УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

ФИЗИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ВСЕЛЕННОЙ С ИНФЛЯЦИОННЫМ (ДЕ-СИТТЕРОВСКИМ) НАЧАЛОМ

Доказана физическая неустойчивость модели Вселенной с де-Ситтеровским началом. Показано, что небольшая примесь ультрарелятивистской материи превращает Вселенную де-Ситтера в ультрарелятивистскую Вселенную с конечным началом. Показана неустойчивость постоянного решения уравнения скалярного поля. Показано, что поперечные гравитационные возмущения такой модели делают ее неустойчивой вблизи космологической сингулярности.

Ключевые слова: Вселенная де-Ситтера, неустойчивость, конечное время жизни

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

1. Введение

Де-Ситтеровская модель Вселенной, иначе инфляция, является мейнстримом космологии, в струях которого работают сотни исследователей и написаны тысячи статей. Однако, тщательный анализ *математической модели* ранней инфляции обнаруживает целый ряд ее недостатков, среди которых имеются очень серьезные, ставящие под сомнение модели ранней инфляции. Мы не будем в этой статье обсуждать работы по ускорению Вселенной и сразу отсечем модели ускорения от обсуждаемой здесь модели именно первичной инфляции. Под первичной инфляцией мы будем понимать такую ситуацию, когда инфляция является первичной, т.е., существует с момента космологической сингулярности. Такая инфляция обычно называется инфлантоном и интерпретируется соответствующими космологами как вакуумное первичное состояние Вселенной. Конечно, получается философски комфортная картина: Вселенная существует всегда и возникает из ничего. Но так ли прочна конструкция этой эстетически предпочитаемой модели? Этому вопросу и посвящена данная статья.

2. Анализ минимальной модели

2.1. Уравнения минимальной модели

Как известно, уравнения Эйнштейна в случае изотропной однородной космологической модели с нулевой трехмерной кривизной

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)\\ &\equiv a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2); \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$t = \int a(\eta)d\eta \Leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)} \tag{2.2}$$

сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon; \tag{2.3}$$

$$\dot\varepsilon + 3\frac{\dot a}{a}(\varepsilon + \mathrm{p}(\varepsilon)) = 0. \tag{2.4}$$

Инвариантное ускорение Вселенной

$$\Omega = \frac{a\ddot a}{\dot a^2} \tag{2.5}$$

[1]E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

связано с *эффективным коэффициентом баротропы* материи, $\varkappa \equiv \mathrm{p}/\varepsilon$, соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1+3\varkappa). \tag{2.6}$$

Далее:

$$\varepsilon = \varepsilon_{(m)} + \varepsilon_{(s)}; \quad \mathrm{p} = \mathrm{p}_{(m)} + \mathrm{p}_{(s)}, \tag{2.7}$$

где $\varepsilon_{(m)}, \mathrm{p}_{(m)}$ – плотность энергии материи, $\varepsilon_{(s)}, \mathrm{p}_{(s)}$ – плотность энергии и давление всевозможных фундаментальных полей, возможно, скалярных, приводящих к ускорению Вселенной. Далее, примем минимальную модель взаимодействия, в которой:

$$\dot{\varepsilon}_{(s)} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_{(s)} + \mathrm{p}_{(s)}(\varepsilon_{(s)})) = 0, \tag{2.8}$$

$$\dot{\varepsilon}_{(m)} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_{(m)} + \mathrm{p}_{(m)}(\varepsilon_{(m)})) = 0. \tag{2.9}$$

Пусть теперь:

$$p_{(s)} = -\varepsilon_{(s)}; \tag{2.10}$$

$$p_{(m)} = \kappa_{(m)}\varepsilon_{(m)}; \quad 0 < \kappa_{(m)} < 1. \tag{2.11}$$

Интегрируя уравнения (2.8), (2.9), получим:

$$\varepsilon_{(s)} = \varepsilon^0_{(s)} = \mathrm{Const}; \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{(m)} = Ca^{-3(\kappa_{(m)}+1)}. \tag{2.13}$$

2.2. Точное решение с ультрарелятивистской добавкой

Рассмотрим случай ультрарелятивистской материи

$$p_{(m)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{(m)} \tag{2.14}$$

и положительной плотности темной энергии

$$\varepsilon^0_{(s)} > 0. \tag{2.15}$$

Подставляя выражения (2.12) и (2.13) с учетом (2.7) в уравнение Эйнштейна (2.3):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}(\varepsilon_{(s)} + \varepsilon_{(m)})} \tag{2.16}$$

и интегрируя его для случая ультрарелятивистской материи, получим решение уравнения Эйнштейна:

$$\begin{aligned} a^2(\tau) = \quad & a^2(\tau_0)\cosh(\tau-\tau_0) + \\ & \sqrt{a^4(\tau_0)+\gamma^2}\sinh(\tau-\tau_0), \end{aligned} \tag{2.17}$$

где τ есть безразмерное физическое время

$$\tau = \frac{t}{t_c} \equiv t\sqrt{\frac{32\pi}{3}\varepsilon^0_{(s)}}, \tag{2.18}$$

а постоянная γ^2 равна отношению плотностей энергии излучения и темной энергии в момент времени, когда масштабный фактор равен единице:

$$\gamma^2 = \frac{C}{\varepsilon^0_{(s)}} \equiv \left.\frac{\varepsilon_{(m)}(a)}{\varepsilon^0_{(s)}}\right|_{a=1}. \tag{2.19}$$

Положим для определенности (с учетом произвольности выбора единицы масштаба, т.е., a_0):

$$\tau_0 = 0; \quad a(\tau_0) = 1 \tag{2.20}$$

и упростим выражение (2.17) к виду:

$$a^2(\tau) = \cosh(\tau) + \sqrt{1+\gamma^2}\sinh(\tau). \tag{2.21}$$

Исследуем поведение масштабного фактора (2.21) при больших отрицательных значениях времени

$$\tau \to -\infty. \tag{2.22}$$

Находя асимптотику, получим:

$$a^2(\tau) \underset{\tau\to-\infty}{\simeq} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\tau}\bigl(1 - \sqrt{1+\gamma^2}\bigr), \tag{2.23}$$

откуда видно, что лишь при строгом равенстве:

$$\gamma \equiv 0 \Rightarrow \varepsilon_{(m)} \equiv 0 \tag{2.24}$$

мы получим в пределе

$$a(-\infty) = 0. \tag{2.25}$$

При ненулевых значениях γ разрешая соотношение (2.21) относительно τ, найдем условие неотрицательности $a^2(\tau)$:

$$\begin{aligned} \tau &\geq \tau_{-\infty}, \\ \tau_{-\infty} &= -\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\gamma^2}+1}{\sqrt{1+\gamma^2}-1} < 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

так что:

$$a(\tau_{-\infty}) = 0. \tag{2.27}$$

В частности, при малых значениях константы γ получим отсюда:

$$\tau_{-\infty} \backsimeq -\ln\frac{1}{\gamma}. \tag{2.28}$$

Именно этот момент времени $a(\tau_\infty) = 0$ соответствует космологической сингулярности. Поэтому даже при весьма малых ультрарелятивистских "примесях" к "чистому вакуумному состоянию", $\gamma \sim 10^{-6}$ мы обнаружим "бесконечно отдаленное прошлое" не так уж сильно отдаленным: $\tau_{-\infty} \sim -6$. Разлагая по малости $\delta\tau$ масштабный фактор (2.21) вблизи этого момента времени, получим:

$$a(\tau_{-\infty} + \delta t) = \sqrt{\gamma\delta t} \tag{2.29}$$

– ультрарелятивистскую асимптотику вблизи сингулярной точки.

2.3. Общий анализ минимальной модели

Рассмотрим уравнение Эйнштейна с добавкой произвольной природы, используя решения (2.13):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\varepsilon^0_{(s)}(1 + \gamma a^{-3(1+\kappa_{(m)})}). \tag{2.30}$$

Рассмотрим поведение решений этого уравнения вблизи сингулярности $a \to 0$. При этом, очевидно, главным членом в правой части (2.30), опять-таки, является материальный член. Поэтому вблизи сингулярности получим вместо (2.30):

$$\frac{d\ln a}{d\tau} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^0_{(s)}\gamma}a^{-\frac{3}{2}(1+\kappa_{(m)})}. \tag{2.31}$$

Решая это уравнение, получим:

$$a(\tau) = \left[1 + \frac{3}{4}(\kappa_{(m)}+1)\gamma\tau\right]^{\frac{2}{3(\kappa_{(m)}+1)}}. \tag{2.32}$$

Отсюда видно, что сингулярное состояние $a \to 0$ при выбранном масштабе достигается в момент времени:

$$\tau_\infty = -\frac{4}{3(\kappa_{(m)}+1)}\frac{1}{\gamma}, \qquad (2.33)$$

т.е., опять-таки, в обозримом прошлом (для указанного примера $\tau_{-\infty} \backsim -10^6$).
Утверждение 1 *Даже небольшие примеси вещества с уравнением состояния, отличным от инфляционного ($\varepsilon + P = 0$) радикально изменяет космологическую ситуацию: Вселенная имеет начало в конечном прошлом и выходит на инфляционный режим в более поздние времена. В случае ультрарелятивистской примеси начало Вселенной логарифмически зависит от относительной доли этого вещества в плотности энергии.*

3. Идеология стандартной модели инфляции: реставрация

3.1. Стандартная модель

Будем рассматривать модель Вселенной, в которой присутствует лишь скалярное поле:

$$T^s_{ik} = \frac{e_1}{8\pi}\left[2\Phi_{,i}\Phi_{,k} - g_{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + e_2 m_s^2 g_{ik}\Phi^2\right], \qquad (3.1)$$

Будем полагать для невозмущенной модели $\Phi(t)$, для классического скалярного поля $e_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $e_2 = -1$; для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $e_1 = 1$, для поля с притяжением одноименно заряженных частиц $e_1 = -1$. Таким образом, получим для метрики (2.1):

$$T^{(s)}_{ik} = (\varepsilon_{(s)} + p_{(s)})\delta^4_i\delta^4_k - p_{(s)}g_{ik}, \qquad (3.2)$$

$$\varepsilon_{(s)} = \frac{e_1}{8\pi}(\dot\Phi^2 + e_2 m_s^2\Phi^2); \qquad (3.3)$$

$$p_{(s)} = \frac{e_1}{8\pi}(\dot\Phi^2 - e_2 m_s^2\Phi^2); \qquad (3.4)$$

Таким образом, закон сохранения для поля (2.8) принимает вид:

$$\dot\varepsilon_{(s)} + 3\frac{\dot a}{a}(\varepsilon_{(s)} + \mathrm{p}_{(s)}(\varepsilon_{(s)})) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{e_1}{4\pi}\dot\Phi\big(\ddot\Phi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\Phi + e_2 m_s^2\Phi\big) = 0. \qquad (3.5)$$

Полагая в (3.5) $\dot\Phi \not\equiv 0$, получаем уравнение поля:

$$\ddot\Phi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\Phi + e_2 m_s^2\Phi = 0, \qquad (3.6)$$

Это уравнение необходимо решать совместно с уравнением Эйнштейна (2.3) – система этих 2-х уравнений и составляет стандартную космологическую модель с учетом лишь того, что вместо массивного члена $m_s^2\Phi$ в уравнении (3.6) используют достаточно произвольную силовую функцию $-\nabla V$, где V – потенциал (уравнение (3.6) соответствует модели с квадратичным потенциалом).

Как решается эта система? Обычно используется приближение (см., например, [7])

$$m_s^2 \ll H^2 \equiv \frac{\dot a^2}{a^2}. \qquad (3.7)$$

В этом случае должно выполняться и условие:

$$m_s^2\Phi \ll \ddot\Phi, \qquad (3.8)$$

что соответствует в обычных условиях временам, меньшим комптоновским для скалярных бозонов.

Итак, в этом приближении полевое уравнение сводится к безмассовому:

$$\ddot\Phi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\Phi = 0, \qquad (3.9)$$

которое имеет своим *частным* решением требуемое:

$$\Phi = \Phi_0 = \mathrm{Const}. \tag{3.10}$$

При этом согласно (3.3) и (3.4) получим:

$$\varepsilon_s = -p_s = \frac{e_1 e_2}{8\pi} m_s^2 \Phi_0^2 = \mathrm{Const}. \tag{3.11}$$

Подставляя это решение при $e_1 e_2 = +1$ в уравнение Эйнштейна (2.3) и решая его, получим инфляционное решение:

$$a(t) = a_1 \mathrm{e}^{H_0 t}, \qquad H_0 = \frac{m_s}{\sqrt{3}} |\Phi_0|. \tag{3.12}$$

В этой модели начало Вселенной, соответствующее космологической сингулярности $a = 0$, находится в бесконечно удаленном прошлом:

$$a(-\infty) = 0. \tag{3.13}$$

Заметим, что уравнение Эйнштейна (2.3) в рассматриваемой модели имеет вид:

$$H^2 = H_0^2, \tag{3.14}$$

поэтому согласно (3.12) условие (3.7) эквивалентно условию:

$$|\Phi_0| \gg \sqrt{3}, \tag{3.15}$$

т.е., ***выполняется только для очень больших значений потенциала скалярного поля.***

Совершим теперь следующую иттерацию. Подставим теперь решение уравнение Эйнштейна (3.12) в исходное уравнение скалярного поля (3.6)

$$\ddot{\Phi} + 3H_0 \dot{\Phi} + e_2 m_s^2 \Phi = 0 \tag{3.16}$$

и найдем его точное решение, в котором учтем условие (3.7):

$$\Phi \approx C_1 \mathrm{e}^{-3H_0 t} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{e_2 m_s^2}{3H_0} t}. \tag{3.17}$$

Первый член в этом решении быстро затухает, а второй член при условии

$$m_s t \ll \frac{3H_0}{m_s} \equiv \sqrt{3} |\Phi_0| \tag{3.18}$$

остается приблизительно постоянным. Поэтому при условии (3.18) мы получим:

$$\Phi \approx \Phi_0 \mathrm{e}^{-\frac{e_2 m_s^2}{3H_0} t} \approx \Phi_0 \gg 1. \tag{3.19}$$

Заметим, что вследствие (3.7) условие (3.18) гораздо слабее условия (3.8), поэтому инфляционное решение справедливо для времен гораздо больших комптоновских для скалярных бозонов:

$$t \ll t_c = \frac{\sqrt{3}|\Phi_0|}{m_s} \gg \frac{1}{m_s}. \tag{3.20}$$

3.2. Другое асимптотическое решение уравнения (3.6)

Отметим, что мы можем найти и другое асимптотическое решение уравнения (3.6) в приближении (3.8):

$$\ddot{\Phi} \gg m_s^2 \Phi \Rightarrow \tag{3.21}$$

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0 \Rightarrow$$

$$a^3 \dot{\Phi} = \mathrm{Const} \Rightarrow \dot{\Phi} = C/a^3(t), \tag{3.22}$$

полагая теперь

$$C \neq 0. \tag{3.23}$$

При этом согласно логике приближения необходимо отбросить массовый член и выражениях для плотности энергии и давления скалярного поля (3.3) и (3.4), тогда для скалярного поля справедливо предельно - жесткое уравнение уравнение состояния:

$$p_{(s)} = \varepsilon_{(s)}, \tag{3.24}$$

уравнение Эйнштейна в этом случае легко решается (теперь должно быть $e_1 = +1$), и мы получим:

$$a = a_1\ t^{1/3}; \quad \Phi = \phi_0 \ln|t| + C_0 \tag{3.25}$$

– a_1, ϕ_0, C_1 – произвольные константы, причем $\phi_0 \neq 0$.

Совершим теперь следующую итерацию, подставляя, опять-таки, масштабный фактор в исходное уравнение скалярного поля

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{t}\dot{\Phi} + m_s^2\Phi = 0. \tag{3.26}$$

Решая это уравнение получим с учетом массивного члена:

$$\Phi = C_1 \mathrm{J}_0(m_s t) + C_2 \mathrm{Y}_0(m_s t);\ (e_2 = +1); \tag{3.27}$$

$$\Phi = C_1 \mathrm{I}_0(m_s t) + C_2 \mathrm{K}_0(m_s t);\ (e_2 = -1), \tag{3.28}$$

где $\mathrm{J}_0(z), \mathrm{Y}_0(z), \mathrm{I}_0(z), \mathrm{K}_0(z)$ есть функции Бесселя, из них две первые действительного аргумента, две последние мнимого аргумента.

Используя асимптотику этих функций при малых значениях аргумента $z = m_s t \ll 1$, получим из (3.27), (3.28):

$$\Phi \approx C_1 + C_2 \frac{2}{\pi} \ln \frac{m_s t}{2};\ (e_2 = +1); \tag{3.29}$$

$$\Phi \approx C_1 + C_2 \ln \frac{2}{m_s t};\ (e_2 = +1), \tag{3.30}$$

т.е., при малых значениях $m_s t$ мы снова получаем решения (3.25). Поэтому решения (3.25) также являются асимптотическим решениями уравнений Эйнштейна и скалярного поля, полученными при одном и том же условии (3.8). Однако, космологическая ситуация разительно меняется. В первом случае мы имеем инфляционное решение (ускорение $\Omega = 1$) с сингулярностью в бесконечно отдаленном прошлом, во втором случае имеется решение с отрицательным ускорением $\Omega = -2$ и с сингулярностью в нулевой момент времени $t = 0$. Ситуация полностью определяется выбором константы в уравнении первого порядка (3.22). Это решение стандартного сценария, соответствующее постоянному значению скалярного поля (3.10) мы будем называть для краткости в дальнейшем *стандартным решением.*

Утверждение 2 *Стандартный космологический сценарий с инфляционным началом соответствует частному решению безмассового уравнения скалярного поля. При использовании общего решения этого уравнения инфляция исчезает, Вселенная имеет конечную историю, а ее ранняя стадия соответствует предельно жесткому уравнению состояния.*

Это наводит на мысль о неустойчивости стандартного решения.

3.3. Устойчивость стандартного решения

Рассмотрим возмущения стандартной модели, зависящие лишь от времени и вызываемые фактором массы m_s, которую будем считать величиной первого порядка малости:

$$a(t) = a_0(t)(1 + \delta(t)); \tag{3.31}$$

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \phi(t). \tag{3.32}$$

Подставляя (3.32) в уравнение скалярного поля (3.6) и разлагая полученное уравнение в ряд по малости ϕ, δ, m_s^2, получим уравнение:

$$\ddot{\phi} + 3H_0\dot{\phi} + e_2 m_s^2 \Phi_0 = 0, \tag{3.33}$$

решая которое, найдем (для упрощения записи мы положили $\Phi_0 > 0, e_2 = +1$):

$$\phi = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3H_0 t} - \Phi_0 \frac{m_s}{\sqrt{3}} t,$$

причем мы должны положить $C_1 = 0$, так как учет этого члена приводит лишь к переопределению Φ_0. Таким образом:

$$\phi = C_2 \mathrm{e}^{-3H_0 t} - \Phi_0 \frac{m_s}{\sqrt{3}} t. \tag{3.34}$$

Возмущение уравнения Эйнштейна в линейном по δ приближении приводит к уравнению:

$$\dot{\delta} = \frac{4\pi}{3H_0} \delta\varepsilon_{(s)}. \tag{3.35}$$

Из (3.3) видно, что возмущение плотности энергии квадратично по возмущениям ϕ и m_s^2. Подставляя решение (3.34) в уравнение (3.35) и производя элементарное интегрирование, мы видим, что это решение имеет форму:

$$\begin{gathered}\delta(t) = A_1 \mathrm{e}^{-6H_0 t} + \\ \mathrm{e}^{-3H_0 t}(A_2 + A_3 t + A_a t^2) + A_5 t^3,\end{gathered} \tag{3.36}$$

где A_i - некоторые конкретные ненулевые константы, значение которых не важно. Важным является то обстоятельство, что в начале инфляционной Вселенной (3.13), т.е., при $t \to -\infty$ главным членом в этом решении становится первый:

$$\delta \backsimeq A_1 \mathrm{e}^{-6H_0 t} \to \infty, \quad (t \to -\infty). \tag{3.37}$$

Таким образом, в бесконечном прошлом Вселенной относительное возмущение масштабного фактора, вызванное учетом массового члена в уравнении скалярного поля, стремится к бесконечности. Это означает неустойчивость инфляционного решения по отношению к фактору массы.
Утверждение 3 *Инфляционное решение уравнений Эйнштейна (3.11) – (3.12) неустойчиво по отношению к фактору массы: возмущения метрики и скалярного поля вырастают до бесконечности в бесконечном прошлом.*

Последнее утверждение означает, что этого бесконечно удаленного прошлого просто не существовало.

4. Гравитационные возмущения изотропной Вселенной

4.1. Общие соотношения

Обычно модели с начальной инфляцией рассматривают следующим образом:

$$g_{ik} = (g^0_{ik} + a^2 h_i k) dx^i dx^k, \tag{4.1}$$

где g^0_{ik} – метрика Фридмана, h_{ik} – гравитационные возмущения. При этом обычно из *эстетических соображений* полагается начало Вселенной вакуумным с уравнением состояния $\varepsilon + P = 0$, а гравитационные возмущения малыми ($h_{ik} \ll 1$), правда, обычно обходится стороной вопрос, в какой момент времени они малые. Для наших целей нам достаточно изучить поперечные гравитационные возмущения, т.е., гравитационные волны.

Метрику с поперечными гравитационными возмущениями запишем в виде:

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2); \tag{4.2}$$

$$ds^2 = ds_0^2 + a^2(\eta) h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \tag{4.3}$$

$$h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} S(\eta) \mathrm{e}^{i\mathbf{nr}}, \tag{4.4}$$

где $S(\eta)$ – амплитуда гравитационных волн. Далее:

$$h^\alpha_\beta = h_{\gamma\beta} g_0^{\alpha\gamma} \equiv -\frac{1}{a^2} h_{\alpha\beta}; \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}h \equiv h^\alpha_\alpha \equiv g_0^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} \equiv \\ -\frac{1}{a^2}(h_{11} + h_{22} + h_{33}),\end{gathered} \tag{4.6}$$

причем для гравитационных волн

$$h^\alpha_\beta n_\alpha = 0; \qquad (4.7)$$

$$h = 0. \qquad (4.8)$$

Вследствие (1.7) в линейном по h приближении:

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{-g_0} = a^4. \qquad (4.9)$$

Согласно общему подходу рассмотрим безмассовое конформно неинвариантное скалярное поле ($m_s = 0$) и $\epsilon_1 = +1$:

$$\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi' - \partial_{\alpha\alpha}\Phi = 0 \qquad (4.10)$$

($' \equiv \partial_\eta$) и его невозмущенное решение:

$$\Phi = \Phi_0 = \mathrm{Const}. \qquad (4.11)$$

Таким образом, вследствие (1.8) в линейном приближении гравитационные волны не влияют на скалярное поле. выпишем формулы для инфляционного решения уравнения Эйнштейна в этом случае с помощью временной переменной η:

$$\begin{gathered}
a = \mathrm{e}^{\Lambda t} \Rightarrow d\eta = \frac{dt}{a(t)} \Rightarrow \\
\eta - \eta_0 = -\mathrm{e}^{-\Lambda t} + \mathrm{e}^{-\Lambda t_0}; \\
a = \mathrm{e}^{\Lambda t} = \frac{1}{-\eta + \eta_0 + \mathrm{e}^{-\Lambda t_0}}; \\
(\eta_0 + \mathrm{e}^{-\Lambda t_0} = 0) \Rightarrow \\
a(\eta) = -\frac{1}{\eta}, \quad \eta < 0; \qquad (4.12)
\end{gathered}$$

В этой временной переменной космологической сингулярности $a(\eta) = 0$ соответствует значение $\eta_0 = -\infty$, а бесконечно удаленному будущему $\eta_{+\infty} = -0$:

$$a(\eta_0) = 0 \Leftrightarrow \eta_0 = -\infty; \qquad (4.13)$$

$$a(\eta_\infty) = \infty \Leftrightarrow \eta_\infty = -0. \qquad (4.14)$$

4.2. Уравнение для амплитуды гравитационных волн

Полагая для определенности:

$$\mathbf{n} = n\delta^\alpha_3;\ h_{12} = 0;\ h_{11} = -h_{22} = S(\eta)\mathrm{e}^{inz}, \qquad (4.15)$$

и разлагая тензор Эйнштейна по малости амплитуды гравитационной волны S, в линейном по S приближении получим единственные нетривиальные компоненты:

$$\begin{gathered}
\delta G_{11} = -\delta G_{22} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\mathbf{nr}} \times \\
\left[S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S\left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a}\right)\right] \qquad (4.16)
\end{gathered}$$

Подставляя выражение для потенциала (3.12) в выражение (4.17) для тензора энергии-импульса скалярного поля, найдем в линейном приближении:

$$T^{(s)}_{\alpha\beta} = \frac{e_1e_2}{8\pi}m_s^2a^2h_{\alpha\beta}\Phi_0^2. \qquad (4.17)$$

Таким образом, в линейном приближении с учетом инфляционного решения (4.12) получим уравнение на амплитуду гравитационных волн ($e_1e_2 = 1$, $a_1 = 1$):

$$S'' + \frac{2}{\eta}S' + \left(n^2 - \frac{6}{\eta^2} - \frac{6H_0^2}{\eta^2}\right)S = 0. \qquad (4.18)$$

$$S(\eta) = \frac{C_1}{\sqrt{\eta}} \mathrm{Y}_\mu(|n|\eta) + \frac{C_2}{\sqrt{\eta}} \mathrm{J}_\mu(|n|\eta), \tag{4.19}$$

где:

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 24H_0^2}. \tag{4.20}$$

В частности, вблизи космологической сингулярности $\eta \to -\infty$, стало быть, и $|\mathbf{n}\eta| \to \infty$ уравнение (1.26) сводится к уравнению:

$$S'' + n^2 S = 0, \tag{4.21}$$

имеющему своим решением обычные ВКБ-решения:

$$S = C_1 e^{in\eta} + C_2 e^{-in\eta}, \tag{4.22}$$

которые, кстати, можно получить и из точного решения (4.19) в этом пределе.

4.3. Энергия-импульс гравитационных волн

Вычисляя псевдотензор Ландау - Лифшица [1] и усредняя его по направлениям, получим для энергии - импульса гравитационных волн:

$$\mathfrak{T}^{ik} = \frac{1}{a^2}(\mathcal{E}_{gw} + P_{gw})\delta^i_4 \delta^k_4 - P_{gw} g^{ik}, \tag{4.23}$$

$$\mathcal{E}_{gw} = -\frac{1}{16\pi}\frac{S^2 n^2}{a^2} - \frac{3}{32\pi}\frac{S'^{\,2}}{a^2} + \frac{5}{8\pi}\frac{SS'a'}{a^3}; \tag{4.24}$$

$$P_{gw} = \frac{1}{96\pi}\frac{S^2 n^2}{a^2} + \frac{13}{12\pi}\frac{SS'a'}{a^3} - \frac{17}{12\pi}\frac{S^2 a'^{\,2}}{a^4}, \tag{4.25}$$

а также:

$$\mathfrak{T} = \mathcal{E}_{gw} - 3P_{gw} = -\frac{3}{32\pi}\frac{S'^{\,2} + S^2 n^2}{a^2} - \frac{21}{8\pi}\frac{SS'a'}{a^3} + \frac{17}{4\pi}\frac{S^2 a'^{\,2}}{a^4}. \tag{4.26}$$

Подставляя в эти формулы инфляционное решение (4.12), получим:

$$\mathcal{E}_{gw} = -\frac{1}{32\pi}\eta^2(3S'^{\,2} + 2S^2n^2) - \frac{5}{8\pi}SS'\eta; \tag{4.27}$$

$$P_{gw} = \frac{1}{96\pi}S^2 n^2 \eta^2 - \frac{13}{12\pi}SS'\eta - \frac{17}{12\pi}S^2, \tag{4.28}$$

Таким образом, вблизи космологической сингулярности $\eta \to \infty$ получим из (4.27) – (4.28):

$$\mathcal{E}_{gw} \backsimeq -\frac{1}{32\pi}\eta^2(3S'^{\,2} + 2S^2n^2); \tag{4.29}$$

$$P_{gw} \backsimeq \frac{1}{96\pi}S^2 n^2 \eta^2, \tag{4.30}$$

При подстановке сюда решения (1.31), получим:

$$P_{gw} \approx \frac{1}{3}\mathcal{E}_{gw} \approx \frac{1}{96\pi}S^2 n^2 \eta^2. \tag{4.31}$$

Утверждение 4 *Таким образом, вблизи космологической сингулярности плотность энергии «слабых» гравитационных волн стремится к бесконечности с ультрарелятивистским уравнением состояния. Следовательно, согласно результатам раздела 2 начало такой Вселенной является ультрарелятивистским, а не инфляционным, а сама Вселенная имеет начало в конечном логарифмическом прошлом (2.28). Таким образом, модель Вселенной с начальной инфляцией неустойчива даже к слабым поперечным гравитационным возмущениям.*

5. Заключение

Таким образом, мы показали, что модели Вселенной с первоначальной инфляцией физически неустойчивы. Эта неустойчивость проявляется в трех видах:

1. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к добавлениям малых примесей физической материи с уравнением состояния, отличающегося от инфляционного $\varepsilon + P = 0$. При этом Вселенная *приобретает* начало в конечном прошлом, а масштабный фактор в начале истории Вселенной растет по степенному закону, постепенно переходя на экспоненциальный;

2. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к вырожденному решению с постоянным скалярным полем. При правильном решении полевых уравнений возникает Вселенная с конечным началом;

3. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к поперечным гравитационным возмущениям, которые на ранних стадиях дают ультрарелятивистскую добавку в энергию-импульс, что приводит к уничтожению де-Ситтеровской стадии эволюции.

При этом необходимо отметить, что достаточно ранняя инфляция (на временах порядка $10^3 \div 10^4$ планковских времен) при этом имеет место быть (см. цитированные работы Автора и его коллег).

В заключении Автор выражает благодарность членам ВС - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yu.G. Ignat'ev, Russ. Phys.J., 55, 166 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc] .

2. Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), Russ. Phys.J., 55, 550 (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].

3. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), Russ. Phys.J., 55, 1345 (2013); arXiv:1307.2509[gr-qc].

4. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev, Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 20, No 4, 2014;arXiV:1408.3404v1 [gr-qc].

5. Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev, Grav. and Cosmol., to be publish in vol. 20, No 4, 2014; arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].

6. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971.

7. A. Starobinsky, Proc. Internat. School on Gravitation and Cosmology, «Gracos-2014», Ed. prof. Yu. Ignat'ev, Russia, Kazan Federal University, pp. 48–59, 2014.

Поступила в редакцию 12.03.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev
Physical Instability Inflationary Model of the Universe (de Sitter) Start

Keywords: De Sitter universe, instability, finite lifetime

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Proved unsustainable physical universe with de Sitter start. It is shown that a small admixture of ultra-matter makes the universe de Sitter universe in the ultra beginning to end. the volatility a permanent solution to the equations of the scalar field. It is shown that the transverse gravitational perturbations such a model makes it unstable near cosmological singularity.

REFERENCES

[1] Yu.G. Ignat'ev, *Russ. Phys.J.*, 55, 166 (2012); arXiv:1307.1787v1 [gr-qc] .

[2] Yu. G. Ignatiev (Ignat'ev), *Russ. Phys.J.*, 55, 550 (2012); arXiv:1307.2472 [gr-qc].

[3] Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), *Russ. Phys.J.*, 55, 1345 (2013); arXiv:1307.2509[gr-qc].

[4] Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev) and D.Yu. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be published in vol. 20, No 4, 2014;arXiV:1408.3404v1 [gr-qc].

[5] Yu.G. Ignatyev (Ignat'ev), A.A. Agathonov and D.Yu. Ignatyev, *Grav. and Cosmol.*, to be published in vol. 20, No 4, 2014; arXiV:1408.3419v1 [gr-qc].

[6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971.

[7] A. Starobinsky, *Proc. Internat. School on Gravitation and Cosmology*, «Gracos-2014», Ed. prof. Yu. Ignat'ev, Russia, Kazan Federal University, pp. 48–59, 2014.

Received 12.03.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru