УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов,[1] ***Е. В. Савельев*** [2]

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ. IV. КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ «БУТЫЛОЧНОГО» ПОТЕНЦИАЛА

Предложенный ранее подход, связанный с введением эквивалентной задачи движения массивной частицы в силовом потенциальном поле, позволяет сконструировать точное космологическое решение для открытой Вселенной с «бутылочным» потенциалом для эквивалентного уравнения Ньютона. Такая космологическая модель может описывать эволюцию Вселенной, начиная с мира де Ситтера, без введения скалярного поля. Как иллюстрация такого подхода приведен соответствующий график функции состояния для частных значений параметров.

Ключевые слова: точные решения уравнений Эйнштейна, открытые космологические модели, уравнение Ньютона, функция состояния.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

Введение

Новый метод получения точных решений космологических уравнений Эйнштейна с помощью эквивалентных потенциалов был предложен в работе [1] и продемонстрирован при нахождении обобщений решения Фридмана для описания открытой Вселенной, заполненной идеальной жидкостью с переменным уравнением состояния (или функцией состояния, введенной в [2]). При этом был использован подход Фока ([3]- [4]) для записи метрики 4-мерного пространства-времени в конформно-галилеевой форме,

$$ds^2 = exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{0.1}$$

с конформным множителем $exp(2\sigma)$ как функции одной переменной S , квадрат которой представляет собой произведение запаздывающего и опережающего времен в трехмерном мире: $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - r^2 = (t-r)(t+r) = uv$; а $\sigma = \sigma(S)$ и $\delta_{\mu\nu} = diag(1;-1;-1;-1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu,\nu = 0,1,2,3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\varkappa = 8\pi$.

В дальнейших работах [5] и [6] развивается данный подход для классических уравнений Эйнштейна с правой частью (без космологической постоянной), выбранной в виде тензора энергии-импульса (ТЭИ) в приближении идеальной жидкости,

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p\, b_{\mu\nu}, \tag{0.2}$$

где ε – плотность энергии; p – давление; 4-скорость $u_\mu = exp(\sigma)b_\mu$ пропорциональна градиенту переменной S как функции координат x^μ : $b_\mu = S,_\mu$; $u_\mu u^\mu = 1$ – условие нормировки 4-скорости; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ есть 3-проектор на 3-пространство, который играет роль метрического тензора для 3-пространства, при этом выполняется условие ортогональности 3-пространства и временно-подобной конгруэнции u^μ : $b_{\mu\nu}u^\mu = 0$.

В результате (1+3)-расщепления (см., например, ([7]- [8])) система гравитационных уравнений с метрикой (0.1) сведется к системе двух дифференциальных уравнений в полных производных:

$$3\left(2\frac{\sigma'}{S} + (\sigma')^2\right) = \varkappa\varepsilon \cdot exp(2\sigma); \tag{0.3}$$

$$2\left(\sigma'' + \frac{2\sigma'}{S} + \frac{(\sigma')^2}{2}\right) = -\varkappa p \cdot exp(2\sigma), \tag{0.4}$$

где штрих обозначает производную d/dS.

[1] E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru ; ©Баранов А.М.
[2] E-mail: editor@stfi.ru ; ©Савельев Е.В.

Эта система (0.3-0.4) заменой $\sigma = 2 \cdot ln(y)$ может быть сведена к более простой (см. [1])

$$12 \cdot y' \left(y' + \frac{1}{S} \cdot y \right) = \varkappa \varepsilon \cdot y^6; \tag{0.5}$$

$$4 \cdot \left(y'' + \frac{2}{S} y' \right) = -\varkappa p \cdot y^5. \tag{0.6}$$

Как уже упоминалось в [6] уравнение (0.6), содержащем давление, с помощью замен:

$$y = z_1(1/S) \qquad \text{либо} \qquad y = z_2(S)/S, \tag{0.7}$$

можно свести к уравнению

$$d^2 z/dx^2 = F\left(x, z, p\right), \tag{0.8}$$

где переменная x в первом случае равна $x = 1/S$, а во втором – $x = S$.

Уравнение (0.8) аналогично уравнению Ньютона в классической механике для частицы с единичной массой, если $F\left(x, z, p\right)$ интерпретировать как некоторую силу (в дальнейшем потенциальную, $F = -\partial U/\partial z$, см. ([1]– [6])). При этом z – одна из функций z_1, z_2.

В [1] уже была упомянута соответствующая аналогию с внешней и внутренней задачами в теории потенциала, где внешнее решение (решение уравнения Лапласа) зачастую ищется в первом виде, а внутреннее решение (решение уравнения Пуассона) - во втором виде. В частности, в работе [1] была рассмотрена возможность первой замены, приводящей к точному космологическому решению, описывающее субстанцию, которая при больших временах ($S \to \infty$) распадается на некогеретную пыль (с $p = 0$) и равновесное светоподобное излучение (с $p_{rad} = (1/3)\ \varepsilon_{rad}$), и асимтотически переходит в решение Фридмана в форме Фока [3]: $exp(2\sigma_F) = (1 - A_F/S)^4$, где A_F есть постоянная из решения Фридмана.

1. «Бутылочный» потенциал

Следующим шагом после работ [1], [5] и [6] является выбор потенциала четвертой степени по z,

$$U = \left(\lambda^2/4\right)\left(z^2 - \alpha^2\right)^2, \tag{1.1}$$

где λ и α - некоторые постоянные.

Иллюстрация поведения такого потенциала приведена на Рис.1.

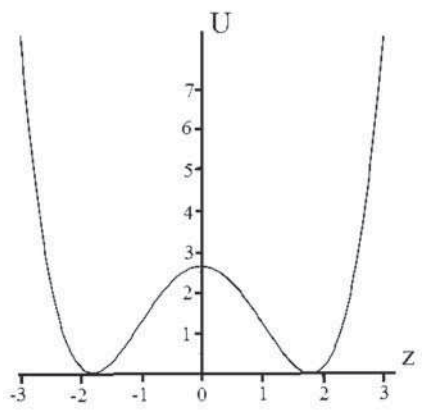

Рис. 1. Пример поведение функции «бутылочного» потенциала U для частных значений параметров $\lambda = 1$ и $\alpha = 1,8$.

Воспользовавшись законом сохранения «энергии» для соответствующей механической системы с потенциальной силой $F = -dU/dz$ и массой $m = 1$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dS}\right)^2 + U(z) = E, \tag{1.2}$$

где E– постоянная, являющаяся аналогом полной энергии.

Вводя далее безразмерную переменную $x = \gamma S$ и используя (1.1), можно свести уравнение (1.2) к квадратуре

$$\int \frac{\gamma}{\sqrt{(\lambda^2/2)\cdot(-z^4+2z^2\alpha^2-\alpha^4+(4/\lambda^2)E)}}\,dz = x - x_0, \tag{1.3}$$

которая после нахождения корней полинома четвертой степени в зависимости от выбора условия положительности корней может быть представлена в виде:

$$\left(\frac{\gamma\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}\int\frac{1}{\sqrt{(a^2-z^2)\cdot(z^2+b^2)}}\,dz\right) = x - x_0, \tag{1.4}$$

где $a^2 = (2/\lambda)\sqrt{E} + \alpha^2$. $b^2 = (2/\lambda)\sqrt{E} + \alpha^2$. При этом $a^2 + b^2 = (4/\lambda)\sqrt{E}$; $a^2\cdot b^2 = (4/\lambda^2)E - \alpha^4$.

Решение уравнения (1.4) относится классу эллиптических функций Якоби (см., например, [9]). Воспользовавшись результатом [10] (с.410, формула (17.4.51)) по нахождению функции z из (1.3), при выборе $x_0 = 0$ получим решение в виде

$$z(\xi) = sd\left(\frac{\xi\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \frac{a^2}{a^2+b^2}\right), \tag{1.5}$$

где $sd(\zeta, m)$ – одна из фунций Якоби, связанная с другими функциями Якоби как $sd(\zeta, m = sn(\zeta, m)/dn(\zeta, m)$; m – модуль функции Якоби, который здесь равен

$$m = \frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{\alpha^2\lambda}{2\sqrt{E}}\right), \tag{1.6}$$

а переменная ξ

$$\xi = \frac{\lambda\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}\gamma}x,. \tag{1.7}$$

поэтому

$$\zeta = \xi\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} = \frac{\lambda(a^2+b^2)}{\sqrt{2}\gamma ab}x = \frac{\lambda(4E)^{1/4}}{\sqrt{1-\dfrac{\alpha^4\lambda^2}{4E}}}\cdot x = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\cdot m}\frac{a}{b}\cdot x = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\cdot m}\sqrt{\frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}}\cdot x = \eta\cdot x, \tag{1.8}$$

где $\vartheta = \dfrac{\alpha^2\lambda}{2\sqrt{E}}$.

Таким образом,

$$z(x) = sd(\eta x, m). \tag{1.9}$$

Функция $y(x) = \gamma z(x)/x$, связанная с конформным множителем как $y(x)^2 = exp(2\sigma)$, в этом случае запишется в виде

$$y(x) = \frac{\gamma sd(\eta x, m).}{x} \tag{1.10}$$

и в точке $x = 0$ равна постоянной $y(0) = \gamma\eta$. Если выбрать $y(0) = 1$, то $\gamma = 1/\eta$, что означает отсутствие сингулярности в начальный момент возникновения Вселенной.

2. Функция состояния

Аналогично как и в предыдущих работах ([1]– [6]) введем функцию состояния,

$$\beta(x) = \frac{p(x)}{\varepsilon(x)}. \tag{2.1}$$

которая в каждой фиксированной точке x есть уравнение состояния.

В нашем случае давление и плотность энергии соответственно равны

$$\varkappa p(x) = -4\frac{\gamma^3}{xy(x)^5}\cdot\frac{d^2z(x)}{dx^2}; \tag{2.2}$$

$$\varkappa\varepsilon(x) = 12\frac{\gamma^4}{x^2y(x)^6}\cdot\frac{dz(x)}{dx}\left(\frac{dz(x)}{dx} - \frac{z(x)}{x}\right). \tag{2.3}$$

В итоге функция состояния запишется как

$$\beta(x) = -\frac{1}{3}\frac{z(x)\cdot\dfrac{d^2z(x)}{dx^2}}{\dfrac{dz(x)}{dx}\left(\dfrac{dz(x)}{dx}-\dfrac{z(x)}{x}\right)} \tag{2.4}$$

или после подстановки решения (1.9) получаем

$$\beta(x) = -\frac{1}{3}\eta x\left(\frac{\eta x\cdot sn^2(\eta x,m)\cdot\left(m^2 sn^2(\eta x,m)-2m^2+1\right)}{\eta x\cdot sn^2(\eta x,m)+sn(\eta x,m)\cdot cn(\eta x,m)\cdot dn(\eta x,m)-\eta x}\right). \tag{2.5}$$

В пределе $x \to 0$ приходим к уравнению состояния физического вакуума, $\beta = -1$, то есть решение стремится к решению де Ситтера, запись которого в используемых в данной работе обозначениях приведена в [11].

Если в качестве иллюстрации взять $\eta = 1$ и $m = 0.85$, то получим поведение функции состояния $\beta(x)$ вблизи «начала» Вселенной, изображенное на Рис.2.

Такое поведение означает, что может быть реализована инфляционная модель Вселенной без введения дополнительного скалярного поля, введенное эквивалентное уравнение Ньютона для «бутылочного» потенциала может рассматриваться как уравнение некоторого эквивалентного скалярного поля z (переменная S включает в себя зависимость от всех четырех координат x^{μ}).

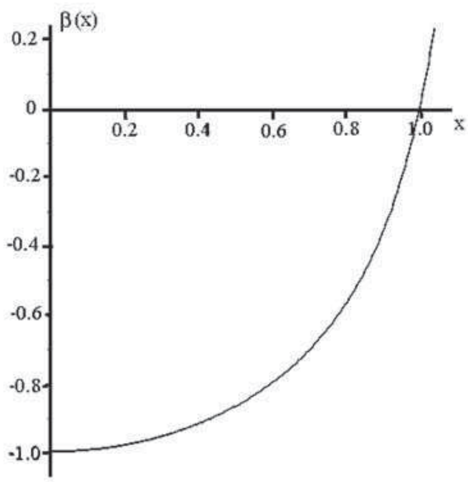

Рис. 2. Поведение функции состояния $\beta(x)$ для «бутылочного» потенциала со значениями параметров $\eta = 1$ и $m = 0.85$.

3. Заключение

Найдено точное космологическое решение уравнений тяготения для открытой модели Вселенной, заполненной материей в приближении идеальной жидкости с отличным от нуля давлением и 4-метрикой, записанной в форме Фока как конформная метрике Минковского. Полученная космологическая модель рассмотрена вблизи «начала» Вселенной.

Подход получения точных открытых космологических решений с помощью введения эквивалентных потенциалов по аналогии с классической механикой был предложен ранее (см., например, [1]).

На основе этого подхода, используя «бутылочный» потенциал, строится один из вариантов открытой космологической модели без скалярного поля и описывающей гравитационное поле вблизи «начала» Вселенной. Показано, что найденное точное решение позволяет описывать эволюцию Вселенной, начиная с мира де Ситтера, и не имеет сингулярности. В качестве иллюстрации построен график функции состояния для частных значений параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. №1. С.37-46.
2. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоские открытые модели Вселенной с произвольной функцией состояния Вселенной //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. №4. С.21-27.
3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.
4. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.
5. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. II. Линейное уравнение состояния и многомерные пространства-времена //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. №2. С.19-30.
6. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. III. «Внутреннее» решение //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. №4. С.59-70.
7. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
8. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.
9. Янке Е, Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
10. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
11. Баранов А.М., Савельев Е.В. Конформно-плоские модели и уравнения состояния. 1. Четырехмерное пространство-время /КрасГУ. Красноярск, 1988. 20 с. Деп. в ВИНИТИ 11.07.1988, № 5914-В88.

Поступила в редакцию 01.02.2012

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор,
Красноярский государственный педагогический университет им.В.П.Астафьева,
660049, Россия, г.Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89 ;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Савельев Евгений Викторович, к. ф.-м. н., доцент,
ООО «ПРОФИЛЬ - 2С», 123060, Москва, 1-ый Волоколамский проезд, 15/16
E-mail: editor@stfi.ru

A. M. Baranov, Eu. V. Saveljev

Exact solutions of the conformally flat Universe. IV. Cosmological model with the "bottle" potential

Keywords: exact solutions of Einstein equations, open cosmological models, Newton's equation, function of state.

PACS: 04.20.-q; 98.80.Jk

The exact cosmological solution of the gravitation equations for the Universe open model, by the filled substance in an approach of the perfect fluid with the nonzero pressure and the 4-metric in the form of Fock. The cosmological model is viewed nearby to the Universe "beginning". The approach of deriving of exact open cosmological solutions by means of introduction of the equivalent potentials by analogy to a classical mechanics has been offered earlier by the authors. On the basis of this approach, using the «bottle» potential, we have one of variants of open cosmological model without a scalar field. This cosmological model describes a gravitational field close from "the beginning" of the Universe. It is shown, that the discovered exact solution allows to describe Universe evolution, since the world де Ситтера, and has no singularity. The diagramme of a function of state for special values of parametres is an illustration of such approach.

REFERENCES

1. Baranov A.M. Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no.1, pp.37-46.

2. Baranov A.M. Saveljev E.V. Conformally flat model of the open Universe with an arbitrary function of state, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2013, no.4, pp.21-27.

3. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964 (2nd edition).

4. Mitskievich N.V. *Physical Fields in General Relativity*, Moskow: Nauka, 1969, 563 p. (in Russian).

5. Baranov A.M. Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. II. The linear equation of state and multidimensional space-times, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no.2, pp.19-30.

6. Baranov A.M. Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. III. The "interior"solution, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no.4, pp.59-70.

7. Vladimirov Yu.S. *Reference Frames in the Gravitation Theory*, Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.(in Russian)

8. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

9. Janke E., Emle F., Lösch F. Tafeln Höherer Funktionen. D.C.Teubner Verlagsgesllschaft. Stuttgart, 1960.

10. Abramowitz M., Stegun A. Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standarts Applied Mathematics Series · 55, 1964.

11. Baranov A.M., Saveljev E.V. Conformally-flat models and equations of state. 1. The four-dimension space-time, KrasSU, Krasnoyarsk, 1988, 20 p., Deposited in VINTI USSR 11.07.1988, no. 5914-B88.

Received 01.02.2012

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor,
Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P.Astaf'ev,
89 Ada Lebedeva St., Krasnoyarsk, 60049, Russia;
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

Saveljev Eugene Viktorovich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor,
OOO "PROFILL - 2S 15/16 1-st Volokolamsk passage, Moscow, 123060, Russia.

E-mail: editor@stfi.ru