = -\frac{1}{C}, \tag{2.5}$$

а из первых двух уравнений (2.4):

$$e^{\phi''}F'' = e^{\phi}F, \qquad \phi'' = \phi + \frac{1}{2}\log CC', \tag{2.6}$$

то есть

$$\begin{aligned} e^{\phi''} &= \pm i e^{\phi},\\ F'' &= \mp i F. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отметим, что спиноры Киллинга после двух проделанных преобразований дуальности вернулись к первоначальным значениям с точностью до знака,

$$\epsilon''^{1,2} = (C')^{-1}\epsilon'^{1,2} = -\epsilon^{1,2}. \tag{2.8}$$

Поскольку уравнения фермионной Т-дуальности (1.3), (1.5) квадратичны по спинорам Киллинга, этот знак не играет роли при последующих преобразованиях.

Из проделанных вычислений несложно видеть, что для того, чтобы вернуть поля к первоначальным значениям, необходимо проделать ещё две фермионные Т-дуальности в направлении (ϵ^1, ϵ^2). Результатом четырёх последовательных преобразований будет:

$$\begin{aligned} e^{\phi''''}F'''' &= e^{\phi''}F'' = e^{\phi}F,\\ \phi'''' &= \phi + \frac{1}{2}\log CC' + \frac{1}{2}\log CC'. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Экспоненциируя, имеем для струнной константы связи e^{ϕ}:

$$e^{\phi''''} = e^{\phi}\sqrt{CC'}\sqrt{CC'} = e^{\phi}(\pm i)(\pm i), \tag{2.10}$$

причём два выбора знака делаются независимо. Таким образом, по итогам четырёх преобразований фермионной Т-дуальности мы имеем полную самодуальность произвольного суперсимметричного решения, с точностью до возможного выбора знака

$$e^{\phi''''} = \pm e^{\phi}, \qquad F'''' = \mp F. \tag{2.11}$$

Чтобы избежать этой неоднозначности, следует либо соответствующим образом выбрать знак квадратного корня в соотношении (2.10), либо проделать весь блок из 4 фермионных Т-дуальностей повторно. Мы можем заключить, что фермионная Т-дуальность является инволюцией 4 (или 8) степени, $\mathrm{Tf}^4 = \mathrm{id}$.

Отметим интуитивное объяснение полученного результата. Известно, что спинор при повороте на 2π вообще говоря приобретает фазовый множитель. И только повторный поворот на 2π приводит спинор в изначальное состояние. Это находится в аналогии с тем, что $\mathrm{Tf}^{\circ 2} \neq \mathrm{id}$, но $\mathrm{Tf}^{\circ 4} = \mathrm{id}$, в то время как $\mathrm{Tb}^{\circ 2} = \mathrm{id}$.

3. Сопряжение бозонной и фермионной T-дуальности

В предыдущем разделе было установлено, что, подобно бозонной, фермионная T-дуальность является инволюцией (более высокого порядка). Наша цель – поиск такой комбинации T-дуальностей, которая бы давала нетривиальное вещественное фоновое пространство. Возможным способом добиться этого являются комбинации вида $\mathrm{Tf}^{\circ m} \circ \mathrm{Tb} \circ \mathrm{Tf}^{\circ n}$, где действие бозонной T-дуальности "сопрягается" при помощи фермионной T-дуальности. В общем случае можно думать о сложных преобразованиях, где бозонные и фермионные дуальности чередуются в различной последовательности.

Для преобразования бозонной T-дуальности нам потребуется наложить на исходное решение дополнительное требование существования векторного поля Киллинга. Рассмотрим наиболее общий вид решения супергравитации типа IIA с $U(1)$ изометрией:

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= ds_9^2 + e^{2\Delta}(dz + A_1)^2, \\ B_2 &= B + B_1 \wedge dz, \\ F_0 &= m, \\ F_2 &= G_2 + G_1 \wedge (dz + A_1), \\ F_4 &= G_4 + G_3 \wedge (dz + A_1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где Δ – некоторый скручивающий фактор, m – параметр массы Романса. Помимо RR-полей решение может также характеризоваться ненулевым NSNS-полем второго ранга B_2. Направлением изометрии здесь является z и все поля не зависят от этой координаты. Бозонная T-дуальность вдоль направления z преобразует спиноры Киллинга $\epsilon^{1,2}$ следующим образом [34]:

$$\begin{aligned} \epsilon'^1 &= \epsilon^1, \\ \epsilon'^2 &= -\gamma_z \epsilon^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В майорана-вейлевском базисе гамма-матриц спиноры $\epsilon^{1,2}$ являются верхними/нижними блоками 32-компонентных спиноров $E^{1,2}$

$$E^1 = \begin{bmatrix} \epsilon^1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon^2 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Действие бозонной T-дуальности на таких спинорах выглядит аналогичным образом $E'^1 = E^1$, $E'^2 = -\Gamma_z E^2$, где Γ_z – 32-компонентная гамма-матрица. Оператор киральности в 10 измерениях определяется стандартным образом

$$P_\pm = \frac{1 \pm \Gamma^{11}}{2}, \tag{3.4}$$

где $\Gamma^{11} = \Gamma^0 \Gamma^1 \cdots \Gamma^9$. Так как Γ^{11} антикоммутирует со всеми гамма-матрицами, мы получаем, что спинор E'^2 имеет киральность, противоположную киральности спинора E^2:

$$E'^2 = \begin{bmatrix} \epsilon'^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_z \epsilon^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

И действительно, бозонная T-дуальность связывает теорию типа IIA, в которой спиноры Киллинга имеют разную киральность, с теорией типа IIB, в которой киральность спиноров одинакова.

Рассмотрим симметричную цепочку преобразований

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{IIA} & \xrightarrow{\mathrm{Tf}} & \mathrm{IIA} & \xrightarrow{\mathrm{Tf}} & \mathrm{IIA} \\ & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tb}} \\ & & & & \mathrm{IIB} & \xrightarrow{\mathrm{Tf}} & \mathrm{IIB} & \xrightarrow{\mathrm{Tf}} & \mathrm{IIB} \end{array} \tag{3.6}$$

Покажем теперь, что когда решение задано только метрическим тензором, RR-полями и дилатоном, т.е. поля NSNS форм отсутствуют, эта цепочка эквивалентна действию лишь бозонной Т-дуальности посередине.

Действительно, после второй фермионной дуальности мы получаем IIA решение вида (2.6), которое отличается от начального лишь видом дилатона. Под действием Т-дуальности вдоль направления изометрии z биспинор F и дилатон преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{\phi'''}F''' &= g_{zz}^{-1/2}e^{\phi''}F''\gamma_z = g_{zz}^{-1/2}e^{\phi}F\gamma_z, \\ \phi''' &= \phi'' - \frac{1}{2}\log g_{zz} = \phi - \frac{1}{2}\log g_{zz} + \frac{1}{2}\log CC'. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя тождество

$$\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}\gamma^{\nu} = \gamma^{\mu_1\cdots\mu_n\nu} - \gamma^{[\mu_1\cdots\mu_{n-1}}\eta^{\mu_n]\nu}, \tag{3.8}$$

легко показать, что биспинор $F\gamma_z$ содержит поля IIB супергравитации, если F соответствует супергравитации типа IIA.

Еще две фермионные Т-дуальности, как и в предыдущем случае, дают тождественное преобразование величины $e^{\phi}F$ и с точностью до знака сокращают член $\log CC'$ в преобразовании дилатона. Таким образом, после четырех фермионных Т-дуальностей и одной бозонной дуальности посередине мы имеем

$$\begin{aligned} e^{\phi^{(\mathrm{V})}}F^{(\mathrm{V})} &= g_{zz}^{-1/2}e^{\phi}F\gamma_z, \\ \phi^{(\mathrm{V})} &= \phi - \frac{1}{2}\log g_{zz}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Полученное преобразование идентично одному преобразованию бозонной Т-дуальности вдоль направления z.

В изложении выше предполагалось, что NS-NS поля B тождественно равны нулю, поскольку, вообще говоря, преобразование фермионной Т-дуальности должно формулироваться для калибровочно инвариантных полей [27]

$$\begin{aligned} &\hat{F}_0 = m = F_0, \\ &\hat{F}_2 = dC_1 + mB_2 = F_2 + mB_2, \\ &\hat{F}_4 = dC_3 - dB\wedge C_1 + mB\wedge B = F_4 - dB\wedge C_1 + mB\wedge B. \end{aligned} \tag{3.10}$$

При этом биспинор $\hat{F}$, построенный из таких полей, под действием бозонной Т-дуальности преобразуется таким же образом, как и биспинор F, т.е.

$$\hat{F}' = \hat{F}\gamma_z. \tag{3.11}$$

Легко видеть, что все вклады от 2-формы B и тензора напряженности dB в преобразования формы ранга $p+1$ компенсируются вкладами от форм ранга $p-1$. Таким образом, несмотря на то, что предположение о необходимости использовать биспинор $\hat{F}$ вместо F в преобразовании фермионной Т-дуальности не является строго доказанным в литературе, полученный выше результат от этого не зависит.

Заключение

В работе приведен краткий обзор фермионной Т-дуальности, которая является симметрией $\mathcal{N}=2$ $d=10$ супергравитаций типа II, т.е. переводит суперсимметричные решения друг в друга. Явным вычислением было продемонстрировано, что тождественное преобразование получается при действии четырех или восьми последовательных фермионных Т-дуальность вдоль одного направления суперсимметрии (ϵ^1,ϵ^2). Это свойство является показательным отличием от бозонной Т-дуальности, которая дает тождественное преобразование, будучи примененной дважды.

Показано, что из этого свойства следует, что цепочка $\mathrm{Tf}\circ\mathrm{Tf}\circ\mathrm{Tb}\circ\mathrm{Tf}\circ\mathrm{Tf}$ из двух фермионных дуальностей, одной бозонной и двух фермионных вдоль того же направления эквивалентна одной бозонной Т-дуальности для суперсимметричных решений супергравитации типа IIA с $U(1)$ изометрией самого общего вида. При этом отмечено, что результат не зависит от использования биспинора из самих RR-полей, либо их калибровочно-инвариантных модификаций.

Этот пример указывает возможность генерирования действительных решений и получения самодуальных решений при использовании цепочек дуальностей вида $\mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tb} \circ \mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tf}$ или $\mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tb} \circ \mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tf} \circ \mathrm{Tb} \circ \mathrm{Tf}$. Несимметричное положение бозонной дуальности в первой цепочке приводит к тому, что первые две фермионные дуальности не сокращают друг друга в преобразовании биспинора и дают в итоге нетривиальный результат.

Вторая цепочка требует отдельного рассмотрения, поскольку является открытым вопрос, как ведет себя вектор Киллинга при фермионной дуальности. В самом простом случае, когда поля, спиноры и векторы Киллинга не зависят от координат вдоль направления изометрии, можно сразу же сказать, что вектор Киллинга не поменяется. В общем же случае следует производить анализ, подобный [34], где показано, что спинор Киллинга под действием дуальности вдоль вектора Киллинга ξ получает добавку в виде производной Косман [35, 36]:

$$\epsilon' = \epsilon + \mathcal{L}_\xi \epsilon. \tag{3.12}$$

Вопрос получения действительных решений при помощи фермионной T-дуальности является важным по нескольким причинам. Во-первых, фермионная T-дуальность, в отличие от бозонной абелевой или неабелевой T-дуальности, в общем случае дает комплексные решения, которые не могут считаться физическими. Обычным подходом является использование определенного набора **различных** (обычно четыре или восемь) пар спиноров Киллинга и нескольких векторов Киллинга для получения цепочки преобразований, дающих действительное решение.

В данном подходе предлагается рассматривать только одну пару спиноров Киллинга, параметризующих одну $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрию и перемежать преобразования фермионной дуальности вдоль этой одной пары спиноров преобразованиями бозонной дуальности вдоль некоторой изометрии. Авторы планируют опубликовать результаты работы в этом направлении в последующих статьях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Daniel Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara. Progress Toward a Theory of Supergravity. *Phys. Rev.*, D13:3214–3218, 1976.
2. Stanley Deser and B. Zumino. Consistent Supergravity. *Phys. Lett.*, B62:335, 1976.
3. Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman. Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance. *JETP Lett.*, 13:323–326, 1971. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.13,452(1971)].
4. A. Neveu and J. H. Schwarz. Factorizable dual model of pions. *Nucl. Phys.*, B31:86–112, 1971.
5. D. V. Volkov and V. P. Akulov. Is the Neutrino a Goldstone Particle? *Phys. Lett.*, B46:109–110, 1973.
6. J. Wess and B. Zumino. Supergauge Transformations in Four-Dimensions. *Nucl. Phys.*, B70:39–50, 1974.
7. Marcus T. Grisaru, P. van Nieuwenhuizen, and J. A. M. Vermaseren. One Loop Renormalizability of Pure Supergravity and of Maxwell-Einstein Theory in Extended Supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 37:1662, 1976.
8. Marcus T. Grisaru. Two Loop Renormalizability of Supergravity. *Phys. Lett.*, B66:75, 1977.
9. Z. Bern, J. J. Carrasco, Lance J. Dixon, Henrik Johansson, D. A. Kosower, and R. Roiban. Three-Loop Superfiniteness of N=8 Supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 98:161303, 2007.
10. Renata Kallosh. An Update on Perturbative N=8 Supergravity. 2014.
11. Daniel Harry Friedan. Nonlinear models in two + epsilon dimensions. *Annals Phys.*, 163:318, 1985. Ph.D. Thesis.
12. Curtis G. Callan, Jr., E.J. Martinec, M.J. Perry, and D. Friedan. Strings in background fields. *Nucl.Phys.*, B262:593, 1985.
13. C.M. Hull and P.K. Townsend. Unity of superstring dualities. *Nucl.Phys.*, B438:109–137, 1995.
14. Edward Witten. String theory dynamics in various dimensions. *Nucl.Phys.*, B443:85–126, 1995.
15. Cumrun Vafa. Lectures on strings and dualities. pages 66–119, 1997.
16. Juan Martin Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].
17. Amit Giveon, Massimo Porrati, and Eliezer Rabinovici. Target space duality in string theory. *Phys.Rept.*, 244:77–202, 1994.
18. Keiji Kikkawa and Masami Yamasaki. Casimir effects in superstring theories. *Phys.Lett.*, B149:357, 1984.
19. N. Sakai and I. Senda. Vacuum energies of string compactified on torus. *Prog.Theor.Phys.*, 75:692, 1986.

20. T.H. Buscher. Quantum corrections and extended supersymmetry in new sigma models. *Phys.Lett.*, B159:127, 1985.
21. T.H. Buscher. A symmetry of the string background field equations. *Phys.Lett.*, B194:59, 1987.
22. T.H. Buscher. Path integral derivation of quantum duality in nonlinear sigma models. *Phys.Lett.*, B201:466, 1988.
23. Nathan Berkovits and Juan Maldacena. Fermionic T-duality, dual superconformal symmetry, and the amplitude/Wilson loop connection. *JHEP*, 0809:062, 2008.
24. Luis F. Alday and Juan Martin Maldacena. Gluon scattering amplitudes at strong coupling. *JHEP*, 0706:064, 2007.
25. Luis F. Alday and Juan Maldacena. Comments on gluon scattering amplitudes via AdS/CFT. *JHEP*, 11:068, 2007.
26. Niklas Beisert, Riccardo Ricci, Arkady A. Tseytlin, and Martin Wolf. Dual superconformal symmetry from AdS(5) x S**5 superstring integrability. *Phys.Rev.*, D78:126004, 2008.
27. Ilya Bakhmatov and David S. Berman. Exploring fermionic T-duality. *Nucl.Phys.*, B832:89–108, 2010.
28. Ilya Bakhmatov. On $AdS_4 \times CP^3$ T-duality. *Nucl.Phys.*, B847:38–53, 2011.
29. Ilya Bakhmatov, Eoin. O Colgain, and Hossein Yavartanoo. Fermionic T-duality in the pp-wave limit. *JHEP*, 10:085, 2011.
30. Eoin O Colgain. Fermionic T-duality: A snapshot review. *Int. J. Mod. Phys.*, A27:1230032, 2012.
31. P.A. Grassi, G. Policastro, and P. van Nieuwenhuizen. An introduction to the covariant quantization of superstrings. *Class.Quant.Grav.*, 20:S395–S410, 2003.
32. Nathan Berkovits. ICTP lectures on covariant quantization of the superstring. pages 57–107, 2002.
33. L. J. Romans. Massive N=2a Supergravity in Ten-Dimensions. *Phys. Lett.*, B169:374, 1986.
34. Özgür Kelekci, Yolanda Lozano, Niall T. Macpherson, and Eoin Ó Colgáin. Supersymmetry and non-Abelian T-duality in type II supergravity. *Class. Quant. Grav.*, 32(3):035014, 2015.
35. Yvette Kosmann. Dérivées de Lie des spineurs. *Annali di Mat. Pura Appl*, 91:317–395, 1972.
36. Jose Miguel Figueroa-O'Farrill. On the supersymmetries of Anti-de Sitter vacua. *Class. Quant. Grav.*, 16:2043–2055, 1999.

Поступила в редакцию 28.09.2015

Бахматов Илья Владимирович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, Институт физики, Казанский Федеральный Университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.
E-mail: ivbahmatov@kpfu.ru

Мусаев Эдвард Таваккулович, к. ф.-м. н., научный сотрудник, факультет математики, Научно-исследовательский университет Высшая школа экономики, 117312, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 7.
E-mail: emusaev@hse.ru

I. V. Bakhmatov, E. T. Musaev
Fermionic T-duality as involution on the solution space of type II supergravity

Keywords: string theoy, supergravity, T-duality, supersymmetry

PACS: 11.10.Kk,04.65.+e

Fermionic T-duality is a symmetry of string theory and of $\mathcal{N} = 2$ $d = 10$ supergravity. We consider the result of applying several consecutive fermionic T-dualities in the same superspace direction. We find that such transformation is an involution of order 4 or 8, as opposed to bosonic T-duality. We also consider the simplest way of mixing bosonic and fermionic T-dualities. The results may be applicable to the generation of new supersymmetric solutions to supergravity and string theory.

Received 28.09.2015

Bakhmatov Ilya Vladimirovich, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlevskaya 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ivbahmatov@kpfu.ru

Musaev Edvard Tavakkulovich, Faculty of Mathematics, National Research University Higher School of Economics, st. Vavilova, 7, Moscow, 117312, Russia.
E-mail: emusaev@hse.ru