УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ КОСМОЛОГИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Построена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию макроскопически однородной изотропной Вселенной, заполненной гравитационным излучением в модели Эйнштейна с космологическим членом. Получено асимптотическое решение космологических уравнений в ВКБ-приближении, описывающее переход с ультрарелятивистской фазы расширения на инфляционную.

Ключевые слова: Макроскопическая гравитация, уравнения космологической эволюции, ВКБ-приближение

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Гравитационные возмущения изотропной Вселенной

1.1. Общие соотношения

Метрику с поперечными гравитационными возмущениями запишем в виде (см., например, [1]):

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2); \tag{1.1}$$
$$ds^2 = ds_0^2 + a^2(\eta)h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta; \tag{1.2}$$
$$h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}S(\eta)\mathrm{e}^{i\mathbf{nr}}, \tag{1.3}$$

где $S(\eta)$ – амплитуда гравитационных волн. Далее:

$$h^\alpha_\beta = h_{\gamma\beta}g_0^{\alpha\gamma} \equiv -\frac{1}{a^2}h_{\alpha\beta}; \tag{1.4}$$
$$h \equiv h^\alpha_\alpha \equiv g_0^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{a^2}(h_{11} + h_{22} + h_{33}), \tag{1.5}$$

причем для гравитационных волн

$$h^\alpha_\beta n_\alpha = 0; \tag{1.6}$$
$$h = 0. \tag{1.7}$$

Вследствие (1.7) в линейном по h приближении:

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{-g_0} = a^4. \tag{1.8}$$

Будем решать уравнения Эйнштейна с космологическим членом[2]:

$$G_{ik} - \lambda g_{ik} = 0, \tag{1.9}$$

где $G_{ik} = R_{ik} - 1/2Rg_{ik}$ – тензор Эйнштейна. Будем разлагать в ряд тензор Эйнштейна по малости амплитуды гравитационных волн $S(\eta)$. При этом, пользуясь изотропией невозмущенной метрики, удобно ввести локальную систему координат, в которой:

$$\mathbf{n} = n(0, 0, 1); \quad \mathbf{s} = (1, 0, 0), \tag{1.10}$$

где $\mathbf{s}$ - единичный вектор поляризации поперечных возмущений. В этой системе координат

$$h_{12} = 0; \ h_{11} = -h_{22} = S(\eta)\mathrm{e}^{inz}, \tag{1.11}$$

[1] E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2] В этой статье тензор Риччи определен сверткой тензора кривизны по первому и третьему индексам, сигнатура метрики $(- - - +)$.

В произвольной декартовой системе координат трехмерного евклидова пространства E_3 тензор поляризации e_{ik} формулы (1.5) имеет вид:

$$e_{\alpha\beta} = 2s_\alpha s_\beta + \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2} - \delta_{\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

$$\mathbf{s}^2 = 1; \quad \mathbf{sn} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = n^2. \tag{1.13}$$

Легко проверить, что при этом автоматически выполняется калибровочное условие (1.6).

Запишем уравнения Эйнштейна с космологическим членом во втором приближении по гравитационном возмущениям:

$$G^{(0)}_{ik} + G^{(1)}_{ik} + G^{(2)}_{ik} = \lambda g_{ik} \tag{1.14}$$

и усредним эти уравнения по всем направлениям волнового вектора $\mathbf{n}$[3]

$$\overline{h_{\alpha\beta}} = 0. \tag{1.15}$$

Таким образом, мы получим макроскопические уравнения Эйнштейна во втором порядке по возмущениям гравитационного поля:

$$G^{(0)}_{ik} = -\overline{G^{(2)}_{ik}} + \lambda g^{(0)}_{ik}, \tag{1.16}$$

согласно которым поправки второго порядка можно рассматривать как тензор энергии-импульса гравитационных возмущений:

$$T_{ik} = -\frac{1}{8\pi}\overline{G^{(2)}_{ik}}. \tag{1.17}$$

Заметим, что на фоне изотропного пространства Фридмана операция усреднения по направлениям сводится к вычислению интеграла по двумерной сфере радиуса n:

$$\overline{\phi(n,\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi}\int \phi(\mathbf{n},\mathbf{r})d\Omega_n. \tag{1.18}$$

Разлагая тензор Эйнштейна по возмущениям метрики, в нулевом приближении получим известные выражения:

$$G^{(0)}_{11} = G^{(0)}_{22} = G^{(0)}_{33} = 2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}; \tag{1.19}$$

$$G^{(0)}_{44} = 3\frac{a'^2}{a^2}. \tag{1.20}$$

Таким образом, в нулевом по гравитационным возмущениям приближении мы получили бы стандартное уравнение Эйнштейна с λ - членом

$$\frac{a''}{a^4} = \frac{1}{3}\lambda \tag{1.21}$$

и его инфляционное решение:

$$a = -\frac{1}{\eta}\sqrt{\frac{3}{\lambda}}. \tag{1.22}$$

1.2. Уравнение для амплитуды гравитационных волн

В линейном по S приближении получим единственные нетривиальные компоненты:

$$G^{(1)}_{11} = -G^{(1)}_{22} \equiv \delta G = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\mathbf{nz}}\left[S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S\left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a}\right)\right]. \tag{1.23}$$

Ковариантно обобщая результат в E_3, запишем:

$$G^{(1)}_{\alpha\beta} = (\delta_{\alpha\beta} - 2s_\alpha s_\beta)\delta G. \tag{1.24}$$

[3]Можно было бы также усреднить и по всем длинам волновых векторов, но эта операция не дает дополнительной информации. О процедуре усреднения и получения макроскопических уравнений Эйнштейна см. [2, 3].

Подставляя выражение (1.23) в уравнения Эйнштейна (1.9), получим уравнение для амплитуды поперечных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S\left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a} + \lambda a^2\right) = 0. \tag{1.25}$$

Это уравнение с учетом соотношений (1.19) можно записать в более простом виде:

$$S'' + \frac{2}{\eta}S' + (n^2 - 2G^{(0)}_{11} + \lambda a^2)S = 0. \tag{1.26}$$

В частности, при подстановке сюда инфляционного решения нулевого приближения уравнений Эйнштейна (1.22) уравнение (1.26) сводится к следующему:

$$S'' - 2\frac{S'}{\eta} + S\left(n^2 - \frac{3}{\lambda\eta^2}\right) = 0, \tag{1.27}$$

которое имеет своим решением:

$$S = C_1\eta^{3/2}\mathrm{J}_\mu(n\eta) + C_1\eta^{3/2}\mathrm{Y}_\mu(n\eta), \tag{1.28}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3 + 4/\lambda}. \tag{1.29}$$

В частности, вблизи космологической сингулярности нулевого приближения $\eta \to -\infty$, стало быть, и $|\mathbf{n}\eta| \to \infty$ уравнение (1.26) сводится к уравнению:

$$S'' + n^2 S = 0, \tag{1.30}$$

имеющему своим решением обычные ВКБ-решения:

$$S = C_1 e^{in\eta} + C_2 e^{-in\eta}, \tag{1.31}$$

которые, кстати, можно получить и из точного решения (1.28) в этом пределе.

1.3. Второе приближение

Вычисляя тензор Эйнштейна второг приближения, получим его нетривиальные компоненты:

$$G^{(2)}_{11} = G^{(2)}_{22} = \mathrm{e}^{2inz}\left(\frac{5}{4}S^2n^2 + SS'' + \frac{1}{4}S'^2 + 2\frac{a'}{a}SS'\right), \tag{1.32}$$

$$G^{(2)}_{33} = \mathrm{e}^{2inz}\left(\frac{1}{4}S^2n^2 + SS'' + \frac{3}{4}S'^2 + 2\frac{a'}{a}SS'\right), \tag{1.33}$$

$$G^{(2)}_{44} = -\mathrm{e}^{2inz}\left(\frac{7}{4}S^2n^2 + \frac{1}{4}S'^2 + 2\frac{a'}{a}SS'\right). \tag{1.34}$$

Ковариантно обобщая результат в E_3, запишем:

$$G^{(2)}_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{2i\mathbf{nr}}\big(U\delta_{\alpha\beta} - V\frac{n_\alpha n_\beta}{n^2}\big), \tag{1.35}$$

где

$$U = \frac{5}{4}S^2n^2 + SS'' + \frac{1}{4}S'^2 + 2\frac{a'}{a}SS'; \tag{1.36}$$

$$V = S^2n^2 - \frac{1}{2}S'^2. \tag{1.37}$$

Усредняя (1.35) по направлениям распространения возмущений с учетом очевидного равенства

$$\overline{n_\alpha n_\beta} \equiv \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}n^2, \tag{1.38}$$

получим для усредненных компонент $G_{ik}^{(2)}$ следующее выражение:

$$\overline{G_{ik}^{(2)}} = 8\pi(\mathcal{E}+\mathcal{P})u_i u_k - 8\pi\mathcal{P}g_{ik}, \tag{1.39}$$

где u^i - времениподобный вектор скорости наблюдателя, а $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ – плотность энергии и давление поперечных гравитационных возмущений:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi a^2}\left(\frac{7}{4}S^2n^2 + \frac{1}{4}S'^2 - 2\frac{a'}{a}SS'\right) \tag{1.40}$$

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{8\pi a^2}\left(\frac{11}{12}S^2n^2 + \frac{5}{12}S'^2 + 2SS'\frac{a'}{a} + SS''\right) \tag{1.41}$$

В частности, для ВКБ-решения (1.31) эти формулы приводят к эффективному ультрарелятивистскому уравнению состояния:

$$\mathcal{E} \approx \frac{3}{16\pi a^2}S^2n^2; \tag{1.42}$$

$$\mathcal{P} \approx \frac{1}{16\pi a^2}S^2n^2 = \frac{1}{3}\mathcal{E}. \tag{1.43}$$

2. Макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка по гравитационным возмущениям для Вселенной Фридмана

Объединяя полученные результаты в рамках уравнений (1.14) и (1.16), получим самосогласованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих космологическую эволюцию пространственно плоской макроскопической Вселенной с учетом поперечных гравитационных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + S\left(n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 4\frac{a''}{a} + \lambda a^2\right) = 0; \tag{2.1}$$

$$3\frac{a'^2}{a^2} = \frac{7}{4}S^2n^2 + \frac{1}{4}S'^2 - 2\frac{a'}{a}SS' + \lambda a^2. \tag{2.2}$$

При этом уравнение (2.1) описывает космологическую эволюцию скалярной амплитуды $S(\eta)$ гравитационных возмущений, а уравнение (2.2) описывает космологическую эволюцию масштабного фактора $a(\eta)$. При этом эволюционное уравнение для гравитационных возмущений является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка относительно амплитуды этих возмущений.

Заметим, что если вместо монохроматичных возмущений (1.3) имеется спектр возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e_{\alpha\beta}(\mathbf{n})\left[S_n(\eta)\mathrm{e}^{-i\mathbf{nr}} + S_n^*(\eta)\mathrm{e}^{-i\mathbf{nr}}\right]d^3\mathbf{n}, \tag{2.3}$$

то в в эволюционном уравнении для возмущений (2.1) необходимо сделать замену $S \to S_n$, а в эволюционном уравнении для масштабного фактора (2.2) необходимо использовать выражения для средних:

$$n^2S^2 \to \overline{n^2S^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty S_nS_n^*n^2dn; \tag{2.4}$$

$$S'^2 \to \overline{S'^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty S'_nS_n^{*\prime}dn; \tag{2.5}$$

$$S'S \to \overline{S'S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{2}(S'_nS_n^* + S_nS_n^{*\prime})dn. \tag{2.6}$$

3. Асимптотическое решение эволюционного уравнения для возмущений

Заметим, что с помощью масштабного преобразования амплитуды S

$$S = \frac{\phi}{a} \tag{3.1}$$

в уравнении (2.1) можно избавиться от первой производной:

$$\phi'' + Q(n,\eta)\phi = 0, \tag{3.2}$$

где

$$Q(n,\eta) = n^2 + 2\frac{a'^2}{a^2} - 5\frac{a''}{a} + \lambda a^2. \tag{3.3}$$

Рассмотрим асимптотику решений этого уравнения, полагая

$$n \gg 1; \quad Q(n,\eta) > 0. \tag{3.4}$$

Используя теорему [4] об асимптотическом решении уравнения (3.2), запишем его асимптотические независимые решения:

$$\phi(\eta) \sim Q(n,\eta)^{-1/4} \exp\left\{\pm i\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n,\eta')}d\eta'\right\} \equiv Q(n,\eta)^{-1/4} \mathrm{e}^{\pm i\Phi(n,\eta)}, \tag{3.5}$$

а также асимптотические значения производных (с учетом уравнения (3.3)):

$$\phi'(\eta) \sim \pm iQ(n,\eta)^{1/4} \exp\left\{\pm i\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n,\eta')}d\eta'\right\} \equiv \pm iQ(n,\eta)^{1/4} \mathrm{e}^{\pm i\Phi(n,\eta)}; \tag{3.6}$$

$$\phi''(\eta) \sim -Q(n,\eta)^{3/4} \exp\left\{\pm i\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{Q(n,\eta')}d\eta'\right\} \equiv -Q(n,\eta)^{3/4} \mathrm{e}^{\pm i\Phi(n,\eta)}. \tag{3.7}$$

Далее, для нас важен в дальнейшем тот факт, что, фактически, квадратичные по амплитуде члены, входящие в правую часть эволюционного уравнения (2.1), вычисляются как квадрат модуля комплексной переменной, т.е., $S^2 = SS^*$, где S и S^* есть две независимые асимптотики (3.5). Таким образом:

$$\begin{aligned} S^2 \to SS^* \equiv \frac{\phi\phi*}{a^2};\ S'^2 \to S'S^{*\prime} = \frac{\phi'\phi^{*\prime}}{a^2} - (\phi\phi^{*\prime} + \phi'\phi*)\frac{a'}{a^2} + \phi\phi^*\frac{a'^2}{a^4} \equiv \frac{\phi'\phi^{*\prime}}{a^2} + \phi\phi^*\frac{a'^2}{a^4}; \\ SS' \to \frac{1}{2}(S'S^* + SS^{*\prime}) = \frac{1}{2a^2}(\phi'\phi^* + \phi\phi^{*\prime}) - \frac{a'}{a^3}\phi\phi^* \equiv -\frac{a'}{a^3}\phi\phi^*. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Вычисляя, найдем:

$$S^2 \simeq \frac{S_0^2}{a^2(\eta)\sqrt{Q(n,\eta)}};\ S'^2 \simeq S_0^2\frac{\sqrt{Q(n,\eta)}}{a^2} + S_0^2\frac{a'^2}{a^4(\eta)\sqrt{Q(n,\eta)}};\ SS' \simeq -\frac{S_0^2}{a^2(\eta)\sqrt{Q(n,\eta)}}\frac{a'}{a}, \tag{3.9}$$

где S_0 – константа.

Подставляя эти выражения в уравнение эволюции маштабного фактора (2.2), получим окончательно макроскопическое уравнение эволюции в асимптотическом приближении:

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \lambda = \frac{S_0^2}{a^4}\left(\frac{7}{4}\frac{n^2}{\sqrt{Q(n,\eta)}} + \frac{1}{4}\sqrt{Q(n,\eta)} + \frac{9}{4}\frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{Q(n,\eta)}}\right). \tag{3.10}$$

Таким образом, мы получили замкнутое обыкновенное существенно нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка[4], асимптотически точно описывающее макроскопическую космологическую эволюцию Вселенной, заполненной слабыми поперечными гравитационными возмущениями. В принципе, это уравнение можно исследовать методами качественной теории дифференциальных уравнений. К этому вопросу мы намерены вернуться в дальнейших публикациях. Пока же рассмотрим ВКБ-приближение уравнения (3.10).

[4] напомним, что функция $Q(n,\eta)$ зависит от a, a', a''

4. ВКБ-решение эволюционного уравнения для масштабного фактора

Рассмотрим теперь следующее ВКБ-приближение эволюционных уравнений:

$$n \gg \frac{a'}{a}; \quad n^2 \gg \frac{a''}{a} \Rightarrow n\eta \gg 1. \tag{4.1}$$

В этом приближении

$$Q(n,\eta) \approx n^2, \tag{4.2}$$

уравнение (3.10) примет предельно простой вид:

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \lambda = \frac{2S_0^2 n}{a^4} \tag{4.3}$$

Решение этого уравнения можно записать в элементарных функциях, переходя к физическому времени t, так что $ad\eta = dt$. Проводя элементарное интегрирование, получим:

$$a(t) = \left(\frac{2S_0^2 n}{\lambda}\right)^{1/4} \sqrt{\sinh\left(2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t\right)}. \tag{4.4}$$

Решение такого вида было получено ранее Автором (см., например, [5]). Это решение описывает плавный переход с ультрарелятивистской стадии расширения Вселенной на инфляционную стадию.

5. Заключение

This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

В заключении Автор выражает благодарность членам ВС - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971

2. Yu.G. Ignat'ev, Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field // Grav. and Cosmol., **13**, 59-81 (2007).

3. Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

4. Федорук М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения // М: Лань. – 2003. – 448с.

5. Yu. G. Ignat'ev. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe // Russian Physics Journal, Vol. 56, No. 6, November, 2013. – p. 693-706; DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4

Поступила в редакцию 12.03.2015

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань,ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Macroscopic Cosmology of Yearly Universary

Keywords: Macroscopic gravity equation cosmological evolution, WKB approximation

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

A closed system of ordinary differential equations describing the cosmological evolution macroscopically homogeneous isotropic universe filled with gravitational radiation in Einstein model with a cosmological term. An asymptotic solution of the cosmological equations in the WKB approximation, describes the transition from the phase of ultra-inflationary expansion.

REFERENCES

[1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Pergamon Press. Oxford· New York· Toronto· Sydney· Paris· Frankfurt, 1971.

[2] Yu.G. Ignat'ev, *Grav. and Cosmol.*, **13**, 59–81 (2007).

[3] Yurii G. Ignatyev (Ignat'ev). *Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields*. Kazan, Foliant-Press, – 2010; http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf.

[4] Fedoruk M.V. *Ordinar Differential Equations*. Moscow, Lan'. – 2003. – 448 p. (In Russian)

[5] Yu. G. Ignat'ev. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe, *Russian Physics Journal*, Vol. 56, No. 6, November, 2013. – p. 693–706; DOI: 10.1007/s11182-013-0087-4.

Received 12.03.2015

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics , Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru