УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев[1]

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И КОСМОЛОГИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ. I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ [2]

Рассмотрена корректная процедура статистического усреднения локальных возмущений гравитационного поля по независимым степеням свободы возмущений во втором порядке теории возмущений, на основе которой построена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию макроскопически однородной изотропной Вселенной, заполненной гравитационным излучением, как в модели Эйнштейна с космологическим членом, так и без него.

Ключевые слова: макроскопическая гравитация, уравнения космологической эволюции, ВКБ-приближение.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Введение

В [1], [2] на основе усреднения микроскопических локальных флуктуаций гравитационного поля вокруг метрики Фридмана во втором порядке теории возмущений были получены макроскопические уравнения Эйнштейна, найдено точное решение полученных уравнений в ВКБ-приближении, аналитически описывающее переход с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную. В более поздней работе [3] с помощью более строгой операции усреднения результаты предыдущих работ были уточнены в численном отношении.

Рассмотрим самосогласованную систему уравнений Эйнштейна и массивного скалярного поля Φ с массой квантов m[3,4]:

$$G^i_k \equiv R^i_k - \frac{1}{2}R\delta^i_k = T^i_k(g,\Phi) + \Lambda g_{ik}, \tag{1}$$

$$\Box\Phi + m^2\Phi = 0, \tag{2}$$

где Λ – космологическая постоянная, которую мы добавили для общности,

$$\Box\Phi = g^{ik}\Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\Phi \tag{3}$$

– оператор Д'Аламбера и

$$T^i_k = 2\Phi^{,i}\Phi_{,k} - \delta^i_k\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \delta^i_k m^2\Phi^2 \tag{4}$$

– тензор энергии-импульса скалярного поля. Уравнения (1) – (2) в дальнейшем для краткости будем называть просто – *уравнениями поля.* Эта система уравнений является простейшей математической моделью космологии ранней Вселенной, которая в той или иной модификации является базовой моделью инфляции в огромном количестве работ.

В работе [4] было показано, что, во-первых, космологическая модель с де-Ситтеровским началом является физически неустойчивой по отношению к добавлению к тензору энергии-импульса любой материальной добавки, во-вторых, модель с инфляционным началом, основанная на модели с постоянным скалярным полем вблизи сингулярности, неустойчива в смысле Ляпунова и, наконец, в-третьих, эта модель гравитационно неустойчива по отношению к первичным слабым гравитационным волнам, которые являются необходимым элементом так называемой «квантовой

[1] E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

[2] This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

[3] В этой статье всюду $G = \hbar = c = 1$, сигнатура метрики $(-,-,-,+)$, тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индексов.

[4] В отличие от предыдущих работ мы будем рассматривать здесь уравнения Эйнштейна для смешанных компонент, форма которых оказывается более компактной.

космологии»[5]. Поскольку, как известно, во-первых, все космологические модели имеют сингулярность во временной шкале, когда масштабный фактор обращается в нуль, а, во-вторых, амплитуда коротковолновых поперечных гравитационных возмущений падает обратно пропорционально масштабному фактору [6], [7], то локальные гравитационные флуктуации метрики велики вблизи космологической сингулярности и могут оказать существенное влияние на эволюцию ранней Вселенной. Поэтому важное значение приобретают исследования, направленные на создание адекватной макроскопической модели гравитации. В этой работе мы опишем метод статистического усреднения гравитационных полей по локальным гравитационным флуктуациям и применим его к формулированию и исследованию макроскопической модели ранней Вселенной.

1. Самосогласованный статистический подход к описанию локальных флуктуаций метрики

1.1. Метод самосогласованного поля

Статистическую теорию получения *макроскопических уравнений Эйнштейна* можно развить по аналогии с теорией многих частиц в рамках подхода *самосогласованного поля*, первоначально возникшего в небесной механике, а затем примененного в теории многих частиц (P. Weiss, 1907; I. Langmuir, 1913; L. Thomas, 1927; E. Fermi, 1928; D. Hartree, 1928; В. А. Фок, 1930). Особую роль в развитии метода самосогласованного поля принадлежит советскому физику-теоретику Анатолию Александровичу Власову, который в своих фундаментальных работах (1938) [10][6] впервые дал глубокий анализ физических свойств заряженных частиц плазмы, показал неприменимость к описанию плазмы газокинетического уравнения Больцмана и предложил новое кинетическое уравнение плазмы (уравнение Власова), описывающее коллективное взаимодействие частиц плазмы через самосогласованное поле. В дальнейшем теория Власова была уточнена в статье Л. Д. Ландау[7] (1946), а затем строго обоснована и обобщена в работах Н. Н. Боголюбова (1946) и блестяще приложена им к квантовой статистике и теории сверхтекучести (1947). Следует отметить классическую монографию Чандрассекара [13] (1942), в которой на основе метода самосогласованного поля были сформулированы принципы звездной динамики и фактически построена теория образования галактических структур.

Согласно методу самосогласованного поля движение отдельной частицы можно описать как движение в суммарном усредненном поле остальных частиц системы, пренебрегая влиянием одной частицы на динамику системы. Условиями применимости метода самосогласованного поля являются дальнодействующий характер межчастичных взаимодействий и большое число взаимодействующих частиц $N \gg 1$. Аналогично можно рассматривать метод самосогласованного поля применительно к нелинейным чисто полевым системам. При этом роль одной частицы играет отдельная малая полевая мода, характеризуемая некоторыми полевыми степенями свободы, а условием применимости метода самосогласованного поля является дальнодействующий характер поля и большое число его степеней свободы. Этим условиям как нельзя лучше соответствует гравитационное взаимодействие: закон сохранения полной энергии-массы и отсутствие отрицательных «гравитационных зарядов» гарантирует его дальнодействующий характер, а большое число степеней свободы заложено в самой полевой природе взаимодействия. Поэтому мы имеем право рассматривать системы с гравитационным взаимодействием методом самосогласованного поля, в котором каждая микроскопическая мода гравитационного возмущения мала, тогда как макроскопическое самосогласованное гравитационное поле велико.

1.2. Усреднение локальных флуктуаций метрики

Предположим, что точную микроскопическую метрику риманова пространства - времени V_4 можно записать в форме [15, 20]:

$$g_{ik}(x) = \overline{g_{ik}(x)} + \delta g_{ik}(x), \tag{1.1}$$

где $\overline{g}_{ik}(x)$ – некоторая средняя макроскопическая метрика, соответствующая макроскопическому

[5] См. например обзор [5].
[6] См. также [11], [12].
[7] Так называемое «затухание Ландау», связанное с неучтенным в работе Власова полюсом в решении бесстолкновительного кинетического уравнения.

пространству - времени $\bar{V}_4$, а $\delta g_{ik}(x)$ – малые микроскопические флуктуации метрики, так что

$$\overline{\delta g_{ik}\delta g^{jk}} \ll 1, \tag{1.2}$$

и

$$\overline{\delta g_{ik}} = 0. \tag{1.3}$$

Чертой сверху мы обозначаем здесь и в дальнейшем некоторую операцию усреднения метрики и сопутствующих ей величин, пока не конкретизируя ее. Заметим лишь, что эта операция является весьма деликатной процедурой, существенно зависящей от способа измерения (детали см. в [15, 20]). Заметим также, что «пионерские» методы статистического усреднения метрики, применяемые некоторыми исследователями и заключающиеся в переносе методов классического усреднения путем интегрирования метрических величин по пространственному объему, в релятивистской гравитации явно не пригодны. Во-первых, как известно из римановой геометрии, результат интегрирования тензора по объему является неоднозначной операцией и не является тензорной величиной. Во-вторых, поскольку синхронизация наблюдений возможна лишь в синхронной системе отсчета, физический смысл результата интегрирования метрического тензора по объему также невозможно определить. В-третьих, макроскопический прибор, измеряющий метрику Вселенной, попросту, нереализуем. Поэтому, следуя методам, развитым в работах [15, 20], мы будем усреднять метрику по некоторым случайным величинам, например, волновым векторам, фазам колебаний и тому подобным. Так, например, в указанных работах метрика генерировалась массивными частицами, а ее усреднение проводилось по координатам этих частиц, не являющимися аргументами тензорных полей. Вообще же говоря, корректное усреднение метрики, как и других тензорных полей может быть осуществлено следующим образом. Из функционального анализа известна генеральная теорема о том, что любая функция в метрическом пространстве может быть разложена по *полному* ортогональному набору собственных функций линейного самосопряженного оператора этого пространства. Как известно, таким оператором в римановом пространстве является оператор Д'Аламбера (3). Поэтому мы можем определить этот набор собственными функциями оператора Д'Аламбера, являющимся самосопряженным линейным оператором на римановом V_4, отвечающими собственным значениям λ, следующим образом:

$$\overline{\Box}\psi_\lambda = \lambda, \tag{1.4}$$

где $\overline{\Box}$ – оператор Д'Аламбера, определенный на метрике $\overline{g_{ik}}$. Надо помнить, что на самом деле собственные функции $_\lambda$ определяются некоторым n-мерным набором чисел, $[l_1, l_2, \ldots, l_n]$, то есть, *вектором состояния* $\vec{\lambda} = [l_1, l_2, \ldots, l_n]$. По этому вектору состояния $\vec{\lambda}$ и следует проводить статистическое усреднение. Отметим, что такая процедура усреднения полностью адекватна и усреднению в квантовой теории поля. В частности, например, в декартовых координатах плоского трехмерного пространства таким полным ортогональным собственных функций являются $\mathrm{e}^{i\mathbf{kr}}$, а в сферических координатах – система, построенная на шаровых функциях: $\mathrm{J}_\nu(r)\mathrm{Y}^\nu_\lambda(\theta, \varphi)$. Поэтому в первом случае усреднение должно проводиться по случайным значениям волнового вектора, а во втором – по значениям чисел $\{\lambda, \mu, \nu\}$ – и в том, и в другом случаях указанные числа принимают бесконечное множество значений. При этом приходится налагать определенные требования на *функцию распределения* $f(x^i, \vec{\lambda})$, которые должны отражать макроскопические свойства симметрии усредняемых тензорных полей.

Надо понимать, что вместе с флуктуациями метрики существуют и сопутствующие им малые флуктуации физических полей, $\delta\phi_a$[8],

$$\phi_a = \overline{\phi}_a + \delta\phi_a, \tag{1.5}$$

так что

$$\overline{\delta\phi_a\delta\phi_a} \ll \overline{\phi^2_a}, \tag{1.6}$$

и

$$\overline{\delta\phi}_a = 0. \tag{1.7}$$

Усредняя уравнения Эйнштейна с помощью аналогичной процедуры, получим:

$$\overline{G^i_k(g)} = 8\pi\overline{T^i_k(g, \phi_a)} + \Lambda\delta^i_k. \tag{1.8}$$

[8]В рассматриваемом нами случае это единственное поле $\phi_a = \Phi(x)$, хотя сказанное справедливо и для любого числа физических полей любой природы.

Вследствие нелинейности тензора Эйнштейна и тензора энергии - импульса:

$$\overline{G^i_k(g)} \neq G^i_k(\overline{g}); \quad \overline{T^i_k(g,\phi_a)} \neq T^i_k(\overline{g},\overline{\phi_a}), \tag{1.9}$$

то есть, макроскопический источник не соответствует макроскопической метрике, как это имеет место в электродинамике.

Как в этом случае получить уравнения, определяющие макроскопическую метрику? Общие принципы усреднения микроскопической метрики в ВКБ-приближении и получении макроскопических уравнений Эйнштейна были изложены в работах Исааксона [8, 9] (1968), а затем применены для построения теории релятивистских статистических систем с гравитационным взаимодействием в работах Автора [14] (1983)[9]. В работах [17, 18] (1990) эта теория была применена к выводу кинетического уравнения для фотонов, распространяющихся в гравитационно флуктуирующем мире Фридмана, в котором локальные флуктуации порождались массивными «частицами». В частности, в работах [17, 18] (1990) было показано, что «учет локальных флуктуаций гравитационного поля эквивалентен добавлению к фридмановской пыли жидкости с предельно жестким уравнением состояния, или добавлению в макроскопические уравнения Эйнштейна Λ - члена»[10].

Итак, будем усреднять уравнения Эйнштейна и сопутствующие уравнения физических полей. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Для начала процесса усреднения нам необходимо иметь некоторую «затравочную» стартовую макроскопическую метрику $g^{(0)}_{ik}(x)$ и некоторые затравочные стартовые физические поля $\phi^{(0)}_a$, с которых в качестве нулевого приближения можно начинать процесс последовательных иттераций процедуры усреднения. Эти затравочные поля удовлетворяют самосогласованной системе уравнений поля:

$$G^i_k\big(g^{(0)}_{jm}\big) = 8\pi T^i_k(\big(g^{(0)}_{jm},\phi^{(0)}_a\big) + \Lambda\delta^i_k; \tag{1.10}$$

$$\overset{(0)}{\nabla}_k T^k_i(g^{(0)},\phi^{(0)}_a) = 0. \tag{1.11}$$

Итак, в согласии с общим подходом к усреднению гравитационных полей рассмотрим некоторое макроскопическое риманово пространство, и пусть теперь $g^{(0)}_{ik}(x) \equiv \overline{g_{ik}(x)}$, $\phi^{(0)}_a(x) \equiv \overline{\phi_a(x)}$ некоторые *пока неизвестные* макроскопические средние полевых величин.

Предположение 1. В дальнейшем будем предполагать, что операции дифференцирования или интегрирования по координатам перестановочны с операцией усреднения:

$$\overline{\partial_i\phi(x)} = \partial_i\overline{\phi(x)}; \tag{1.12}$$

$$\overline{\int \phi(x)dx} = \int \overline{\phi(x)}dx. \tag{1.13}$$

Заметим, что определенная выше операция усреднения полностью удовлетворяет предположению 1.

Пусть далее:

$$\delta g_{ik} = g_{ik} - g^{(0)}_{ik}; \quad \delta\phi_a = \phi_a - \phi^{(0)}_a \tag{1.14}$$

– малые локальные отклонения метрики и физических полей от их средних значений, такие, что:

$$\overline{\delta g_{ik}} = 0; \quad \overline{\partial_j \delta g_{ik}} = 0; \tag{1.15}$$

$$\overline{\delta\phi} = 0; \quad \overline{\partial_j\delta\phi} = 0. \tag{1.16}$$

Разложим уравнения уравнения поля в ряд Тейлора по малости отклонений метрики и физических полей от этих средних значений до второго порядка по возмущениям:

$$G^{(0)}{}^i_k + G^{(1)}{}^i_k + G^{(2)}{}^i_k = 8\pi\big(T^{(0)}{}^i_k + T^{(1)}{}^i_k + T^{(2)}{}^i_k\big) + \Lambda\delta^i_k, \tag{1.17}$$

и усредним эти уравнения с учетом (1.3), (1.7), а также линейности операторов $G^{(1)}_{ik}$ и $T^{(1)}_{ik}$ по отношению к флуктуациям:

$$\overline{G^{(1)}{}^i_k(\delta g)} = G^{(1)}{}^i_k(\overline{\delta g}) = 0; \tag{1.18}$$

$$\overline{T^{(1)}{}^i_k(\delta g,\delta\phi)} = T^{(1)}{}^i_k(\overline{\delta g},\overline{\delta\phi}) = 0. \tag{1.19}$$

[9]Английская версия - [15] (2007), см. также монографии [19, 20] (2010,2013).

[10]В этих работах Автора с А. А. Поповым уравнение состояния $p = -\varepsilon$ по аналогии с уравнением состояния $p = \varepsilon$ было названо «предельно - жестким уравнением состояния», так как на то время еще не было соответствующей общепринятой терминологии.

Таким образом, в первом порядке теории возмущений мы получим микроскопические линейные уравнения первого порядка по возмущениям метрики и физических полей

$$G^{(1)}{}^i_k(\delta g) = 8\pi T^{(1)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi) + \Lambda\delta^i_k; \tag{1.20}$$

$$\nabla_k T^{(1)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi) = 0, \tag{1.21}$$

которые мы будем называть *микроскопическими эволюционными уравнениями для возмущений.* Полагая[11]

$$g^{(0)}_{ik} = \overline{g_{ik}}, \tag{1.22}$$

во втором порядке теории возмущений после усреднения мы получим макроскопические уравнения Эйнштейна для макроскопической метрики

$$G^{(0)}{}^i_k(\overline{g}) = -\overline{G^{(2)}{}^i_k(\delta g)} + 8\pi(T^{(0)}{}^i_k(\overline{g}, \overline{\phi}) + \overline{T^{(2)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi)}) + \Lambda\delta^i_k, \tag{1.23}$$

согласно которым макроскопическую метрику во втором порядке по теории возмущений определяют уравнения Эйнштейна с космологическим членом и суммарным эффективным тензором энергии импульса:

$$\tilde{T}^i_k = T^{(0)}{}^i_k(\overline{g}, \overline{\phi}) + \mathcal{T}^{(2)}{}^i_k, \tag{1.24}$$

где

$$\mathcal{T}^{(2)}{}^i_k \equiv \overline{T^{(2)}{}^i_k} - \frac{1}{8\pi}\overline{G^{(2)}{}^i_k}. \tag{1.25}$$

Таким образом, макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям принимают стандартный вид:

$$G^i_k(\overline{g}) = 8\pi\tilde{T}^i_k + \Lambda\delta^i_k. \tag{1.26}$$

Для замыкания макроскопических уравнений Эйнштейна необходимо вычислить макроскопические средние, квадратичные по локальным флуктуациям метрики и физических полей, определяемые эволюционными уравнениями (1.20) – (1.21).

1.3. Макроскопические симметрии

Производной Ли от объекта Ω^i_k в направлении векторного поля ξ^i называется объект [21].

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, U^i_k = \lim_{dt\to 0}\frac{\Omega^i_k(x^i + \xi^i dt) - \Omega^i_k(x^i)}{dt}, \tag{1.27}$$

так что:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, U^i_k = \xi^j\partial_j U^i_k - U^j_k\partial_j\xi^i + U^i_j\partial_k\xi^j. \tag{1.28}$$

В частности, если U^i_k является тензором, в формуле (1.28) можно заменить частные производные на ковариантные:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, U^i_k = \xi^j\nabla_j U^i_k - U^j_k\nabla_j\xi^i + U^i_j\nabla_k\xi^j \tag{1.29}$$

– этот объект является тензором той же валентности, что и исходный.

Рассмотрим в качестве затравочного пространства псевдориманово V_4, допускающее некоторую группу движений, G^r с векторами Киллинга $\underset{(\alpha)}{\xi}$, определяющих макроскопическую симметрию:

$$\underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, g^{(0)}_{ik} = 0; \quad \underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, \phi^{(0)}_a = 0; \qquad \big(\underset{\alpha}{\mathrm{L}} \equiv \underset{\xi_\alpha}{\mathrm{L}}\big). \tag{1.30}$$

Примем далее следующее предположение.

Предположение 2. Макроскопическое среднее тензора Эйнштейна наследует свойства симметрии макроскопической метрики:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \overline{g_{ik}} = \sigma\overline{g_{ik}} \Longrightarrow \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \overline{G_{ik}} = \sigma_1\overline{g_{ik}}, \tag{1.31}$$

где $\underset{\xi}{\mathrm{L}}$ – производная Ли (см., например, [21]), $\sigma(x), \sigma_1(x)$ – некоторые скалярные функции.

[11] Отметим, что подстановка (1.22) является формальным приемом перенормировки метрики.

Заметим, что при $\sigma = 0,\ \sigma_1 = 0$ мы получаем группу движений $\bar{V}_4$, а при ненулевых значениях этих скаляров – группу конформных преобразований. Поясним предположение 2. Как известно из римановой геометрии (см. [20]), все геометрические объекты наследуют свойства симметрии метрического тензора, например:

$$\underset{\xi}{\mathrm{L}}\, g_{ik} = 0 \Rightarrow \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, \Gamma^j_{ik} = 0;\ \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, R_{ijkl} = 0;\ \underset{\xi}{\mathrm{L}}\, T_{ik} = 0. \tag{1.32}$$

Отсюда следует, например, что все симметричные ковариантные тензоры второй валентности имеют такую же алгебраическую структуру, как и метрический тензор. Логично поэтому предположить, что алгебраическая структура макроскопических тензоров также будет одинакова. Заметим далее, что, поскольку выполняются очевидные равенства:

$$\underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, G^{(0)}{}^i_k = 0; \quad \underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, \Lambda\delta^i_k = 0; \quad \underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, T^{(0)}{}^i_k(\overline{g}, \overline{\phi}) = 0, \tag{1.33}$$

то вследствие предположения 2 суммарный тензор энергии - импульса второго порядка по возмущениям при усреднении также должен наследовать симметрии макроскопической метрики:

$$\underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, \overline{\mathcal{T}^{(2)}{}^i_k} = 0 \Rightarrow \underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, \tilde{T}^i_k = 0. \tag{1.34}$$

Заметим, что предположение 2 налагает определенные необходимые условия на симметрию скалярной функции распределения случайных тензорных полей $f(x^i, \vec{\lambda})$, в частности:

$$\underset{\alpha}{\mathrm{L}}\, f(x^i, \vec{\lambda}) = 0. \tag{1.35}$$

1.4. Макроскопические уравнения Эйнштейна второго порядка

Выпишем окончательно систему уравнений, определяющих макроскопическую метрику во втором порядке теории возмущений. Эти уравнения состоят из системы линейных уравнений для локальных возмущений метрики и физических полей:

1. Уравнения для локальных возмущений:

$$G^{(1)}{}^i_k(\delta g) = 8\pi T^{(1)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi); \tag{1.36}$$
$$\nabla_k T^{(1)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi) = 0. \tag{1.37}$$

2. Макроскопические уравнения Эйнштейна:

$$G^i_k(\overline{g}) - \Lambda\delta^i_k = -\overline{G^{(2)}{}^i_k(\delta g)} + 8\pi(T^{(0)}{}^i_k(\overline{g}, \overline{\phi}) + \overline{T^{(2)}{}^i_k(\delta g, \delta\phi)}), \tag{1.38}$$

где величины $G_{ik}(\overline{g})$ вычисляются по стандартным правилам вычисления компонент тензора Эйнштейна относительно макроскопической метрики.

Сделаем следующее важное замечание. При получении макроскопических уравнений Эйнштейна мы произвели перенормировку метрики $g^{(0)}_{ik} \to \overline{g}_{ik}$. При этом теперь, во-первых, согласно методу самосогласованного поля макроскопические средние $\overline{G^{(2)}_{ik}(\delta g)}$ не обязаны быть малыми по сравнению с $G_{ik}(\overline{g})$, так как являются результатом суммирования бесконечного числа степеней свободы гравитационных возмущений[12]. Во-вторых, указанная перенормировка метрики приводит к замене $G_{ik}(g^{(0)}) \to G_{ik}(\overline{g})$. Это, в свою очередь, означает, что макроскопические уравнения Эйнштейна (1.38) решаются сразу относительно макроскопической метрики, а не методом последовательных итераций:

$$\overline{g_{ik}} = g^{(0)}_{ik} + \overline{\delta g_{ik}} + \ldots$$

– это и является одним из основных преимуществ метода самосогласованного поля Хартри - Фока - Власова - Боголюбова. Метод последовательных приближений увел бы нас совсем в другую сторону – для понимания этого достаточно представить уравнения Эйнштейна для Фридмановской

[12] При отсутствии негравитационных полей эти тензоры равны.

Вселенной, в которой тензор энергии-импульса определялся бы газом бесконечного числа «маленьких фотонов». Следуя методу последовательных приближений, мы должны были бы положить в качестве нулевого приближения тензор Минковского. Ясно, что при таком подходе мы никогда бы не получили космологическую сингулярность, учитывая малость гравитационных возмущений, вносимых «маленькими фотонами», по сравнению с единицами метрики Минковского. Этот пример наглядно показывает, что в релятивистской теории гравитации все исследователи бессознательно используют метод самосогласованного поля, не пытаясь обосновать его.

2. Микроскопические уравнения Эйнштейна для Вселенной Фридмана со скалярным полем

Итак, будем рассматривать однородную, изотропную, пространственно - плоскую модель Фридмана:

$$ds_0^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \equiv dt^2 - a^2 dl_0^2. \tag{2.1}$$

Метрику с гравитационными возмущениями запишем в виде (см., например, [7]):

$$ds^2 = ds_0^2 + a^2(\eta) h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.2}$$

Введем, как это принято, более удобные для вычислений смешанные компоненты возмущений метрики:

$$h^\alpha_\beta = h_{\gamma\beta} g_0^{\alpha\gamma} \equiv -\frac{1}{a^2} h_{\alpha\beta}; \tag{2.3}$$

$$h \equiv h^\alpha_\alpha \equiv g_0^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{a^2}(h_{11} + h_{22} + h_{33}). \tag{2.4}$$

2.1. Общие соотношения для отдельных мод возмущений

Поскольку трехмерное пространство V_3^0 в метрике (2.1) с метрикой dl_0^2 является плоским, собственные функции оператора Лапласса на этом пространстве

$$\triangle_0 \psi_n = n^2 \psi_n \tag{2.5}$$

равны:

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{i\mathbf{n}\mathbf{r} + i\alpha}, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{n}$ – произвольный *волновой вектор*, α – произвольное число, *фаза колебаний*. Четверка произвольных чисел $\{n_1, n_2, n_3, \alpha\}$ и являются теми степенями свободы, по которым мы будем усреднять локальную метрику. Далее, представим возмущения метрики в виде отдельных гармоник с заданным волновым вектором, разлагая их на два алгебраических типа – поперечные и продольные возмущения [7].

Для поперечных возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} S_n(\eta) \mathrm{e}^{i\mathbf{n}\mathbf{r}}, \tag{2.7}$$

где $S(\eta)$ – амплитуда возмущений, в которой мы во избежание громоздких обозначений учли зависимость от фазы α, то есть,

$$S(\eta) \to \mathrm{e}^{i\alpha} S(\eta); \tag{2.8}$$

$$h^\alpha_\beta n_\alpha = 0; \tag{2.9}$$

$$h = 0. \tag{2.10}$$

Вследствие (2.10) в линейном по h приближении:

$$\sqrt{-g} \approx \sqrt{-g_0} = a^4. \tag{2.11}$$

В произвольной декартовой системе координат трехмерного евклидова пространства E_3 тензор поляризации $e_{\alpha\beta}$ формулы (2.7) имеет вид:

$$e_{\alpha\beta} = 2s_\alpha s_\beta + \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2} - \delta_{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{s}^2 = 1; \quad \mathbf{sn} = 0; \quad \mathbf{n}^2 = n^2. \tag{2.13}$$

Легко проверить, что автоматически выполняется калибровочное условие (2.9).

Для продольных возмущений:

$$h_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{i\mathbf{nr}}[\mu(\eta)P_{\alpha\beta} + \nu(\eta)Q_{\alpha\beta}], \tag{2.14}$$

где

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} - \frac{n_\alpha n_\beta}{n^2}; \quad Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

Выбор системы координат. Будем разлагать в ряд тензор Эйнштейна, тензор энергии - импульса скалярного поля и уравнения скалярного поля в ряд по малости амплитуды гравитационных и скалярных возмущений $S(\eta), \mu(\eta), \nu(\eta), \phi(\eta)$. При этом, пользуясь изотропией невозмущенной метрики, удобно ввести локальную систему координат, в которой[13]:

$$\mathbf{n} = n(0,0,1); \quad \mathbf{s} = (1,0,0), \tag{2.16}$$

где $\mathbf{s}$ - единичный вектор поляризации поперечных возмущений. В этой системе координат

$$h_{12} = 0;\ h_{11} = \left[S(\eta) + \frac{1}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta)\right]\mathrm{e}^{inz}; \tag{2.17}$$

$$h_{22} = \left[-S(\eta) + \frac{1}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta)\right]\mathrm{e}^{inz}; \tag{2.18}$$

$$h_{33} = \left[-\frac{2}{3}\mu(\eta) + \frac{1}{3}\nu(\eta)\right]\mathrm{e}^{inz}; \quad h = \nu\mathrm{e}^{inz}. \tag{2.19}$$

Далее, потенциал скалярного поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представим в виде:

$$\Phi(r,\eta) = \Phi_0(\eta) + \phi(\eta)\mathrm{e}^{i\mathbf{nr}}; \quad \phi(\eta) \ll \Phi_0(\eta). \tag{2.20}$$

В этой статье мы будем учитывать только поперечные возмущения гравитационного поля.

2.2. Нулевое приближение

Разлагая тензор Эйнштейна по возмущениям метрики, в нулевом приближении получим известные выражения:

$$G^{(0)1}_{\ 1} = G^{(0)2}_{\ 2} = G^{(0)3}_{\ 3} = -\frac{a'^2}{a^4} + 2\frac{a''}{a^3}; \tag{2.21}$$

$$G^{(0)4}_{\ 4} = 3\frac{a'^2}{a^4}. \tag{2.22}$$

Для левой части уравнения скалярного поля (2) в нулевом приближении получим:

$$\Box_0\Phi_0 + m^2\Phi_0 = \frac{\Phi_0''}{a^2} + 2\frac{a'}{a^3}\Phi_0' + m^2\Phi_0. \tag{2.23}$$

При этом ненулевые компоненты тензора энергии - импульса скалярного поля равны:

$$T^{(0)1}_{\ 1} = T^{(0)2}_{\ 2} = T^{(0)3}_{\ 3} = m^2a^2\Phi_0^2 - \frac{\Phi_0'^2}{a^2};$$
$$T^{(0)4}_{\ 4} = m^2a^2\Phi_0^2 + \frac{\Phi_0'^2}{a^2}. \tag{2.24}$$

[13] Мы рассматриваем здесь только одну моду возмущений. Как перейти к спектру возмущений показано в [1].

Таким образом, в нулевом по гравитационным возмущениям приближении *мы получили бы* одно независимое уравнение Эйнштейна

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = \frac{\Phi_0'^2}{a^2} + m^2\Phi_0^2 \tag{2.25}$$

и уравнение поля

$$\Phi_0'' + 2\frac{a'}{a}\Phi_0' + m^2\Phi_0 = 0.$$

Второе уравнение Эйнштейна при этом явилось бы дифференциальным следствие этих двух. Указанные два уравнения составляют систему уравнений стандартной космологической модели для квадратичного потенциала $U(\Phi) = m^2\Phi^2/2$. Также отметим и следствие этих уравнений, которое является уравнением Эйнштейна для трехмерных компонент:

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = 8\pi\big(m^2a^2\Phi_0^2 - \frac{\Phi_0'^2}{a^2}\big). \tag{2.26}$$

Подчеркнем еще раз, что мы не будем решать указанные уравнения нулевого приближения, так как такой итерационный подход противоречит методу самосогласованного поля.

2.3. Уравнения первого приближения – эволюционные уравнения для возмущений

В линейном по $S, \mu, \nu\phi$ приближении получим, во-первых, уравнение для возмущения скалярного поля

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' + (n^2 + a^2m^2)\phi = 0 \tag{2.27}$$

и ненулевые компоненты тензора Эйнштейна $G^{(1)}{}^1_1, G^{(1)}{}^2_2, G^{(1)}{}^4_4$ и соответствующие им компоненты тензора энергии - импульса[14]. При этом оказывается, что:

$$\begin{aligned} G^{(1)}{}^1_1 = -G^{(1)}{}^2_2 = -\frac{1}{2}\frac{Sn^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{S''}{a^2} - \frac{a'}{a}\frac{S'}{a^2};\\ G^{(1)}{}^1_3 = G^{(1)}{}^1_4 = G^{(1)}{}^2_3 = G^{(1)}{}^1_4 = G^{(1)}{}^4_4 = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Далее, отличные от нуля компоненты тензора энергии-импульса:

$$\begin{aligned} T^{(1)}{}^1_1 = T^{(1)}{}^2_2 = T^{(1)}{}^3_3 = 2\Phi_0\phi m^2 - 2\frac{\Phi_0'}{a^2}\phi';\\ T^{(1)}{}^4_4 = 2\Phi_0\phi m^2 + 2\frac{\Phi_0'}{a^2}\phi'. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Сравнивая с учетом уравнений Эйнштейна первого порядка (2.28) и (2.29), найдем[15]:

$$\phi = 0. \tag{2.30}$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений получаем лишь одно уравнение на амплитуду гравитационных возмущений:

$$S'' + 2\frac{a'}{a}S' + Sn^2 = 0, \tag{2.31}$$

которое мы будем называть *эволюционным уравнением для гравитационных возмущений.*

2.4. Уравнения второго порядка

Во втором порядке теории возмущений в уравнение для скалярного поля добавится член, квадратичный по амплитуде гравитационных волн. Таким образом, во втором порядке теории возмущений уравнение скалярного поля примет вид:

$$\Phi_0'' + 2\frac{a'}{a}\Phi_0' + m^2\Phi_0 - SS'\Phi_0' = 0. \tag{2.32}$$

[14] Мы опускаем общий экспоненциальный множитель для возмущений первого порядка e^{ikz} и множитель e^{2ikz} для возмущений второго порядка.

[15] Отличные от нуля возмущения скалярного поля допустимы лишь при наличии продольных возмущений гравитационного поля. Их мы рассмотрим в следующей статье.

Результат усреднения этого уравнения по случайным параметрам флуктуаций метрики и даст нам уравнение для макроскопического скалярного поля второго порядка теории возмущений.

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна второго порядка с учетом эволюционного уравнения на амплитуду гравитационных возмущений (2.31) равны:

$$G^{(2)1}_{\ 1} = G^{(2)2}_{\ 2} = -\frac{1}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \tag{2.33}$$

$$G^{(2)3}_{\ 3} = \frac{3}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{3}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \tag{2.34}$$

$$G^{(2)4}_{\ 4} = -\frac{7}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2} - 2\frac{a'}{a}\frac{SS'}{a^2}; \quad G^{(2)3}_{\ 4} = \frac{3}{2}in\frac{S'S}{a^2}; \tag{2.35}$$

$$G^{(2)1}_{\ 1} + G^{(2)2}_{\ 2} + G^{(2)3}_{\ 3} = \frac{1}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{5}{4}\frac{S'^2}{a^2}; \tag{2.36}$$

$$\mathrm{Sp}(G^{(2)i}_{\ k}) = G^{(2)1}_{\ 1} + G^{(2)2}_{\ 2} + G^{(2)3}_{\ 3} + G^{(2)1}_{\ 1} + G^{(2)4}_{\ 4} = -\frac{3}{2}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{3}{2}\frac{S'^2}{a^2} - 2\frac{a'}{a}\frac{SS'}{a^2}. \tag{2.37}$$

Относительно ненулевой компоненты $G^{(2)3}_{\ 4}$ мы поговорим ниже.

Все возмущения второго порядка тензора энергии - импульса в случае поперечных возмущений оказываются строго равными нулю:

$$T^{(2)i}_{\ k} = 0. \tag{2.38}$$

3. Усреднение локальных флуктуаций метрики

3.1. Усреднение по направлениям волнового вектора

Заметим, что на фоне изотропного пространства Фридмана операция усреднения метрики сводится к усреднению по всем направлениям сводится волнового вектора $\mathbf{n}$, произвольным направлениям вектора поляризации $\mathbf{s}$ и произвольной фазе колебаний α. Вследствие принятых предположений об усреднении 1, 2 функция распределения флуктуаций метрики и полевых величин должна быть инвариантной по отношению к поворотам и трансляциям, то есть, все направления волнового вектора $\mathbf{n}$ и поляризации $\mathbf{s}$ должны быть равновероятными, также равновероятными должны быть флуктуации с произвольной фазой. Это означает, что усреднение по направлениям волнового вектора $\mathbf{n}$ определяется следующим образом:

$$\overline{\psi(n,\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi}\int \psi(\mathbf{n},\mathbf{r})d\Omega_n, \tag{3.1}$$

то есть, сводится к интегрированию по сфере единичного радиуса[16]. Аналогично проводится усреднение и по поляризациям гравитационных волн $\mathbf{s}$. Заметим, с учетом ортогональности вектора поляризации и волнового вектора (2.13) у нас имеется всего 5 степеней свободы. Перейдем с помощью соотношений (2.12) и (2.13) от выделенной системы координат (2.16) к произвольной декартовой, производя замены

$$nz \to \mathbf{nr}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}; \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{s}, \tag{3.2}$$

разлагая в произвольных декартовых координатах симметричный трехмерный тензор по векторам $\mathbf{s}, \mathbf{n}$ и симметричному тензору $\delta_{\alpha\beta}$:

$$G^{(2)\alpha}_{\ \ \beta} = As_\alpha s_\beta + B(s_\alpha n_\beta + s_\beta n_\alpha) + Cn_\alpha n_\beta + D\delta_{\alpha\beta}, \tag{3.3}$$

где A, B, C, D – некоторые инварианты.

Таким образом, в системе координат (2.12) найдем: $A = B = 0$;

$$D = G^{(2)1}_{\ 1}; \quad C = G^{(2)3}_{\ 3} - G^{(2)1}_{\ 1} \tag{3.4}$$

и

$$G^{(2)\alpha}_{\ \ \beta} = \left(G^{(2)3}_{\ 3} - G^{(2)1}_{\ 1}\right)Cn_\alpha n_\beta + G^{(2)1}_{\ 1}\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.5}$$

[16]Можно было бы также усреднить и по всем длинам волновых векторов, но эта операция не дает дополнительной информации. О процедуре усреднения и получения макроскопических уравнений Эйнштейна см. [15, 20].

Вычисляя, найдем:

$$G^{(2)}{}^3_3 - G^{(2)}{}^1_1 = \frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{S'^2}{a^2}. \tag{3.6}$$

Таким образом, для средних получим:

$$\overline{s_\alpha s_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \frac{\overline{n_\alpha n_\beta}}{n^2} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \overline{s_\alpha n_\beta} = 0. \tag{3.7}$$

и окончательно:

$$\overline{G^{(2)}{}^\alpha_\beta} = \frac{1}{3}\big(G^{(2)}{}^1_1 + G^{(2)}{}^2_2 + G^{(2)}{}^3_3\big)\delta^\alpha_\beta = \left(-\frac{1}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} + \frac{5}{4}\frac{S'^2}{a^2}\right)\delta^\alpha_\beta. \tag{3.8}$$

Возвращаясь к соотношению (2.35), получим:

$$\overline{G^{(2)}{}^3_4} \to \overline{G^{(2)}{}^\alpha_4} \sim \overline{n^\alpha} = 0. \tag{3.9}$$

Вследствие изотропии макроскопической метрики и (1.34) усредненный таким образом суммарный тензор энергии - импульса также имеет явно изотропную структуру, то есть, структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости:

$$\mathcal{T}^{(2)}{}^\alpha_\beta = -\overline{G^{(2)}{}^\alpha_\beta} = (\overline{\mathcal{E}} + \overline{\mathcal{P}})\delta^4_i\delta^4_k - \delta^i_k\overline{\mathcal{P}}, \tag{3.10}$$

где

$$\overline{\mathcal{E}} = -\frac{1}{8\pi}\overline{G^{(2)}{}^4_4} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{7}{4}\frac{S^2n^2}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{S'^2}{a^2} + 2\frac{a'}{a}\frac{SS'}{a^2}\right), \tag{3.11}$$

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{3}\overline{G^{(2)}{}^\alpha_\alpha} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{12}\frac{S^2n^2}{a^2} - \frac{5}{12}\frac{S'^2}{a^2}\right), \tag{3.12}$$

есть макроскопические плотность энергии и давление поперечных гравитационных возмущений, соответственно. Кроме того имеет место соотношение:

$$\overline{\mathcal{E}} - 3\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{3}{2}\frac{S^2n^2}{a^2} + \frac{3}{2}\frac{S'^2}{a^2} + 2\frac{a'}{a}\frac{SS'}{a^2}\right). \tag{3.13}$$

Вследствие изотропии и однородности макроскопической метрики вследствие (2.38) после такой операции усреднения в соответствие с методом самосогласованного поля мы получим для нее макроскопические уравнения Эйнштейна (1.23) второго порядка по возмущениям:

$$3\frac{a'^2}{a^4} - \Lambda = 8\pi\overline{\mathcal{E}_s} + \frac{7}{4}\frac{\overline{S}^2n^2}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{\overline{S'^2}}{a^2} + 2\frac{a'}{a}\frac{\overline{SS'}}{a^2}; \tag{3.14}$$

$$\frac{a'^2}{a^4} - 2\frac{a''}{a^3} = \overline{\mathcal{P}_s} + \frac{1}{12}\frac{\overline{S}^2n^2}{a^2} - \frac{5}{12}\frac{\overline{S'^2}}{a^2}, \tag{3.15}$$

где $\overline{\mathcal{E}_s}$ и $\overline{\mathcal{P}_s}$ – плотность энергии и давление *макроскопического* скалярного поля, вычисленные по формулам (2.24), в которых необходимо подставить значение макроскопического потенциала Φ, полученного из усредненного по гравитационным возмущениям уравнения (3.16).

$$\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi' + m^2\Phi - \overline{SS'}\Phi' = 0. \tag{3.16}$$

Заметим, что в этих уравнениях масштабный фактор $a(\eta)$ является уже макроскопической величиной. Таким образом:

$$\overline{\mathcal{P}_s} = -m^2a^2\Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2};$$

$$\overline{\mathcal{E}_s} = m^2a^2\Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2}. \tag{3.17}$$

Система уравнений (3.14) – (3.16) совместно с соотношениями (3.17) и эволюционным уравнением (2.31) на гравитационные возмущения и являются самосогласованной системой уравнений, определяющих макроскопическую метрику и макроскопическое скалярное поле во втором порядке теории возмущений по локальным флуктуациям метрики. Эти уравнения необходимо еще усреднить по случайной фазе гравитационных возмущений.

4. Уравнения Эйнштейна второго порядка по возмущениям в ВКБ-приближении

4.1. ВКБ-решение эволюционного уравнения

Для получения макроскопических уравнений Эйнштейна необходимо решить эволюционное уравнение для поперечных гравитационных возмущениях при *произвольном* масштабном факторе $a(\eta)$. Несмотря на внешнюю простоту эволюционного уравнения, найти его общее решение не представляется возможным. Поэтому здесь мы рассмотрим ВКБ-приближение этого уравнения, полагая:

$$S(\eta) = \tilde{S}(\eta)\mathrm{e}^{i\psi(\eta)}; \tag{4.1}$$

$$\psi' \gg \tilde{S}'_0; \quad n \gg 1; \quad \psi'' \ll \phi'. \tag{4.2}$$

Подставляя $S(\eta)$ из (4.1) в эволюционное уравнение (2.31), приведем его к виду:

$$\tilde{S}'' + 2\tilde{S}'\left(\frac{a'}{a} + i\psi'\right) + \tilde{S}\left(n^2 - \psi'^2 + 2i\frac{a'}{a}\psi' + i\psi''\right) = 0. \tag{4.3}$$

В нулевом порядке ВКБ-приближения получим уравнение:

$$n^2 - \psi'^2 = 0 \Rightarrow \psi' = \pm n \Rightarrow \psi = \pm i\eta + \alpha. \tag{4.4}$$

Подставляя таким образом найденную фазу в уравнение (4.3), получим в следующем порядке ВКБ-приближения уравнение на амплитуду $S_0(\eta)$:

$$2in\left(\tilde{S}' + \frac{a'}{a}\tilde{S}\right) = 0. \tag{4.5}$$

Таким образом, получим окончательно решение эволюционного уравнения в ВКБ-приближении:

$$S = \frac{\mathrm{e}^{i\alpha}}{a(\eta)}\left(S_0^+\mathrm{e}^{in\eta} + S_0^-\mathrm{e}^{-in\eta}\right) \equiv \frac{C_1\cos(n\eta+\alpha)}{a} + \frac{C_2\sin(n\eta+\alpha)}{a}, \tag{4.6}$$

где C_1, C_2 – некоторые произвольные вещественные константы.

4.2. Усреднение амплитуд по фазе

В дальнейшем в эволюционном уравнении для макроскопического масштабного фактора (3.14) и в уравнении для макроскопического потенциала (3.16) нам понадобятся значения квадратов амплитуд S и их производных. Для этого нам необходимо усреднить полученные величины по фазе α. Таким образом, реальную часть величин типа S^2 мы будем вычислять по следующему правилу:

$$\langle S^2\rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S^2 d\alpha. \tag{4.7}$$

Таким образом, учитывая соотношения (4.6), найдем согласно (4.7):

$$\langle S^2\rangle_\alpha = \frac{1}{2}\frac{S_0^2}{a^2};\ \langle SS'\rangle_\alpha = -\frac{1}{2}\frac{a'}{a}\frac{S_0^2}{a^2};$$
$$\langle S'^2\rangle_\alpha = \frac{1}{2}\frac{S_0^2}{a^2}\left(n^2 + \frac{a'^2}{a^2}\right), \tag{4.8}$$

где

$$S_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение эволюции маштабного фактора (3.14), получим окончательно макроскопическое уравнение эволюции в ВКБ-приближении:

$$3\frac{a'^2}{a^4}\left(1 + \frac{7}{24}S_0^2\right) = \Lambda + 8\pi\left(m^2a^2\Phi^2 + \frac{\Phi'^2}{a^2}\right) + \frac{S_0^2n^2}{a^4}. \tag{4.9}$$

Для макроскопического уравнения поля (3.16) получим аналогично:

$$\Phi'' + 2\frac{a'}{a}\Phi'\left(1+\frac{S_0^2}{2a^2}\right) + m^2\Phi = 0. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.11) и (4.10) и являются искомыми уравнениями макроскопической космологии со скалярным полем в ВКБ-приближении. Заметим, что вблизи космологической сингулярности ($a(\eta) \to 0$) второй член в круглых скобках этого уравнения стремится к бесконечности также и в случае инфляционного решения ($a \sim -1/\eta$, $\eta \to -\infty$) как η^2.

В случае пустой вселенной ($\Phi \equiv 0$) уравнение (4.11) принимает простой вид:

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{\Lambda + \dfrac{S_0^2 n^2}{a^4}}{3\left(1+\dfrac{7}{24}S_0^2\right)}, \tag{4.11}$$

и интегрируется в элементарных функциях:

$$a(t) = \frac{\sqrt{S_0 n}}{\Lambda^{1/4}}\sqrt{\mathrm{sh}\left(\frac{2\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3b}}t\right)}; \quad b = 1+\frac{7}{24}S_0^2. \tag{4.12}$$

Это решение относится к классу решений, ранее полученных Автором и описывает плавный переход с ультрарелятивистской стадии расширения на инфляционную.

Заключение

В заключении Автор выражает благодарность членам ВС - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Игнатьев Ю.Г. Макроскопическая космология ранней Вселенной // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. №. 3. С. 16–22.
2. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ-term // arXiv:1509.01235v1 [gr-qc].
3. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ - Term // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22. № 3. P. 32–37.
4. Игнатьев Ю.Г. Физическая неустойчивость модели Вселенной с инфляционным (де-Ситтеровским) началом // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 3. С. 5–15.
5. Starobinsky A.A. Lectures on modern problems og cosmology // "Gracos-2014": труды международной школы по гравитации и космологии. Казанский университет. Казань, 2014. С. 48–59.
6. Lifshitz E.M. // JETP. 1946. Vol. 16. P. 697.
7. Landau L.D., Lifshitz E.M. The Classical Theory of Fields. Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris- Frankfurt: Pergamon Press, 1971.
8. Isaacson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics // Phys. Rev. 1966. Vol. 166. P. 1263.
9. Isaacson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor // Phys. Rev. 1966. Vol. 166. P. 1272.
10. Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1938. Т. 8 (3). С. 291.
11. Власов А.А. Теория вибрационных свойств электронного газа и её приложения // Уч. зап. МГУ. 1945. Вып. 75. Кн. 2. Ч. 1.
12. Власов А.А. Статистические функции распределения. М: Наука, 1966. 356 с.
13. Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М: ИЛ, 1948. 264 с.
14. Игнатьев Ю.Г. Статистическая динамика ансамбля классических частиц в гравитационном поле // Гравитация и теория относительности : сб. статей под ред. В.Р. Кайгородова. Казань, 1983. Вып. 20. С. 50–109.

15. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field // Gravitation and Cosmology. 2007. Vol. 13. P. 59–79.

16. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions // Actrophysics and Space Science. 1990. Vol. 163. P. 153–174.

17. Игнатьев Ю.Г., Попов А.А. О статистическом описании ансамбля ультрарелятивистских частиц в пространственно - плоской Вселенной // Известия ВУЗов, Физика. 1989. № 5. С. 34–39.

18. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions // Actrophysics and Space Science. 1990. Vol. 163. P. 153–174.

19. Игнатьев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский университет, 2013. 316 с. URL: `http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf; http://rgs.vniims.ru/books/universe.pdf`

20. Игнатьев Ю.Г. Релятивистская кинетическая теория неравновесных процессов в гравитационных полях. Казань: Фолиант, 2010. 506 с. URL: `http://rgs.vniims.ru/books/kinetics.pdf`

21. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М: Наука, 1966. 496 с.

22. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2003. 447 с.

23. Ignat'ev Yu.G. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe // Russian Physics Journal. 2013. Vol. 56. № 6. P. 693–706.

24. Ignat'ev Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning // arXiv:1508.05375v1 [gr-qc].

25. Ho Ch. M., Hsu S.D.H. Instability of Quantum de Sitter Spacetime // arXiv:1501.00708v2 [hep-th].

26. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М: Физматгиз, 1963. 1100 с.

27. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М: ГИФМЛ, 1963. 360 с.

Поступила в редакцию 19.06.2016

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Macroscopic Einstein Equations and Cosmology of Yearly Universary. I. A Mathematical Model for the Transverse Fluctuations.

Keywords: macroscopic gravity, equation cosmological evolution, WKB approximation.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

We consider the correct procedure of statistical averaging of local perturbation of the gravitational field on the independent degrees of freedom of the perturbation in the second-order perturbation theory, upon which is built a closed system of ordinary differential equations describing the cosmological evolution of macroscopically homogeneous isotropic universe filled with gravitational radiation, as in Einstein's model with a cosmological term, and without it.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Cosmology of Yearly Universary, *Space, Time and Foudamental Interaction*, 2015, no. 3, pp. 16–22.

2. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ -term, *arXiv:1509.01235v1 [gr-qc]*.

3. Ignat'ev Yu.G. Macroscopic Einstein Equations for a Cosmological Model with Λ - Term, *Gravitation and Cosmology*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 32–37.

4. Ignat'ev Yu.G. Physical Instability Inflationary Model of the Universe (de Sitter) Start, *Space, Time and Foudamental Interaction*, 2015, no. 3, pp. 5–15.

5. Starobinsky A.A. Lectures on modern problems og cosmology, *"Gracos-2014": Proceedings of International School on Gravitation and Cosmology*, Kazan Federal University, Kazan, 2014, pp. 48–59.

6. Lifshitz E.M. *JETP*, 1946, no. 16, p. 697.

7. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*, Oxford-NewYork-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt: Pergamon Press, 1971.

8. Isaacson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics, *Phys. Rev.*, 1966, vol. 166, p. 1263.

9. Isaacson R.A. Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. II. Nonlinear Terms and the Effective Stress Tensor, *Phys. Rev.*, 1966, vol. 166, p. 1272.

10. Vlasov A.A. The vibrational properties of an electron gas, *JETP*, 1938, vol. 8 (3), p. 291.

11. Vlasov A.A. The theory of vibrational properties of the electron gas and its applications, *Uch. Zap. MGU*, 1945, no. 75, book 2, part 1.

12. Vlasov A.A. *Statisticheskie funktcii raspredeleniia* (Statistical Distribution Functions), Moskow: Nauka, 1966, 356 p.

13. Chandrasekhar S. *Principles of Stellar Dinamics*, New-York: Dover Publications, 1942.

14. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field, *Gravitaciya i teoriya otnositelnosti* (Gravitation and Relavity Theory), Kazan University, Kazan, 1983, no. 20, pp. 50–109.

15. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field, *Gravitation and Cosmology*, 2007, vol. 13, pp. 59–79.

16. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, *Astrophysics Space Science*, 1990, vol. 163, pp. 153–174.

17. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Statistical description of an ensemble of ultrarelativistic particles in a spatially flat universe, *Soviet Physics Journal*, 1989, vol. 32, issue 5, pp. 391–395.

18. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universy and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, *Actrophysics and Space Science*, 1990, vol. 163, pp. 153–174.

19. Ignat'ev Yu.G. *Neravnovesnaia Vselennaia kineticheskie modeli kosmologicheskoi evoliutcii* (Nonequilibrium Universe: The Kinetic Models of Cosmology Evolution), Kazan: Kazan University, 2013, 316 p. http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf; http://rgs.vniims.ru/books/universe.pdf

20. Ignatyev Yu.G. *Reliativistskaia kineticheskaia teoriia neravnovesnykh protcessov v gravitatcionnykh poliakh* (Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields), Kazan: Foliant-Press, 2010, 506 p. http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf

21. Petrov A.Z. *Einstein spaces*, Oxford: Pergamon Press, 1969, 411 p.

22. Fedoruk M.V. *Obyknovennye differentcialnye uravneniia* (Ordinary differential equations), Saint Petersburg: Lan, 2003, 447 p.

23. Ignat'ev Yu.G. Exact kinetic model of restoration of thermodynamic equilibrium in an accelerating Universe, *Russian Physics Journal*, 2013, vol. 56, no. 6, pp. 693–706.

24. Ignat'ev Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning, *arXiv:1508.05375v1 [gr-qc]*.

25. Ho Ch. M., Hsu S.D.H. Instability of Quantum de Sitter Spacetime, *arXiv:1501.00708v2 [hep-th]*.

26. Gradshtein I.S., Rizhik I.M. *Tablitcy integralov summ riadov i proizvedeni* (Tables of Integrals, Sums and Products), Moskow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p.

27. Lebedev N.N. *Spetcialnye funktcii i ikh prilozheniia* (Spetial Functions and Its Applications), Moskow, GIFML, 1963, 360 p.

Received 19.06.2016

Ignat'ev Yurii Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Phederal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru