УДК 530.12:531.18

В. В. Войтик[1]

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Исходным пунктом данной статьи является преобразование в криволинейно движущуюся равноускоренную систему отсчёта, которое было получено в предыдущей статье. С помощью этого преобразования определяется закон движения точек равноускоренной системы отсчёта s как функция лабораторного времени. Находится также скорость движения точек s. Вычисляется длина линейки её системы координат. Оказалось, что эта длина отличается от обычно принятой длины, вычисленной по формуле Фитцджеральда - Лоренца. Кроме того, находится уравнение траектории, по которой движется начало отсчёта s. Эта траектория оказалась гиперболой.

Ключевые слова: равноускоренное движение, гиперболическое движение, собственное ускорение, траектория, сокращение Фитцджеральда - Лоренца.

PACS: 03.30.+p

Введение

Задача о свойствах релятивистски равноускоренного движения обычно ставится в упрощённом виде. В литературе вместо рассмотрения наиболее общего криволинейного равноускоренного движения как правило ограничиваются частным случаем такого движения по прямой линии. Аргументом в пользу такого упрощения служит то обстоятельство, что общий случай сводится к частному простым преобразованием Лоренца [1, с. 109]. Однако не исключено, что при рассмотрении общего равноускоренного движения возможны некие сюрпризы и неожиданности остающиеся скрытыми в частном случае. Рассмотрение такого движения в СТО тем более необходимо, что особые математические препятствия к этому отсутствуют.

Другим возражением против постановки такой задачи, которое иногда выдвигается, является понимание равноускоренного движения как, хорошо известного в литературе, движения в некотором однородном силовом поле [2, с. 128, п. 19], например электрическом. Эта интерпретация равноускоренного движения, разумеется, неверна, поскольку при лоренцевском преобразовании электромагнитное поле изменяется [1, с. 114, формулы (204)], что и приводит к изменению действующей на частицу силы в сопутствующей системе отсчёта. По этой причине движение заряженной частицы под углом, не равным 0 или 180°, к однородному электрическому полю не является равноускоренным[2].

Статья построена следующим образом. В параграфе 1 выводится общее преобразование в релятивистски равноускоренную систему отсчёта. Вывод существенно использует преобразование в прямолинейно движущуюся равноускоренную систему отсчёта впервые полученное К. Мёллером в [3, формулы (35)]. При этом общее преобразование получается из преобразования Мёллера простым бустом. В параграфе 2 вычисляется закон движения точек равноускоренной системы отсчёта и их скорость с течением лабораторного времени. В 3-м параграфе вычисляется длина линейки ускоренной системы координат в лабораторной системе и её значение сравнивается с длиной вычисленной по формуле Фитцджеральда - Лоренца. Наконец, в параграфе 4 находится уравнение траектории начала равноускоренной системы отсчёта.

1. Общее преобразование в равноускоренную систему отсчёта в явном виде

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчёта $S' : (T', \mathbf{R}')$ равноускоренная система $s : (t, \mathbf{r})$ движется прямолинейно в направлении 1 из состояния покоя. Координаты и время в этих системах связаны преобразованием Мёллера

$$T' = \mathrm{sh}Wt \left(r_1 + \frac{1}{W} \right) , \quad R_2' = r_2 \, , \quad R_3' = r_3 \, . \tag{1.1}$$

[1]E-mail: voytik1@yandex.ru

[2]Это утверждение ещё раз доказывается ниже в разделе 2 непосредственным сравнением двух скоростей: начала равноускоренной системы отсчёта и частицы, двигающейся в однородном силовом поле.

$$R_1' = \mathrm{ch}Wt\left(r_1 + \frac{1}{W}\right) - \frac{1}{W}\,. \tag{1.2}$$

Здесь величина W имеет смысл постоянного собственного ускорения s и используется система единиц, в которой $c = 1$. Перейдём теперь в другую инерциальную систему отсчёта $S : (T, \mathbf{R})$, ориентированную также как первоначальная система S', относительно которой S' движется в плоскости осей 1 и 3 со скоростью $(v_1, 0, v_3)$. Координаты и время в этих системах связаны преобразованием Лоренца

$$T = \frac{T' + v_1 R_1' + v_3 R_3'}{\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{1.3}$$

$$R_1 = R_1' + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\; v_1\,(v_1 R_1' + v_3 R_3') + \frac{v_1 T'}{\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{1.4}$$

$$R_2 = R_2'\,, \tag{1.5}$$

$$R_3 = R_3' + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\; v_3\,(v_1 R_1' + v_3 R_3') + \frac{v_3 T'}{\sqrt{1-v^2}}\,, \quad v^2 = v_1^2 + v_3^2\,. \tag{1.6}$$

Общее преобразование в криволинейно движущуюся систему отсчёта получится, если подставить (1.1)–(1.2) в (1.3)–(1.6). В результате получим

$$T = \frac{\mathrm{sh}Wt + v_1\mathrm{ch}Wt}{\sqrt{1-v^2}}\left(r_1 + \frac{1}{W}\right) + \frac{v_3}{\sqrt{1-v^2}}\; r_3 - \frac{v_1}{W\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{1.7}$$

$$R_1 = \left[\left(1 + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\, v_1^2\right)\mathrm{ch}Wt + \frac{v_1}{\sqrt{1-v^2}}\;\mathrm{sh}Wt\right]\left(r_1 + \frac{1}{W}\right) + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\, v_1 v_3\; r_3 -$$

$$-\frac{1}{W}\left[1 + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\, v_1^2\right]\,, \tag{1.8}$$

$$R_2 = r_2\,, \tag{1.9}$$

$$R_3 = \frac{v_3}{\sqrt{1-v^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\, v_1\,\mathrm{ch}\,Wt + \mathrm{sh}Wt\right]\left(r_1 + \frac{1}{W}\right) + \left(1 + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\, v_3^2\right) r_3 -$$

$$-\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{Wv^2\sqrt{1-v^2}}\, v_1 v_3\,. \tag{1.10}$$

Это же преобразование было получено решением уравнений движения тетрады ортонормированных 4-векторов [4, формулы (7.2)-(7.5)] [3]. Очевидно, что в случае, когда $W \to 0$, преобразование (1.7)–(1.10) переходит в лоренцевское. Кроме того, нетрудно проверить, что метрика, производимая данным преобразованием, есть метрика равномерно ускоренной системы отсчёта

$$ds^2 = (1 + Wr_1)^2\, dt^2 - d\mathbf{r}^2\,. \tag{1.11}$$

[3] С учётом того, что в [4] величина $\mathbf{u}$, с точностью до знака минус, есть начальная скорость $\mathbf{v}$ системы s относительно лабораторной системы отсчёта $S : (T, \mathbf{R})$ $(\mathbf{u} = -\mathbf{v})$.

2. Закон движения точек равноускоренной системы координат

Определим сейчас движение точек системы координат равноускоренной системы с течением лабораторного времени как некоторую функцию $\mathbf{R} = \mathbf{R}\,(\mathbf{r}, T)$ собственных координат $\mathbf{r}$ и лабораторного времени T. Для этого выразим величину $\mathrm{sh}Wt + v_1\,\mathrm{ch}Wt$ в (1.7) через T и $\mathbf{r}$. Получим

$$\mathrm{sh}Wt + v_1\,\mathrm{ch}Wt = \frac{\sqrt{1-v^2}\;WT - Wv_3r_3 + v_1}{1+Wr_1}\;. \tag{2.1}$$

Данное уравнение требуется решить относительно гиперболических синуса и косинуса, чтобы подставить их значения в (1.8)-(1.10). Заменой $\mathrm{ch}Wt = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2Wt}$ оно приводится к квадратному уравнению относительно $\mathrm{sh}Wt$. Обозначим

$$\sqrt{(1-v_1^2)\,(1+Wr_1)^2 + \left\{\sqrt{1-v^2}\;WT - Wv_3r_3 + v_1\right\}^2} = A\;. \tag{2.2}$$

Тогда решение (2.1) есть

$$\mathrm{sh}Wt = \frac{\sqrt{1-v^2}\;WT - Wv_3r_3 + v_1 \mp v_1A}{(1-v_1^2)\,(1+Wr_1)}\,, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{ch}Wt = \frac{\pm A - v_1\left(\sqrt{1-v^2}\;WT - Wv_3r_3 + v_1\right)}{(1-v_1^2)\,(1+Wr_1)}\,. \tag{2.4}$$

С ростом времени T должно расти и t. Поскольку при увеличении T функция $\left(A - v_1\sqrt{1-v^2}\;WT\right)$ как раз возрастает (смотри ниже уравнение (2.10)), то в (2.3), (2.4) из возможного плюса или минуса мы должны брать верхние знаки. Учитывая это обстоятельство, подставим сейчас (2.3), (2.4) в (1.8)–(1.10). После приведения подобных членов получим

$$R_1 = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_1\,v_3^2}{1-v_1^2}\;T + \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v_1^2)W}\;A + \frac{\sqrt{1-v^2}(1-\sqrt{1-v^2})}{v^2}\cdot\frac{v_1v_3}{1-v_1^2}\;\;r_3 -$$

$$-\frac{v_1^2\sqrt{1-v^2}+v_3^2}{Wv^2(1-v_1^2)}\,, \tag{2.5}$$

$$R_3 = \frac{v_3}{1-v_1^2}\cdot\frac{v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v^2}\;T - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_1v_3A}{(1-v_1^2)W} + \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}}{1-v_1^2}\;\;r_3 +$$

$$+\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{Wv^2(1-v_1^2)}\,v_1v_3\,. \tag{2.6}$$

Это и есть закон, по которому двигаются точки системы координат равноускоренной системы отсчёта. Подставив сюда $r_1 = r_3 = 0$, найдём закон движения начала отсчёта

$$R_1 = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_3^2\,v_1}{1-v_1^2}\;T + \frac{v_1^2\sqrt{1-v^2}+v_3^2}{(1-v_1^2)Wv^2}\;\;(A_0-1\;)\;, \tag{2.7}$$

$$R_3 = \frac{v_3}{1-v_1^2}\cdot\frac{v_1^2\sqrt{1-v^2}+v_3^2}{v^2}\;T - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{W\,v^2}\;\cdot\frac{v_1v_3}{1-v_1^2}\,(A_0-1)\;, \tag{2.8}$$

где

$$A_0 = \sqrt{1+2v_1\sqrt{1-v^2}\;WT + (1-v^2)W^2T^2}\,. \tag{2.9}$$

В пределе малого времени T ускорения

$$A_0 \,\approx\, 1 + v_1\sqrt{1-v^2}\;WT + \frac{(1-v_1^2)(1-v^2)}{2}\;W^2T^2\,. \tag{2.10}$$

В этом случае

$$R_1 = v_1 T + \left(1 - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\ v_1^2\right) \frac{(1-v^2)}{2}\, WT^2\,, \tag{2.11}$$

$$R_3 = v_3 T - \frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)(1-v^2)}{2\,v^2}\, v_1 v_3 W T^2\,. \tag{2.12}$$

Если к тому же рассматривается классический случай, то восстанавливая в (2.11), (2.12) c и переходя к пределу $c \to \infty$ получим, что

$$R_1 = v_1 T + \frac{WT^2}{2}\ , \tag{2.13}$$

$$R_3 = v_3 T\,. \tag{2.14}$$

как и должно быть.

Если T очень большое, то

$$A_0 \to \sqrt{1-v^2}\ WT + v_1 \tag{2.15}$$

и

$$R_1 \to \left[\left(1-\sqrt{1-v^2}\right) v_1 v_3^2 + \sqrt{1-v^2}\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)\right] \frac{T}{v^2(1-v_1^2)} - \frac{v_1^2\sqrt{1-v^2}+v_3^2}{W(1-v_1^2)\,v^2}\,, \tag{2.16}$$

$$R_3 \to \left[v_1^2\sqrt{1-v^2} + v_3^2 - \sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right) v_1\right] \frac{v_3\,T}{v^2(1-v_1^2)} - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{Wv^2}\cdot\frac{v_3\,v_1}{1-v_1^2}\,. \tag{2.17}$$

Найдём теперь скорость движения точек системы координат $V_\alpha = \partial R_\alpha/\partial T$. Учитывая, что

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{W\sqrt{1-v^2}(\sqrt{1-v^2}\ WT - Wv_3 r_3 + v_1)}{A}, \tag{2.18}$$

дифференцирование (2.5), (2.6), (1.9) даёт

$$V_1 = \frac{\sqrt{1-v^2}\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2(1-v_1^2)} \cdot \frac{\sqrt{1-v^2}\ WT - Wv_3 r_3 + v_1}{A} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_3^2 v_1}{1-v_1^2}\,, \tag{2.19}$$

$$V_2 = 0\,, \tag{2.20}$$

$$V_3 = \frac{v_3\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2(1-v_1^2)} - \frac{\sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2}\,\frac{v_1 v_3}{(1-v_1^2)}\cdot\frac{\sqrt{1-v^2}\ WT - Wv_3 r_3 + v_1}{A}\,. \tag{2.21}$$

Удобно ввести новое обозначение

$$B = \sqrt{1-v^2}\ WT + v_1\,. \tag{2.22}$$

Тогда формулы (2.19), (2.21) для начала отсчёта ($\mathbf{r} = 0$) немного упрощаются

$$V_1 = \frac{\sqrt{1-v^2}\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2(1-v_1^2)} \cdot \frac{B}{A_0} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\cdot\frac{v_3^2 v_1}{1-v_1^2}\,, \tag{2.23}$$

$$V_2 = 0\,, \tag{2.24}$$

$$V_3 = \frac{v_3\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2(1-v_1^2)} - \frac{\sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2}\frac{v_1 v_3}{(1-v_1^2)} \cdot \frac{B}{A_0}\,. \tag{2.25}$$

Из этого выражения видно любопытное следствие. Если $v_1 = 0$, то для равноускоренного движения проекция скорости начала отсчёта на ось 3 остаётся постоянной всё время движения, точно также, как это происходит и в классическом случае.

Интересно сравнить полученную скорость начала равноускоренной системы отсчёта (2.23)–(2.25) со скоростью начала системы движущейся в однородном поле $\mathbf{V}_f$. Выражение для $\mathbf{V}_f$ находится в [2, с. 130, формула без номера после (19.12) и правая формула (19.11)]. После некоторых очевидных преобразований можно получить, что компоненты этой скорости равны (в обозначениях этой статьи)

$$V_{f1} = \frac{B}{A_0}\,, \qquad V_{f2} = 0\,, \qquad V_{f3} = \frac{v_3}{A_0}\,. \tag{2.26}$$

Сравнение (2.23)–(2.25) и (2.26) приводит к выводу, что они совпадают друг с другом только в том случае, если $v_3 = 0$.

Скорость начала системы отсчёта $\mathbf{V}$ для очень большого времени T будет стремиться к скорости света. В этом случае используя формулы (2.16), (2.17) получим, что её компоненты (или, если угодно, компоненты направления скорости) равны

$$V_1 \to \frac{1}{v^2(1-v_1^2)}\left[\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1 v_3^2 + \sqrt{1-v^2}\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)\right]\,, \tag{2.27}$$

$$V_3 \to \frac{v_3}{v^2(1-v_1^2)}\left[v_1^2\sqrt{1-v^2} + v_3^2 - \sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1\right]\,. \tag{2.28}$$

3. Кинематическое сокращение участка системы координат

Используя равенства (1.9), (2.5) и (2.6) можно легко вычислить кинематическое сокращение вектора $\mathbf{r}$ в лабораторной системе. Надо из вектора $\mathbf{R}$ положения данной точки в момент T вычесть вектор смещения начала отсчёта ($\mathbf{r} = 0$) к этому моменту. Получим, что соответствующая длина $\mathbf{L}$ равна

$$L_1 = \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v_1^2)W}\,(A - A_0) + \frac{\sqrt{1-v^2}(1-\sqrt{1-v^2})}{v^2} \cdot \frac{v_1 v_3}{1-v_1^2}\,\; r_3\,, \tag{3.1}$$

$$L_2 = r_2\,, \tag{3.2}$$

$$L_3 = -\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2} \cdot \frac{v_1 v_3}{(1-v_1^2)W}(A - A_0) + \frac{\sqrt{1-v^2}}{v^2} \cdot \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{1-v_1^2}\; r_3\,. \tag{3.3}$$

Если рассматривается область вблизи начала отсчёта, то данные равенства можно несколько упростить. Поскольку с точностью до первых степеней по r_α включительно

$$A = A_0 - \frac{B}{A_0}\,W v_3\, r_3 + \frac{(1-v_1^2)\,W r_1}{A_0}\,, \tag{3.4}$$

то

$$L_1 = \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v^2 A_0} \cdot r_1 - \frac{v_3}{v^2(1-v_1^2)}\left[\frac{\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\,\right)B}{A_0} - \sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)\,v_1\right] r_3\,, \tag{3.5}$$

$$L_2 = r_2\,, \tag{3.6}$$

$$L_3 = -\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1v_3}{v^2A_0}\cdot r_1 + \frac{1}{v^2(1-v_1^2)}\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1v_3^2B}{A_0} + \sqrt{1-v^2}\left(v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)\right]r_3, \tag{3.7}$$

где A_0 и B удовлетворяют равенствам (2.9) и (2.22).

Для большого времени T получим, что

$$L_1 \to -\frac{v_3}{v^2(1-v_1^2)}\left[v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}-\sqrt{1-v^2}\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1\right]r_3\,, \tag{3.8}$$

$$L_3 \to \frac{1}{v^2(1-v_1^2)}\left[\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)v_1v_3^2+\sqrt{1-v^2}\left(v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)\right]r_3\,. \tag{3.9}$$

Сравним сейчас равенства (3.5)-(3.7) с обычной формулой лоренцевского сокращения

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} - \frac{1-\sqrt{1-V^2}}{V^2}\,(\mathbf{Vr})\,\mathbf{V}\ . \tag{3.10}$$

Для большого времени T множитель, зависящий от V в последнем слагаемом равенства (3.10), обращается в 1. Поэтому ясно, что L_1, L_3 должны стремиться к пределам

$$L_1 \to (1-V_1^2)\,r_1 - V_1V_3\,r_3\,,\quad L_3 \to (1-V_3^2)\,r_3 - V_1V_3\,r_1\,, \tag{3.11}$$

а фактически предельные равенства (3.8), (3.9) есть

$$L_1 \to -V_3\,r_3\,,\quad L_3 \to V_1\,r_3\,, \tag{3.12}$$

где V_1 и V_3 в этих формулах являются правой частью соответственно (2.27) и (2.28). Таким образом различие асимптот (3.11) и (3.12) очевидно. Значит можно сделать вывод, что и более точное выражение (3.5), (3.7) для длины линейки равноускоренной системы отсчёта отличается от лоренцевской формулы (3.10).

Из (3.12) в частности следует, что предельные размеры ускоренного тела в лабораторной системе совсем не зависят от собственных размеров в направлении собственного ускорения. Кроме того, используя (3.12) нетрудно проверить, что

$$\mathbf{VL} = V_1L_1 + V_2L_2 + V_3L_3 \to 0\,. \tag{3.13}$$

Это означает, что продольные (в направлении движения) размеры ускоренного тела в предельном случае отсутствуют.

4. Траектория начала равноускоренной системы отсчёта

Определим сейчас уравнение траектории, по которой движется начало системы отсчёта s. Общий метод заключается в определении T в одном уравнении из (2.7), (2.8) и подстановке его в другое. Проще, однако, поступить по-другому. Вычислим значение A_0 в уравнениях (2.7), (2.8). Получим, соответственно, что

$$A_0 = \alpha_1WR_1 - \beta_1WT + 1\,, \tag{4.1}$$

$$A_0 = \beta_2WT - \alpha_2WR_3 + 1\,, \tag{4.2}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{v^2(1-v_1^2)}{v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}}\,,\quad \beta_1 = \frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\,\right)v_3^2v_1}{v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}}\,, \tag{4.3}$$

$$\alpha_2 = \frac{v^2(1-v_1^2)}{\left(1-\sqrt{1-v^2}\,\right)v_1v_3}\,,\quad \beta_2 = \frac{v_3^2+v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v_1\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}\,. \tag{4.4}$$

Приравняем (4.1) и (4.2) друг другу и вычислим значение WT. Получим, что

$$WT = \frac{\alpha_1}{\beta_1+\beta_2} WR_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_1+\beta_2} WR_3 \,. \tag{4.5}$$

Подставив сейчас это значение обратно в (4.1) или в (4.2), легко получить, что

$$A_0 = \frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2}\; WR_1 - \frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\; WR_3 + 1\,. \tag{4.6}$$

После подстановки значений α_1, α_2, β_1, β_2 и приведения подобных членов получим, что

$$A_0 = \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v^2}\; WR_1 - \frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\,\right) v_3 v_1}{v^2}\; WR_3 + 1\,, \tag{4.7}$$

$$WT = \frac{v_1\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)}{v^2} WR_1 + \frac{v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}}{v_3 v^2} WR_3 \,. \tag{4.8}$$

Учитывая (4.7), подставим (4.8) в (2.9). После возведения получившегося равенства в квадрат и упрощения получим, что

$$\alpha_{11}(WR_1)^2 + 2\alpha_{12}(WR_1)(WR_3) + \alpha_{22}(WR_3)^2 + 2\alpha_{13}WR_1 + 2\alpha_{23}WR_3 + \alpha_{33} = 0\,, \tag{4.9}$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)^2 - v_1^2(1-v^2)\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^2}{v^4}\,, \tag{4.10}$$

$$\alpha_{12} = -\frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)(1-v_1^2)v_1}{v^4 v_3}\,, \tag{4.11}$$

$$\alpha_{22} = \frac{\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^2 v_1^2 v_3^4 - (1-v^2)\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)^2}{v^4 v_3^2}\,, \tag{4.12}$$

$$\alpha_{13} = 1 - v_1^2\,,\;\; \alpha_{23} = -\frac{v_1(1-v_1^2)}{v_3}\,,\;\; \alpha_{33} = 0\,. \tag{4.13}$$

Как известно [5, стр. 65], кривая такого вида является кривой второго порядка. Данная кривая – невырожденна, поскольку при вычислении соответствующего определителя оказывается, что его значение

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \frac{(1-v_1^2)^2}{v^4\, v_3^2}\left[\, v^4(1-v^2)(1-v_1^2) + 2\sqrt{1-v^2}\; v_1^2(v_3^4 + 2v_1^2 v_3^2 + v_1^2 v_3^4)\,\right] > 0\,. \tag{4.14}$$

Конкретный вид кривой зависит от знака определителя D

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}\,. \tag{4.15}$$

Его вычисление даёт, что

$$D = -\frac{\left(v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\right)^2(1-v^2)}{v^8 v_3^2}\left[2\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^2 v_1^2 v_3^2 + v_3^2 + v_1^2\sqrt{1-v^2}\;\right] -$$

$$-\frac{(1-v^2)\left(1-\sqrt{1-v^2}\right)^4 v_1^4 v_3^4}{v^8 v_3^2} < 0\,. \tag{4.16}$$

Следовательно, в теории относительности траектория, по которой движется начало равноускоренной системы отсчёта является гиперболой.

Рассмотрим теперь предельный переход уравнения траектории (4.9)–(4.13) к классической кинематике. Для этого необходимо восстановить в значениях коэффициентов c и перейти к пределу $c \to \infty$. Получим

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = 0\,, \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{v_3^2}\,, \quad \alpha_{13} = 1\,, \quad \alpha_{23} = -\frac{v_1}{v_3} \tag{4.17}$$

и, следовательно, в классическом случае уравнение гиперболы переходит в уравнение параболы

$$2\,WR_1 - \frac{2\,v_1}{v_3}\,WR_3 - \frac{1}{v_3^2}\,(WR_3)^2 = 0\,. \tag{4.18}$$

Заключение

В данной статье были рассмотрены свойства наиболее общего равноускоренного движения. Неожиданно оказалось, что свойства такого движения значительно отличаются от свойств прямолинейного равноускоренного движения. Удивляет, в частности, заключение раздела 3, что длина линейки равноускоренной системы отсчёта (3.5)–(3.7) не удовлетворяет известной формуле сокращения Фитцджеральда – Лоренца (3.10). Однако, неоднократная проверка математических выкладок и рассуждений вынуждает согласиться с выводом, что противоречие (3.5)–(3.7) и (3.10) видимо закономерно и требует комментариев. Объяснению этого парадокса будет посвящена следующая статья.

Кроме того, были получены: закон движения точек равноускоренной системы отсчёта с течением лабораторного времени (2.5), (2.6) или в другой форме (2.19)–(2.21) и уравнение траектории начала равноускоренной системы отсчёта (4.9)–(4.13).

Напоследок сделаем замечание, касающееся принятой терминологии. Обычно движение системы отсчёта в однородном силовом поле называется гиперболическим. Исторически, образование данного термина связано с тем, что уравнение прямолинейного движения в равносиловом поле в плоскости (R_1, T) изображается гиперболой. Однако, как показано в данной статье, в обычном пространстве двигается по гиперболе начало не системы отсчёта, находящейся в однородном поле, а равноускоренной системы. Поэтому первоначально данное название для равносилового движения из-за вероятной путаницы представляется неудачным. Возможно имеет смысл оставить название гиперболического движения за движением равноускоренной системы отсчёта, а, например, о движении заряда в однородном электрическом поле говорить как о движении по цепной линии («цепном движении»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паули В. Теория относительности. М.: Наука, 1991. 328 с.
2. Логунов А.А. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы. М.: Наука, 1987. 272 с.
3. Møller C. On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox // Det kgl. Danske videnskabernes selskab matematisk-fysiske meddelelser. 1943. № 2 (19). P. 3–24.
4. Войтик В.В. Некоторые способы вычисления параметров криволинейного равноускоренного движения // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 2. С. 38–47.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.

Поступила в редакцию 05.05.2016

Войтик Виталий Викторович, ст. преподаватель, Башкирский государственный медицинский университет, 450000, Россия, г. Уфа, ул. Ленина, 3.
E-mail: voytik1@yandex.ru

V. V. Voytik

Some geometric consequences of curvilinear uniformly accelerated motion

Keywords: uniformly accelerated motion, hyperbolic motion, proper acceleration, trajectory, Fitzgerald - Lorentz contraction.

PACS: 03.30.+p

The starting point of this paper is to transform into a curvilinear moving uniformly accelerated frame of reference, which was obtained in the previous paper. With this transformation the law of the motion points uniformly accelerated frame of reference s is determined as a function of laboratory time. Also the velocity of motion of points s is determined. The length ruler of its coordinate system is calculated. It turned out that this length is different from the commonly accepted length calculated by the formula Fitzgerald - Lorentz. In addition, the equation of the trajectory along which moves origin of frame reference s is obtained. This trajectory is hyperbole.

REFERENCES

1. Pauli W. *Teoriya otnositelnosti* (Theory of Relativity), Moscow: Nauka, 1991, 328 p.
2. Logunov A.A. *Lekcii po teorii otnositel'nosti i gravitacii: Sovremennyj analiz problemy* (Lectures on the Theory of Relativity and Gravitation: Modern Analysis of the problem), Moscow: Nauka, 1987, 272 p.
3. Møller C. On Homogeneous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox, *Det kgl. Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-Fysiske Meddelelser*, 1943. no. 2 (19), pp. 3–24.
4. Voytik V.V. Some ways parameter calculation curvilinear uniformly accelerated motion, *Space, time and fundamental interactions*, 2015, no. 2, pp. 38–47.
5. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, New York: Dover, 2000.

Received 05.05.2016

Voytik Vitaliy Victorovich, Senior Lecturer, Bashkir State Medical University, st. Lenin, 3, Ufa, 450000, Russia.
E-mail: voytik1@yandex.ru