

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев¹

СТАНДАРТНАЯ КОСМОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ, КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ²

Проведен всесторонний анализ основных положений стандартной космологической модели (СКМ), основанной на классическом массивном скалярном поле. Показана математическая некорректность решений этой модели, приводящих к устойчивому инфляционному режиму расширения. На основе качественного анализа системы дифференциальных уравнений стандартной космологической модели доказано, что эта система имеет устойчивый центр, соответствующий нулевым значениям потенциала и его производной на бесконечности. Таким образом, космологическая модель, основанная на одном массивном классическом скалярном поле в бесконечном будущем дает плоскую Вселенную. Проведенное численное моделирование динамической системы, соответствующей системе уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона, показало, что при больших временах эволюции инвариантное космологическое ускорение имеет колебательный характер, меняя свои значения от -2 (торможение), до $+1$ (ускорение). При этом среднее значение космологического ускорения отрицательно и равно $-1/2$. Эти колебания космологического ускорения проходят на фоне быстро падающей величины постоянной Хаббла.

Ключевые слова: стандартная космологическая модель, неустойчивость, качественный анализ, численное моделирование, нулевой центр, плоская вселенная

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Уравнения Эйнштейна с космологическим членом

1.1. Пространство - время де Ситтера

В 1917 году А. Эйнштейн модифицировал свою теорию гравитации [1], добавив в уравнения гравитационного поля так называемый космологический член (Λ - член)³:

$$G_k^i = \Lambda \delta_k^i + 8\pi T_k^i. \quad (1.1)$$

В том же году де Ситтер нашел решение этих уравнений для пространства постоянной кривизны [2]:

$$ds^2 = \cos^2\left(\frac{r}{R}\right) dt^2 - dr^2 - R^2 \sin^2\left(\frac{r}{R}\right) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.2)$$

В 1918 Эйнштейн указал на то, что решение де Ситтера (1.2) имеет истинную сингулярность при $r = \pi/2R$ [3]. Это обстоятельство привело его в дальнейшем к отказу от Λ - члена.

Как оказалось в дальнейшем, сингулярность была вызвана неудачным выбором системы отсчета, в которой все пространство не покрывалось световым конусом. В синхронной системе отсчета метрика (1.2) может быть переписана как метрика Фридмана [4]. Соответствующее решение, называемое инфляцией, описывает экспоненциально быстрое расширение Вселенной:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \{d\chi^2 + \varrho^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}; \quad (1.3)$$

$$a(t) = \begin{cases} a_0 H_0^{-1} \cosh H_0 t; & \varrho(\chi) = \sin \chi; & k > 0; \\ a_0 e^{H_0 t}; & \varrho(\chi) = \chi; & k = 0; \\ a_0 H_0^{-1} \sinh H_0 t; & \varrho(\chi) = \text{sh}(\chi); & k < 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

²This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

³Здесь и в дальнейшем принята Планковская система единиц $\hbar = c = G = 1$; метрика имеет сигнатуру $(-1, -1, -1, +1)$, тензор Риччи получается из тензора Римана сверткой первого и третьего индексов.

где k - кривизна трехмерного пространства и

$$H_0 = \sqrt{\Lambda/3}. \quad (1.5)$$

Метрика (1.3) может быть переписана в форме метрики конформно соответствующей пространству постоянной кривизны:

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 + \varrho^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)), \quad (1.6)$$

где

$$a(\eta)d\eta = dt \Leftrightarrow t = \int a(\eta)d\eta \Leftrightarrow \eta = \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.7)$$

1.2. Уравнения Эйнштейна для пустой Вселенной в случае нулевой кривизны

В случае нулевой кривизны $\varrho = r$ метрика Фридмана (1.3) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.8)$$

и единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна для пустой Вселенной принимает форму:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \Lambda \Rightarrow \frac{a'}{a^2} = \sqrt{\Lambda}. \quad (1.9)$$

Решением этого уравнения является:

$$a = \frac{a_0}{1 - a_0\sqrt{\Lambda}(\eta - \eta_0)}. \quad (1.10)$$

Выбирая константу η_0 так, чтобы сингулярное (нулевое) значение масштабного фактора соответствовало значению $\eta = -\infty$ (то есть, $\eta_0 a_0 \sqrt{\Lambda} = 1$), получим

$$a(\eta) = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}\eta}, \quad \eta \in (-\infty, -0). \quad (1.11)$$

С помощью (1.7) найдем соотношение между временной переменной η и физическим временем t . Так бесконечно удаленное прошлое соответствует значению $\eta = -\infty$, и бесконечно удаленное будущее – $\eta = -0$. Интегрируя уравнение (1.6) с помощью решения (1.11), получим

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \ln(-\eta), \Rightarrow \eta \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow -\infty; \eta \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty. \quad (1.12)$$

Таким образом, история де Ситтеровской вселенной не имеет ни начала, ни конца.

В дальнейшем мы примем следующие стандартные обозначения для производных функций по временным переменным:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow f' = a\dot{f}; \quad \dot{f} = \frac{f'}{a}. \quad (1.13)$$

2. Уравнения Эйнштейна для непустой Вселенной

2.1. Тензор энергии - импульса

Учтем теперь вклад материи в правой части уравнений Эйнштейна (1.1). Симметрии метрики по отношению к вращениям и перемещениям трехмерного пространства вследствие уравнений Эйнштейна приводят к аналогичным симметриям тензора энергии - импульса. Поэтому тензор энергии - импульса однородной изотропной вселенной обязан иметь структуру тензора энергии - импульса идеальной жидкости:

$$T_k^i = (\varepsilon + p)\delta_4^i \delta_k^4 - p\delta_k^i. \quad (2.1)$$

Соответственно (2.1) Э.Б. Глинер [5] дал интерпретацию космологическому члену как плотности энергии вакуума с уравнением состояния:

$$\Lambda = \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 + p_0 = 0. \quad (2.2)$$

В результате остаются два независимых уравнения Эйнштейна, одно из которых вследствие тождеств Бианки может быть заменено дифференциальным следствием – законом сохранения энергии:

$$\varepsilon' + 3\frac{a'}{a}(\varepsilon + p) = 0 \Leftrightarrow \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0. \quad (2.3)$$

При заданном уравнении состояния

$$p = p(\varepsilon) \quad (2.4)$$

уравнение (2.3) всегда интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p(\varepsilon)} = -3 \ln a. \quad (2.5)$$

В присутствии материи оставшееся уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3\frac{a'^2}{a^4} = \Lambda + 8\pi\varepsilon \Rightarrow 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda + 8\pi\varepsilon. \quad (2.6)$$

Замечание. Система уравнений (2.3), (2.6) инвариантна по отношению к масштабному преобразованию

$$a(t) \rightarrow \text{Const} \cdot a(t), \quad (2.7)$$

поэтому масштабную функцию $a(t)$ можно положить равной, например, 1 в произвольный, несингулярный, момент физического времени t .

3. Физическая неустойчивость мира де Ситтера

3.1. Неустойчивость по отношению к добавлению вещества

Предположим, что мы введем в мир де Ситтера небольшую порцию вещества, так что:

$$\varepsilon \ll \Lambda; \quad p \approx \left. \frac{dp}{d\varepsilon} \right|_0 \varepsilon \Rightarrow p = \kappa \varepsilon, \quad (3.1)$$

где κ есть так называемый коэффициент баротропы. Тогда из закона сохранения энергии (2.5) найдем, полагая $a_0 = 1$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot a^{-3(1+\kappa)}; \quad (\kappa \neq -1). \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в уравнение Эйнштейна (2.6), мы найдем, полагая $\varepsilon_0 \neq 0$:

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0}{\Lambda}} \sinh \left(\frac{3(1+\kappa)\sqrt{\Lambda}}{2} t \right) \right]^{\frac{2}{3(1+\kappa)}} \sim \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+\kappa)}}, & t \rightarrow 0; \\ e^{\sqrt{\Lambda}t}, & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.3)$$

(инфляция при $t \rightarrow \infty$) и согласно (2.5):

$$\varepsilon \rightarrow \frac{1}{6\pi(1+\kappa)^2 t^2}, \quad (3.4)$$

то есть, при $t \rightarrow 0$ мы получим стандартное космологическое решение с $\Lambda = 0$ для материи с уравнением состояния (3.1).

Что же произошло?

Заметим, во - первых, что начальное значение плотности энергии ε_0 добавленного вещества вообще выпала из формулы для плотности энергии вещества (3.4). Присутствие же этой величины в выражении (3.3) вследствие указанного свойства инвариантности системы уравнений Эйнштейна по отношению к преобразованиям (2.7) может быть устранено путем масштабного преобразования. Поэтому можно утверждать, что формулы космологической модели присутствие вещества определяются лишь уравнением состояния этого вещества, то есть, коэффициентом баратропы k , но при этом не зависят от доли вещества, внесенного в мир де Ситтера. При этом время перехода с “материального режима” расширения на инфляционный, t_λ , вообще не зависит от начальной плотности энергии ε_0 добавленного вещества, а определяется лишь космологической постоянной Λ и уравнением состояния вещества:

$$t_\lambda = \frac{2}{3(1+k)\sqrt{\Lambda}}. \quad (3.5)$$

Во - вторых, мы замечаем еще более “странное” обстоятельство: наличие сколь угодно малого количества вещества с уравнением состояния $\varepsilon + p > 0$ делает конечным прошлое Вселенной: решение уравнений Эйнштейна (3.3) – (3.4) имеет космологическую сингулярность $a = 0$ в момент физического времени $t = 0$. Таким образом, справедливо следующее утверждение [6]:

Утверждение 1. Мир де Ситтера неустойчив по отношению к добавлению любой материальной “примеси” в сколь угодно малом относительном количестве: бесконечное прошлое становится невозможным, первой космологической стадией стадией становится материальная, которая через время t_λ (3.5) переходит в инфляционную стадию.

Примечание. Заметим также, что с вероятностной точки зрения вероятность возникновения абсолютно однородного и изотропного чистого вакуумного состояния среди всех возможных состояний, в том числе, неизотропных и неоднородных, а также допускающих наличие других неоднородных и неизотропных физических полей, строго равна нулю. Мощность множества всех возможных начальных состояний, по крайней мере, не менее $\mathfrak{M}^6$, где $\mathfrak{M}$ есть мощность множества всех действительных чисел. Поэтому космологам для объяснения этого начального состояния не остается ничего другого, как прибегать к так называемым “эстетическим соображениям”. Но как давно известно, эстетические предпочтения различных людей, в том числе, и физиков - теоретиков, могут существенно отличаться⁴. Обращение к эстетическим доводам в формулировке фундаментальных законов природы уместно только тогда, когда результаты математических моделей, построенных на соответствующих принципах, поддаются однозначной экспериментальной проверке.

3.2. Анализ стандартной модели со скалярным вакуумом

3.2.1. Уравнения космологической модели со скалярным вакуумом

В стандартной космологической модели ранней вселенной в качестве модели вакуума рассматривается вакуумное массивное скалярное поле Φ , которому соответствует тензор энергии - импульса:

$$T_k^i = 2\Phi^i\Phi_{,k} - \delta_k^i\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \delta_k^i m^2\Phi^2, \quad (3.6)$$

где m - масса квантов этого поля. Уравнение скалярного поля получается из тождеств Бианки $T_{k,i}^i = 0$:

$$\square\Phi + m^2\Phi = 0, \quad (3.7)$$

где

$$\square\Phi = g^{ik}\Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi \quad (3.8)$$

⁴Здесь уместно вспомнить полемику в начале XX-го века крупнейших физиков вокруг принципиальных вопросов квантовой теории.

есть оператор Д'Аламбера. Для однородной вселенной $\Phi = \Phi(t)$, и тензор энергии - импульса скалярного поля принимает изотропную структуру (2.1), где

$$\varepsilon = \dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2; \quad p = \dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2, \quad (3.9)$$

так что

$$\varepsilon + p = 2\dot{\Phi}^2, \quad (3.10)$$

а уравнение поля (3.7) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0. \quad (3.11)$$

В тоже время единственное независимое уравнение Эйнштейна есть:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (3.12)$$

Примечание. Заметим, что если бы $\dot{\Phi} = 0$, то согласно (3.9), мы получили бы вакуумное уравнение состояния $\varepsilon + p = 0$. В этом случае скалярное поле могло бы играть роль эффективного космологического члена.

3.2.2. Приближение медленного скатывания

Стандартная модель основана на так называемом *приближении медленного скатывания* в уравнениях (3.11) и (3.12) (см., например, [7])⁵:

$$|\dot{H}| \ll H^2 \Leftrightarrow |\Omega - 1| \ll 1, \quad (3.13)$$

где $H(t)$ – постоянная Хаббла

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2}, \quad (3.14)$$

и

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (3.15)$$

есть инвариантное космологическое ускорение. Таким образом, приближение медленного скатывания эквивалентно наложению условия на вторые производные масштабного фактора:

$$a\ddot{a} = \dot{a}^2. \quad (3.16)$$

Соотношение (3.16) является автономным дифференциальным уравнением на масштабный фактор. Производя простейшее преобразование:

$$\ddot{a} \equiv \frac{d\dot{a}}{da}\dot{a}, \quad (3.17)$$

приведем его к виду:

$$\frac{d\dot{a}}{\dot{a}} = \frac{da}{a}$$

и найдем его решение:

$$\dot{a} = Ca,$$

где C – произвольная постоянная. Интегрируя еще раз это соотношение, получим инфляционное решение для масштабного фактора:

$$a(t) = a_1 e^{Ct}. \quad (3.18)$$

В этом случае:

$$H = H_0 = C; \quad \Omega = 1. \quad (3.19)$$

⁵Мы выписываем здесь основные соотношения стандартной космологической модели для случая простейшего потенциала $V(\Phi) = m^2\Phi^2$

Утверждение 2. Таким образом, так называемое приближение медленного скатывания (3.13) полностью эквивалентно предположению о том, что решение уравнений Эйнштейна является асимптотически инфляционным:

$$\ddot{H} \ll \dot{H}^2 \Leftrightarrow a(t) \propto e^{H_0 t}. \quad (3.20)$$

3.2.3. Решение системы уравнений в приближении медленного скатывания

Теперь надо выяснить, как получить инфляционное решение (3.18) в качестве *асимптотического решения* уравнения Эйнштейна (3.12). Прямая подстановка (3.18) в уравнение Эйнштейна (3.12) приводит к равенству:

$$3H_0^2 = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (3.21)$$

Поскольку левая часть равенства (3.21) постоянна, а правая является суммой квадратов двух функций, общим решением (3.21) является следующее:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{H_0}{m}} \sin \psi(t); \quad \dot{\Phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi} \frac{H_0}{m}} \cos \psi(t), \quad (3.22)$$

где $\psi(t)$ – пока произвольная функция. Вычисляя $\dot{\Phi}$ дифференцированием первого из соотношений (3.22) и сравнивая результат со вторым, найдем: $\dot{\psi} = 1 \rightarrow \psi = t$. Подставляя полученный результат в уравнение поля (3.11), мы, естественно, придем к соотношению $H_0/m = 0$, откуда получим для постоянной C в соотношении (3.19) единственно возможное решение, строго соответствующее приближению медленного скатывания и отвечающее пустому евклидовому пространству $C = H_0 = 0$, $\Phi = 0$.

Утверждение 3. Таким образом, прямое применение приближения медленного скатывания не дает нужного результата: строго говоря, приближение медленного скатывания дает лишь тривиальное решение системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона:

$$\Omega - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow H = 0; \quad \Phi = 0. \quad (3.23)$$

3.2.4. Приближение малой массы

Поэтому в стандартной космологической модели для обеспечения ранней инфляции обычно используется еще одно приближение – приближение малой массы квантов скалярного поля:

$$m^2 \ll \frac{\dot{a}^2}{a^2} \equiv H^2. \quad (3.24)$$

В этом случае должно выполняться и условие:

$$m^2\Phi \ll \ddot{\Phi} \leftrightarrow m^2\Phi \ll \frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi}. \quad (3.25)$$

В этом приближении уравнение скалярного поля (3.11) принимает вид

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0 \quad (3.26)$$

и его *частное решение*, приводящее к де Ситтеровскому вакууму, есть

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}. \quad (3.27)$$

При этом согласно (3.9) получим:

$$\varepsilon = -p = m^2\Phi_0^2 = \text{Const}. \quad (3.28)$$

Подставляя это решение в уравнение Эйнштейна (3.12) и решая его, получим инфляционное решение:

$$a(t) = a_1 e^{H_0 t}, \quad H_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} m |\Phi_0|. \quad (3.29)$$

Решение (3.27) – (3.29) мы будем называть *стандартным решением* уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона соответственно его центральной роли в современном стандартном космологическом сценарии. В этой стандартной модели начало Вселенной, соответствующее космологической сингулярности $a = 0$, находится в бесконечно удаленном прошлом:

$$a(-\infty) = 0. \quad (3.30)$$

Заметим, что уравнение Эйнштейна (3.12) в рассматриваемой модели имеет вид:

$$H^2 = H_0^2, \quad (3.31)$$

поэтому согласно (3.29) условие (3.24) эквивалентно условию:

$$|\Phi_0| \gg \sqrt{\frac{3}{8\pi}}, \quad (3.32)$$

то есть, *выполняется только для очень больших значений потенциала скалярного поля.*

Совершим теперь следующую итерацию для учета массивного члена в уравнении поля (3.11). Для этого подставим инфляционное решение уравнение Эйнштейна (3.29) в исходное уравнение скалярного поля (3.11)

$$\ddot{\Phi} + 3H_0 \dot{\Phi} + m^2 \Phi = 0 \quad (3.33)$$

и найдем его точное решение:

$$\Phi = C_1 \exp\left[-\frac{1}{2}(3H_0 + \sqrt{9H_0^2 - 4m^2})t\right] + C_2 \exp\left[-\frac{1}{2}(3H_0 - \sqrt{9H_0^2 - 4m^2})t\right], \quad (3.34)$$

в котором затем учтем условие (3.24). В результате получим:

$$\Phi \approx C_1 e^{-3H_0 t} + C_2 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t}. \quad (3.35)$$

Первый член в этом решении быстро затухает при $t \rightarrow +\infty$, а второй член при условии малых значений временной переменной

$$|mt| \ll \frac{3H_0}{m} \equiv \sqrt{3}|\Phi_0| \quad (3.36)$$

остаётся приблизительно постоянным. Именно этот член и создает модель постоянного скалярного поля. Поэтому в согласии более точной модели “постоянного” скалярного поля в приближении (3.24) мы должны положить:

$$\Phi \approx \Phi_0 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t}. \quad (3.37)$$

Используя полученное решение вместо стандартного (3.27), проверим выполнение исходного условия (3.25) (условие (3.24), как мы видели, сводится к условию (3.32) на величину скалярного потенциала):

$$\ddot{\Phi} \gg m^2 \Phi \rightarrow 9H_0^2 \ll m^2; \quad (3.38)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} \dot{\Phi} \gg m^2 \Phi \rightarrow \frac{1}{3} \gg 1. \quad (3.39)$$

Таким образом, первое из этих условий, (3.38), грубо противоречит исходному условию (3.24), а второе условие, (3.39), противоречит элементарной логике. Заметим также, что вблизи космологической сингулярности $t \rightarrow -\infty$ этот член экспоненциально быстро стремится к бесконечности, при больших же временах $t \gg 3H_0/m^2$ экспоненциально быстро стремится к нулю $\Phi \rightarrow 0$. Поэтому при условии (3.36) и одновременно $H_0 t \gg 1$ мы получим:

$$\Phi \approx \Phi_0 e^{-\frac{m^2}{3H_0} t} \approx \Phi_0 \gg 1. \quad (3.40)$$

Заметим, что вследствие (3.24) условие (3.36) гораздо слабее условия (3.25), поэтому инфляционное решение справедливо для времен гораздо больших комптоновских для скалярных бозонов:

$$t \ll t_c = \frac{\sqrt{3}|\Phi_0|}{m} \gg \frac{1}{m}. \quad (3.41)$$

Заметим далее, что первый член в решении (3.35) вблизи космологической сингулярности экспоненциально быстро стремится к бесконечности, что уже указывает на неустойчивость решения (3.27).

Заметим, что поскольку мы имеем дело с космологической моделью, описываемой нелинейной системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений (3.11) и (3.12), то приближение медленного скатывания (3.24) должно распространяться на всю систему этих уравнений, а не на одиночное уравнение скалярного поля (3.11). Но в этом случае в уравнении Эйнштейна мы также сразу должны были бы отбросить массивный член, то есть, вместо (3.12) получить уравнение:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\dot{\Phi}^2. \quad (3.42)$$

Но тогда подстановка решения (3.27) в это уравнение дало бы $\dot{\Phi}_0 = 0 \rightarrow a = \text{Const}$, то есть, вместо инфляции мы получили бы плоский мир Минковского. Таким образом, решение (3.27) $\Phi = \Phi_0$ является математически некорректным даже в приближении медленного скатывания.

Какое же решение является правильным в приближении медленного скатывания? Легко найти первый интеграл дифференциального уравнения (3.26):

$$a^3\dot{\Phi} = C_1 = \text{Const}. \quad (3.43)$$

Решение (3.27) соответствует частному выбору константы $C_1 = 0$ в (3.43). Как это часто бывает в теории систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, частные решения, полученные отбрасыванием произвольных констант, оказываются неустойчивыми. Если мы положим в (3.43) $C_1 \neq 0$ и подставим полученный результат в уравнение Эйнштейна (3.12), то как раз в приближении медленного скатывания, то есть, для уравнения (3.42), сразу получим решение

$$a(t) = a_1 t^{1/3}; \quad a_1 = C_1^{1/3} (24\pi)^{1/6}, \quad (3.44)$$

соответствующее предельно - жесткому уравнению состояния $p = \epsilon$, то есть, $\kappa = +1$. Подстановка найденного масштабного фактора (3.44) в первый интеграл (3.43) дает окончательное решение уравнения поля в приближении медленного скатывания [6]:

$$\Phi = C_2 + \frac{1}{\sqrt{24\pi}} \ln t, \quad (3.45)$$

где C_2 – произвольная константа.

Утверждение 4. Таким образом, стандартная модель основана на некорректном решении уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона в приближении медленного скатывания. Корректное решение этих уравнений в приближении медленного скатывания приводит к конечному началу Вселенной с предельно - жестким уравнением состояния вблизи космологической сингулярности.

3.3. Устойчивость стандартного решения

Рассмотрим возмущения стандартной модели, зависящие лишь от времени и вызываемые фактором массы m^2 , которую будем считать величиной одного порядка малости вместе с возмущениями $\delta(t)$ и $\phi(t)$:

$$a(t) = a_0(t)(1 + \delta(t)); \quad (3.46)$$

$$\Phi(t) = \Phi_0(1 + \phi(t)), \quad (3.47)$$

где $a_0(t) = a_1 e^{H_0 t}$, $H_0 = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} m |\Phi_0|$ – стандартное решение (3.29). Подставляя (3.47) в уравнение скалярного поля (3.11) и разлагая полученное уравнение в ряд по малости ϕ, δ, m^2 , в линейном приближении получим уравнение:

$$\ddot{\phi} + 3H_0 \dot{\phi} + m^2 = 0, \quad (3.48)$$

решая которое, найдем (для упрощения записи мы положили $\Phi_0 > 0$):

$$\phi = C_1 + C_2 e^{-3H_0 t} - \frac{m^2}{3H_0} t,$$

причем мы должны положить $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, так как мы ищем не все решения волнового уравнения, а только те, которые исчезают при $m = 0$. Таким образом:

$$\phi = -\frac{m^2}{3H_0} t. \quad (3.49)$$

Возмущение уравнения Эйнштейна в линейном по δ приближении приводит к уравнению:

$$\dot{\delta} = \frac{4\pi}{3H_0} \delta \epsilon. \quad (3.50)$$

Из (3.9) видно, что возмущение плотности энергии квадратично по возмущениям ϕ и m^2 . Подставляя решение (3.49) в уравнение (3.50), получим с учетом (3.29) и (3.32) уравнение на возмущение масштабного фактора:

$$\dot{\delta} = \frac{4\pi\Phi_0^2}{3H_0} \left(\frac{m^4}{9H_0^2} + m^2 \right) \equiv \frac{H_0}{2} \left(1 + \frac{1}{72\pi\Phi_9^2} \right) \approx \frac{H_0}{2} \quad (3.51)$$

и, таким образом, найдем:

$$\delta = \frac{1}{2} H_0 t. \quad (3.52)$$

Для развития инфляции необходимо $H_0 t \gg 1$, таким образом, в течение инфляционного периода *относительное* возмущение масштабного фактора становится большой величиной, следовательно стандартное решение неустойчиво. Это означает неустойчивость инфляционного решения по отношению к фактору массы.

Утверждение 5. Инфляционное решение уравнений Эйнштейна (3.28) – (3.29) неустойчиво по отношению к фактору массы: возмущения метрики и скалярного поля вырастают до бесконечности в бесконечном прошлом.

Последнее утверждение означает, что этого бесконечно удаленного прошлого просто не существовало.

4. Качественный анализ динамической системы СКМ

4.1. Приведение системы уравнений к каноническому виду

Выпишем еще раз систему дифференциальных уравнений СКМ: уравнение поля (3.11)

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0 \quad (4.1)$$

и уравнение Эйнштейна (3.12)

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2). \quad (4.2)$$

Во - первых, произведем масштабирование уравнений, переходя к новой безразмерной временной переменной τ

$$\tau = mt \Rightarrow \dot{f} = mf', \quad (4.3)$$

где $f' = df/d\tau$. Таким образом, получим вместо уравнений (4.1) и (4.2):

$$\Phi'' + 3h\Phi' + \Phi = 0; \quad (4.4)$$

$$3h^2 = 8\pi(\Phi'^2 + \Phi^2), \quad (4.5)$$

где $h(\tau)$ - постоянная Хаббла, измеренная в единицах комптоновского времени:

$$h(\tau) = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}. \quad (4.6)$$

Заметим, что уравнения (4.4) и (4.5) представляют систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую с учетом условия

$$\dot{a} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq 0 \quad (4.7)$$

стандартной заменой можно привести к виду *нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости*:

$$\Phi' = Z(t); \quad (4.8)$$

$$Z' = -3hZ - \Phi, \quad (4.9)$$

где функция $h(\Phi, Z)$ алгебраически определяется из уравнения Эйнштейна с помощью функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$h = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{Z^2 + \Phi^2}. \quad (4.10)$$

Таким образом, окончательно получим систему автономных дифференциальных уравнений динамической системы на плоскости (Φ, Z) :

$$\begin{cases} \Phi' = Z(t); \\ Z' = -\sqrt{24\pi} \sqrt{Z^2 + \Phi^2} Z - \Phi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}. \quad (4.11)$$

Эту систему уравнений можно исследовать с помощью качественной теории дифференциальных уравнений и определить асимптотическое поведение решений при $t \rightarrow \pm\infty$. Важным является следующее свойство СКМ.

Утверждение 6. Эволюция Вселенной в стандартной космологической модели в терминах временной переменной t не зависит от каких-либо параметров и полностью определяется начальными условиями.

4.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы $M_0(x_0, y_0)$ (4.11) определяются нулями производных (см, например, [8]):

$$P(x_0, y_0) = 0; \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что динамическая система (4.11) имеет единственную особую точку:

$$M_0 = (0, 0) \longleftrightarrow \Phi_0 = 0; \quad Z_0 = 0. \quad (4.12)$$

4.3. Тип особой точки

Для определения типа особой точки необходимо найти собственные числа характеристического многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (4.13)$$

где частные производные функций $P(x, y), Q(x, y)$ вычисляются в особой точке M_0 . Вычисляя производные от функций P, Q в (4.11), найдем:

$$Q'_x(0, 0) = \lim_{Z \rightarrow 0} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \left(-2\sqrt{6\pi} \frac{Z\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - 1 \right) = \lim_{\Phi \rightarrow 0} \lim_{Z \rightarrow 0} \left(-2\sqrt{6\pi} \frac{Z\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - 1 \right) = -1;$$

$$\begin{aligned} Q'_y(0, 0) &= -2\sqrt{6\pi} \lim_{Z \rightarrow 0} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \left(\frac{Z^2}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - \sqrt{\Phi^2 + Z^2} \right) \\ &= -2\sqrt{6\pi} \lim_{\Phi \rightarrow 0} \lim_{Z \rightarrow 0} \left(\frac{Z^2}{\sqrt{\Phi^2 + Z^2}} - \sqrt{\Phi^2 + Z^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический многочлен (4.13) равен:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем его корни

$$\lambda = \pm i. \quad (4.14)$$

Поскольку собственные числа оказались чисто мнимыми, то единственная особая точка (4.12) динамической системы (4.11) является центром (см. [8]). В этом случае при $t \rightarrow +\infty$ фазовая траектория динамической системы наматывается на этот центр, совершая бесконечное множество витков.

Утверждение 7. Фазовая траектория динамической системы, основанной на уравнении классического массивного скалярного поля (4.1) и уравнении Эйнштейна (4.2), имеет один центр (4.12), в котором:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow 0. \quad (4.15)$$

Таким образом, вопреки широко распространенному мнению система не переходит в режим постоянной инфляции, а, наоборот, расширение останавливается и Вселенная становится плоской (Рис. 1).

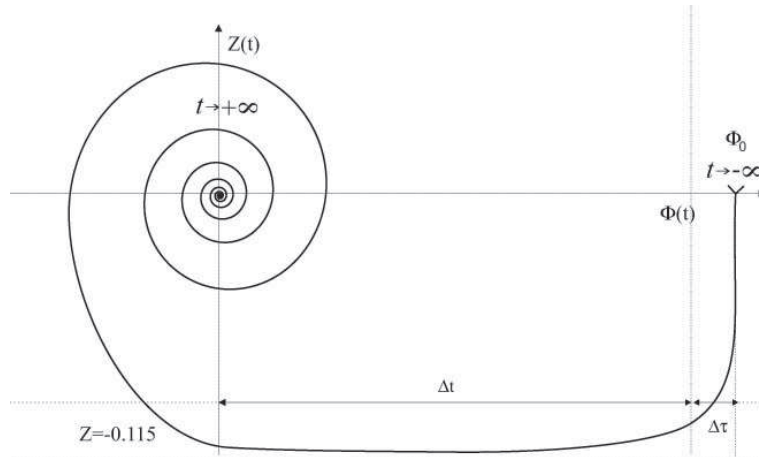


Рис. 1. Качественный вид фазовой траектории динамической системы (4.11).

5. Фазовые портреты динамической системы (4.11)

Необходимо помнить, что временной переменной на всех графиках является τ , то есть, время, измеренное по комптоновской шкале. Поскольку вследствие утверждения 6 эволюция исследуемой динамической системы (4.11) определяется лишь начальными условиями, будем исследовать зависимость деталей эволюции от начальных условий. Далее, примем предположение, согласующееся с СКМ $\Phi_0 = 0$. Приведем сначала результаты численного моделирования фазовых

портретов динамической системы (4.11) при больших начальных значениях потенциала $\Phi_0 \geq 10$. Напомним, что одним из необходимых условий справедливости приближения медленного скачивания является $\Phi_0 \gg 1$ (3.40). Будем исследовать особенности фазовых траекторий в терминах графика на рисунке 1:

1. Начальная стадия длительностью Δt с $\Phi \approx \Phi_0$ – правая часть графика; этой стадии характерно быстрое падение производной потенциала от 0 до «таинственного числа» -0.115 . На самом деле в этом числе ничего таинственного нет:

$$Z_0 = -\frac{1}{\sqrt{24\pi}} \approx -0.1151647165. \quad (5.1)$$

На этой стадии, собственно, и происходит инфляция.

2. Средняя стадия длительностью Δt – средняя часть графика; на этой стадии $Z = \Phi' \approx \text{Const} = Z_0$. На этой стадии происходит падение потенциала до весьма малых величин.
3. Заключительная стадия эволюции с бесконечной длительностью; на этой стадии происходят затухающие колебания потенциала и его производной. При этом Вселенная становится асимптотически плоской.

Ниже на графиках представлены результаты численного моделирования динамической системы (4.11) при различных начальных условиях в лицензионном прикладном математическом пакете MapleXVII. Этот пакет позволяет как строить фазовые портреты двумерных динамических систем, так и проводить численное интегрирование различными методами. В данной работе применен метод Розенброка, хорошо приспособленный к интегрированию жестких систем. Поскольку интересующие нас характерные детали фазовых портретов системы (4.11) имеют непоставимые масштабы, ниже мы представляем фрагменты фазовых портретов на разных временных интервалах.

5.1. Начальные условия: $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

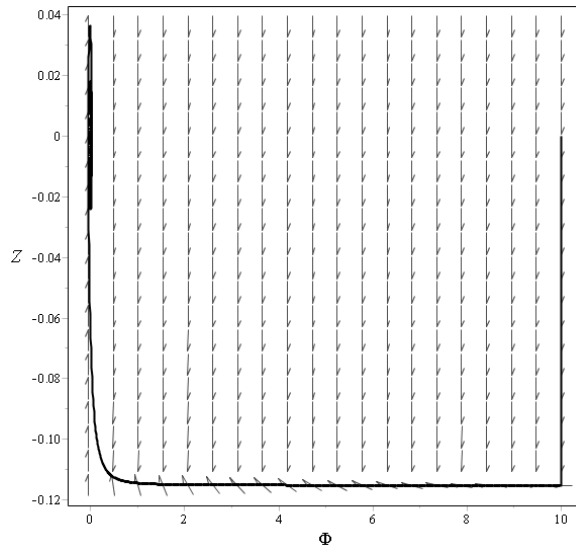


Рис. 2. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (4.11) $\tau \in [-1000, 1000]$.

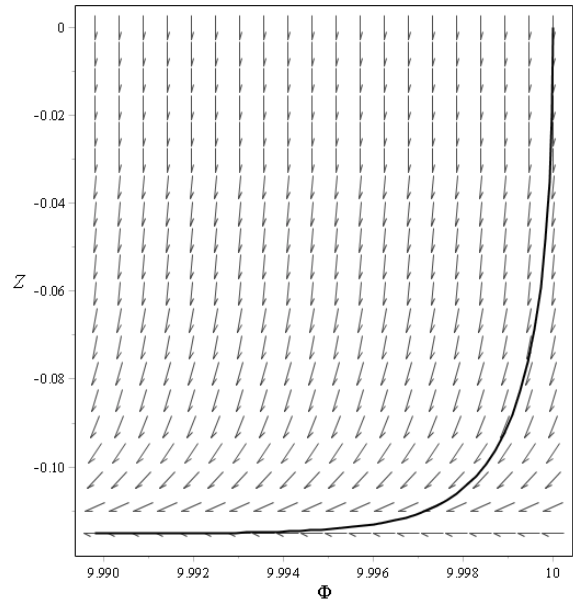


Рис. 3. Начальная стадия спуска динамической системы (4.11) (самая правая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-1000, -999.9]$; $\Delta\tau \lesssim 10^{-1}$.

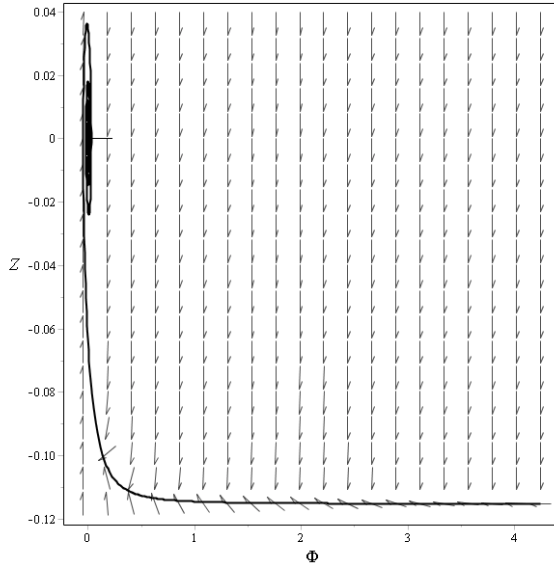


Рис. 4. Средняя стадия динамической системы (4.11) $\Phi' \approx \text{Const} \approx -0.115$ $\tau \in [-950, 100]$.

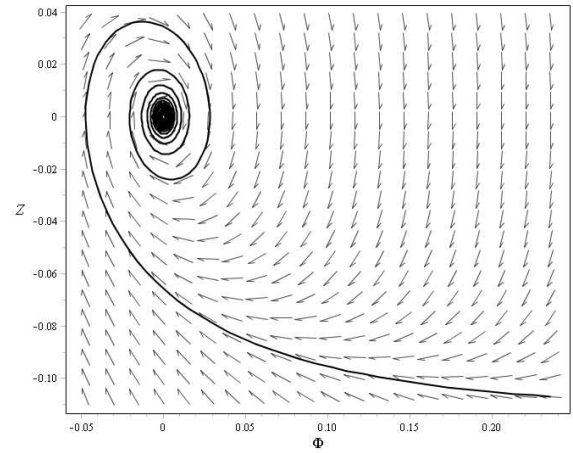


Рис. 5. Накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ динамической системы (4.11) (левая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-915, -700]$.

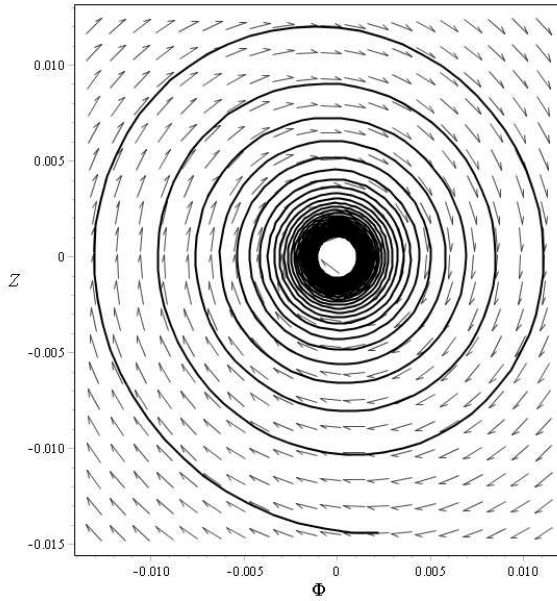


Рис. 6. Конечная стадия динамической системы (4.11): накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-900, -700]$.

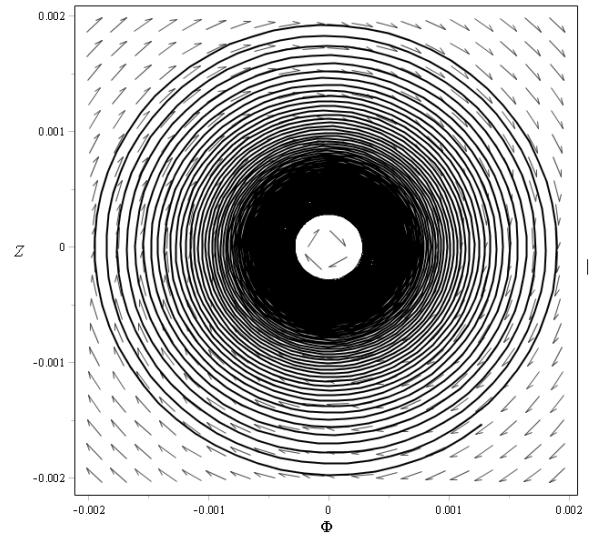


Рис. 7. Конечная стадия динамической системы (4.11): накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ динамической системы (4.11) (левая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-800, -100]$.

5.2. Начальные условия: $\Phi(-1000) = 1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

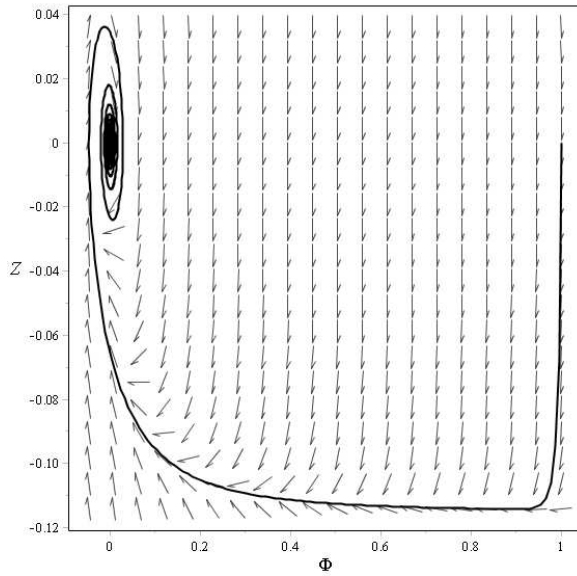


Рис. 8. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (4.11) $\tau \in [-1000, 0]$.

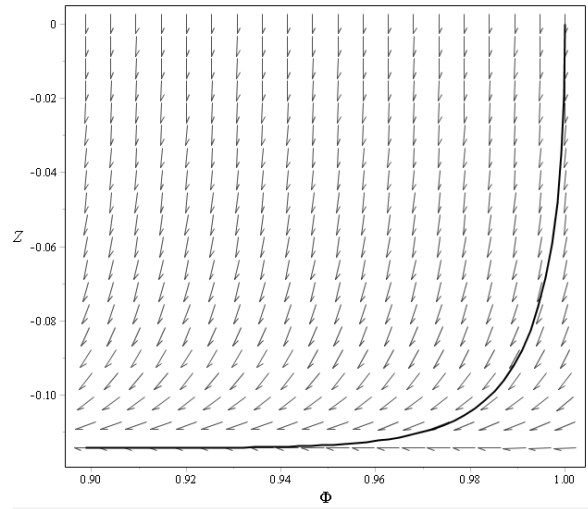


Рис. 9. Начальная стадия спуска динамической системы (4.11) (самая правая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-1000, -999]$; $\Delta\tau \lesssim 1$.

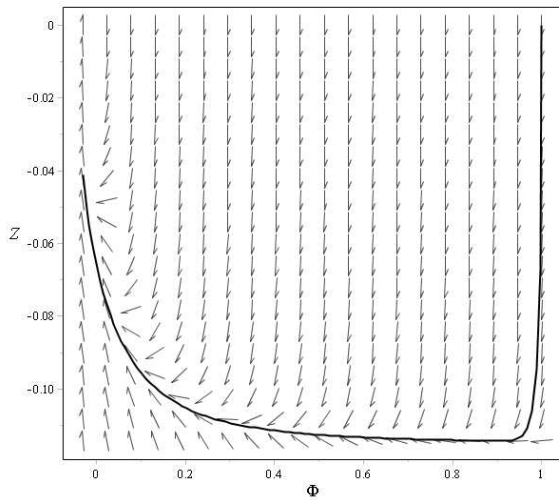


Рис. 10. Средняя стадия динамической системы (4.11) $\Phi' > \text{Const} = -0.115$ $\tau \in [-1000, -990]$.

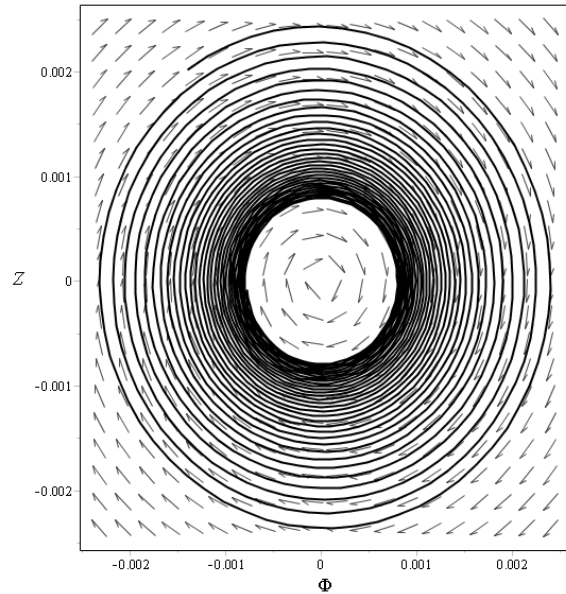


Рис. 11. Накручивание на центр $M_0 = (0, 0)$ динамической системы (4.11) (левая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-950, -850]$.

5.3. Начальные условия: $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$

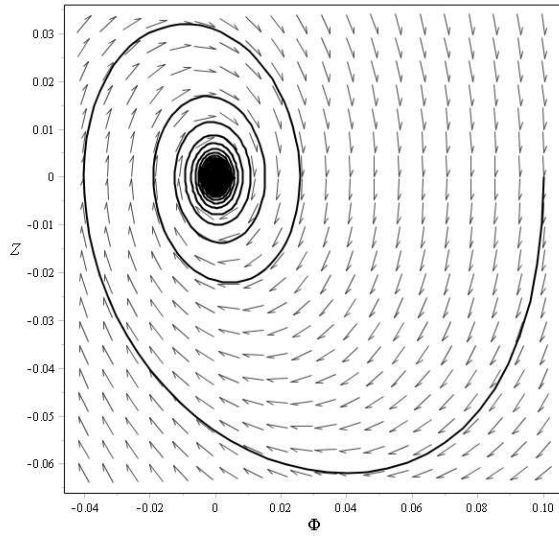


Рис. 12. Крупномасштабный фазовый портрет динамической системы (4.11) $\tau \in [-1000, 1000]$.

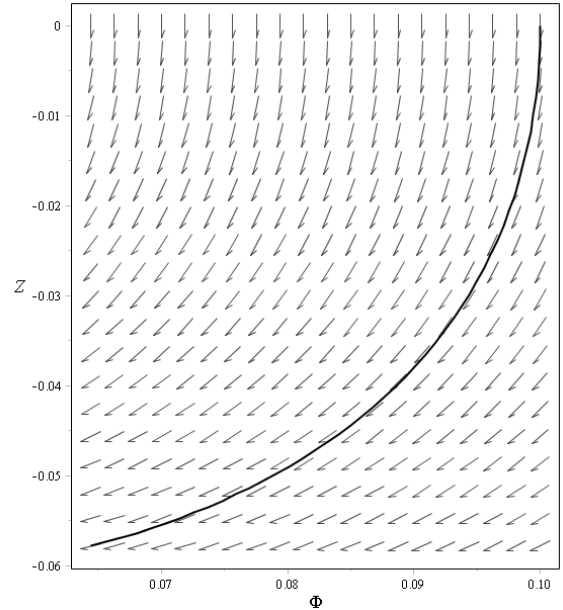


Рис. 13. Начальная стадия спуска динамической системы (4.11) (самая правая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-1000, -999]$; $\Delta\tau \lesssim 1$.

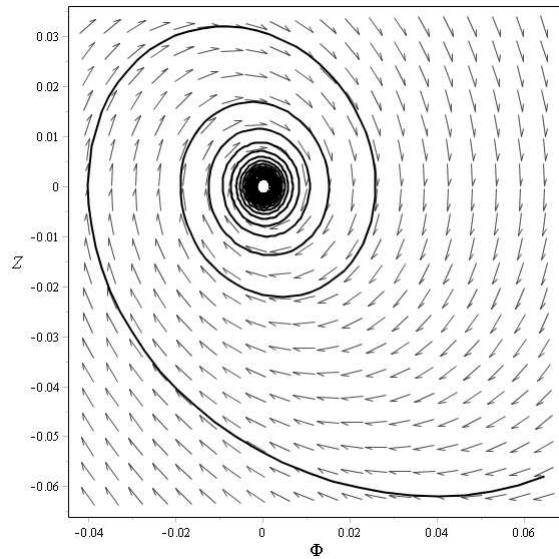


Рис. 14. Средняя стадия динамической системы (4.11) $\Phi' \approx \text{Const} \approx -0.115$ $\tau \in [-999, -850]$.

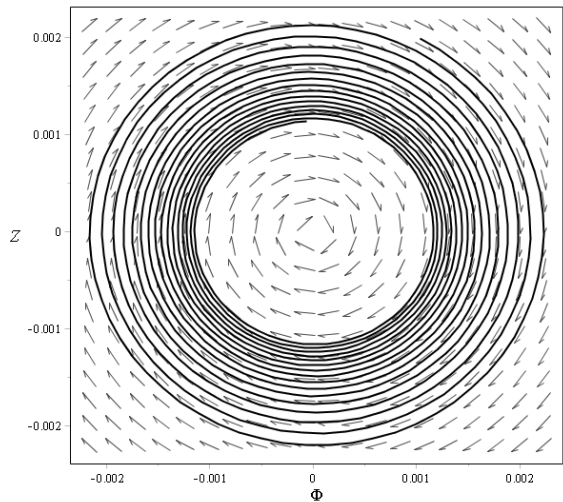


Рис. 15. Накручивание на центр $M_0 = (0,0)$ динамической системы (4.11) (левая часть графика на рисунке 1) $\tau \in [-900, -800]$.

6. Численное интегрирование динамических уравнений

6.1. Эволюция потенциала и его производной

Фазовые портреты динамической системы (4.11), представленные на рисунках 2 – 15, однако, не дают информацию о некоторых деталях космологической эволюции, которые возможно получить лишь прямым численным интегрированием исходной системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона. Ниже мы приведем результаты численного интегрирования этих уравнений

методом Розенброка. Прежде всего приведем крупномасштабный фазовый портрет средней и конечной стадии эволюции космологической модели, полученный прямым численным интегрированием системы уравнений (4.11) и, фактически, полностью воспроизводящий эскиз фазового портрета на рисунке 1.

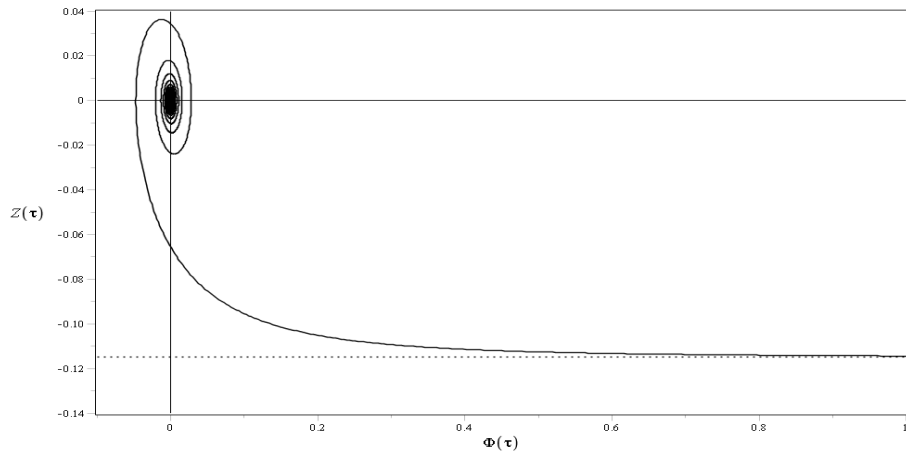


Рис. 16. Фазовый портрет динамической системы (4.11), полученный прямым численным интегрированием методом Розенброка системы (4.11) с начальными условиями: $\Phi(-100) = 100; \dot{\Phi}(-100) = 0$; $\tau \in [640, 1000]$.

Далее, приведем графики функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$. Эти графики ввиду их особенностей также приходится просматривать на различных масштабах и интервалах.

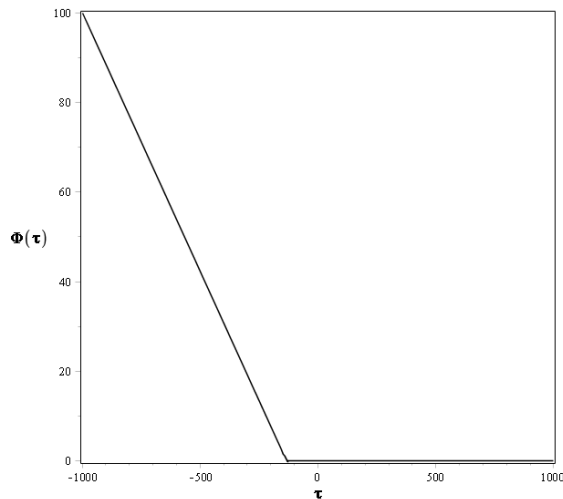


Рис. 17. Крупномасштабное поведение потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-1000, 1000]$.

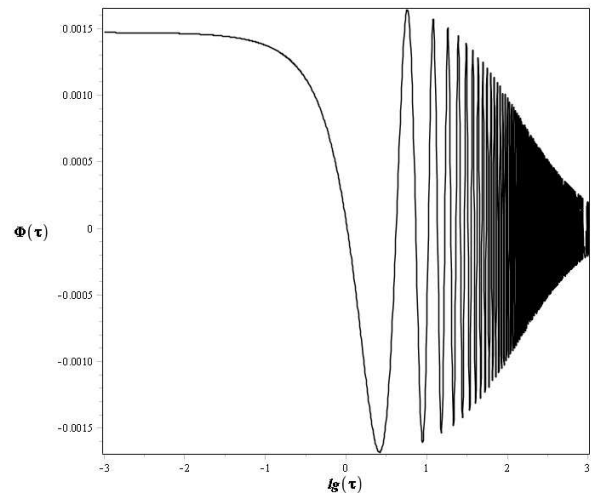


Рис. 18. Заключительная стадия эволюции скалярного потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ в логарифмической шкале времени; $\tau \in [0.001, 1000]$.

Как видно из этих и нижеприведенных графиков, величина потенциала падает практически линейно по времени на интервале $\tau \in [-1000, -100]$ по приближенному закону: $\Phi(\tau) = \Phi_0 - 0.1(\tau - \tau_0)\Delta\tau$. С момента $\tau \approx -100$ потенциал эволюционирует по закону затухающих колебаний.

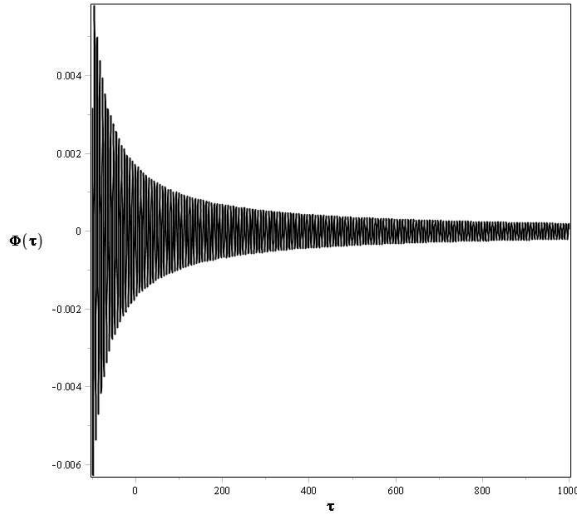


Рис. 19. Переход графика потенциала $\Phi(\tau)$ на колебательный режим при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-100, 1000]$.

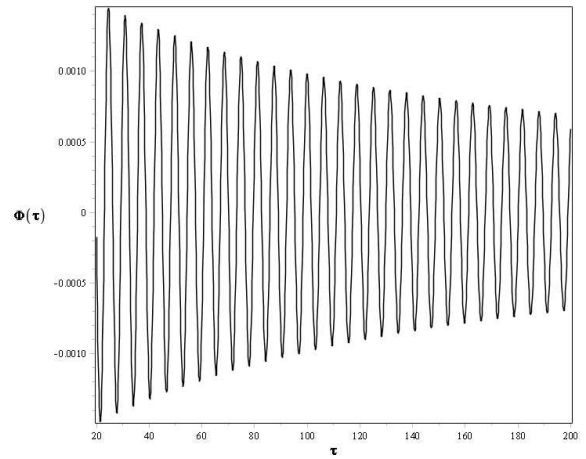


Рис. 20. Режим затухающих колебаний скалярного потенциала $\Phi(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [20, 200]$.

На следующих графиках показаны аналогичные режимы производной потенциала.

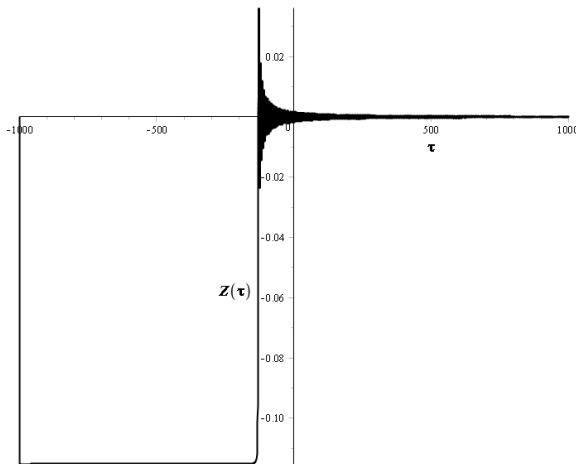


Рис. 21. Крупномасштабное поведение производной потенциала $\Phi'(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$; $\tau \in [-1000, 1000]$. На дне графика $\Phi'(\tau) \approx Z_0$ в согласии с (5.1).

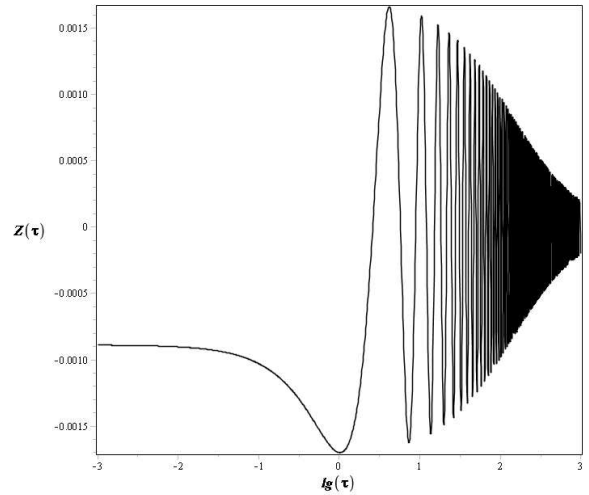


Рис. 22. Заключительная стадия эволюции производной скалярного потенциала $Z(\tau) = \Phi'(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ в логарифмической шкале времени; $\tau \in [0.001, 1000]$.

6.2. Эволюция постоянной Хаббла, космологического ускорения и масштабного фактора

«Постоянная» Хаббла, $H(t)$, связана простым соотношением (4.6) с нормированной на массу скалярного поля m «постоянной» $h(\tau)$, которая вычисляется по формуле (4.10). Вследствие инвариантности космологического ускорения Ω относительно масштабирования временной переменной $t = \tau/m$, космологическое ускорение можно вычислить по формуле, совпадающей с (3.15), делая в ней замену $H(t) \rightarrow h(\tau)$:

$$\Omega = 1 + \frac{h'}{h^2}. \quad (6.1)$$

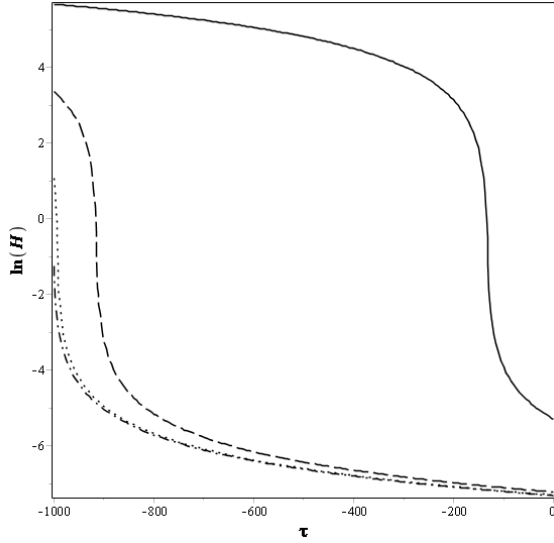


Рис. 23. Крупномасштабное поведение логарифма нормированной постоянной Хаббла $h(\tau)$ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечная линия; $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точно - пунктирная линия.

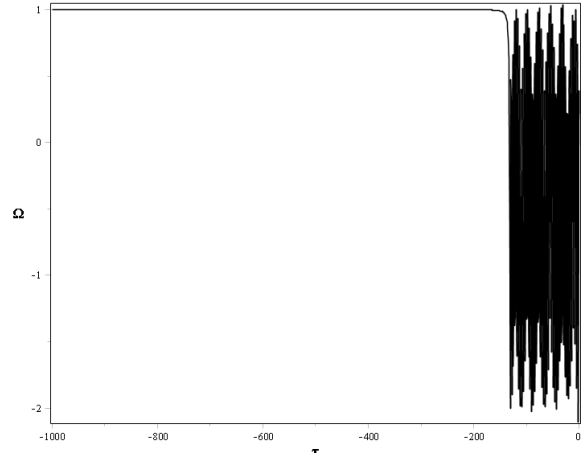


Рис. 24. Крупномасштабное поведение космологического ускорения $\Omega(\tau)$ при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$.

На рисунке 25 показано детальное поведение космологического ускорения. Далее, масштабный фактор находится интегрированием (4.6):

$$L(\tau) \equiv \ln a(\tau) = \int h d\tau.$$

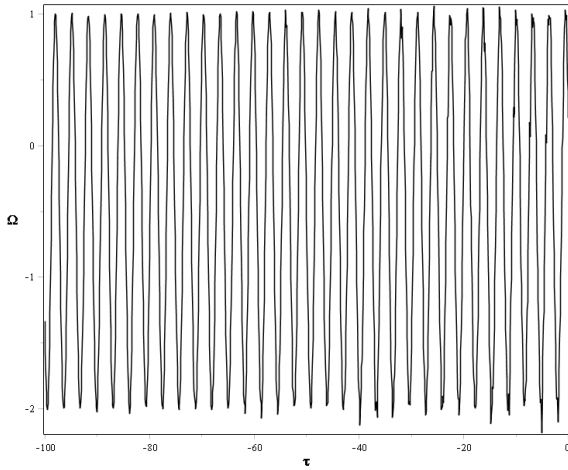


Рис. 25. Детальное поведение космологического ускорения $\Omega(\tau)$ на этапе колебаний при начальных условиях $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$.

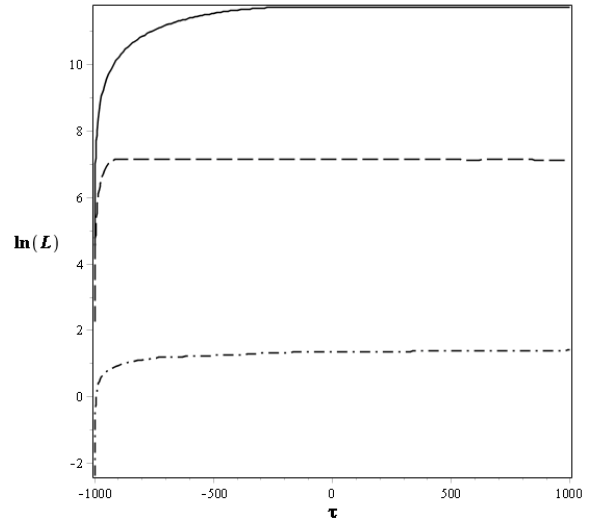


Рис. 26. Эволюция масштабного фактора при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 0.1, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точно - пунктирная линия. На графике показаны значения $\ln L$, где $L = \ln a(\tau)$.

6.3. Среднее значение космологического ускорения

Тот факт, что инвариантное космологическое ускорения имеет колебательный характер на больших временах (Рис. 25), причем период этих колебаний во временной шкале τ порядка 2π , то есть, в обычной шкале времени t $2\pi/m$ является явно микроскопической величиной побуждает нас ввести среднюю величину инвариантного космологического ускорения, усредненную по достаточно большому числу колебаний, то есть, по достаточно большому промежутку $\Delta\tau \gg 1$:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} \equiv \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \Omega(\tau') d\tau'. \quad (6.2)$$

Используя в (6.2) формулу (6.1) и проводя элементарное интегрирование, получим для среднего космологического ускорения следующее выражение:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} = 1 + \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{1}{h(\tau)} - \frac{1}{h(\tau + \Delta\tau)} \right). \quad (6.3)$$

На рисунке 27 приведены графики зависимости среднего ускорения от времени τ .

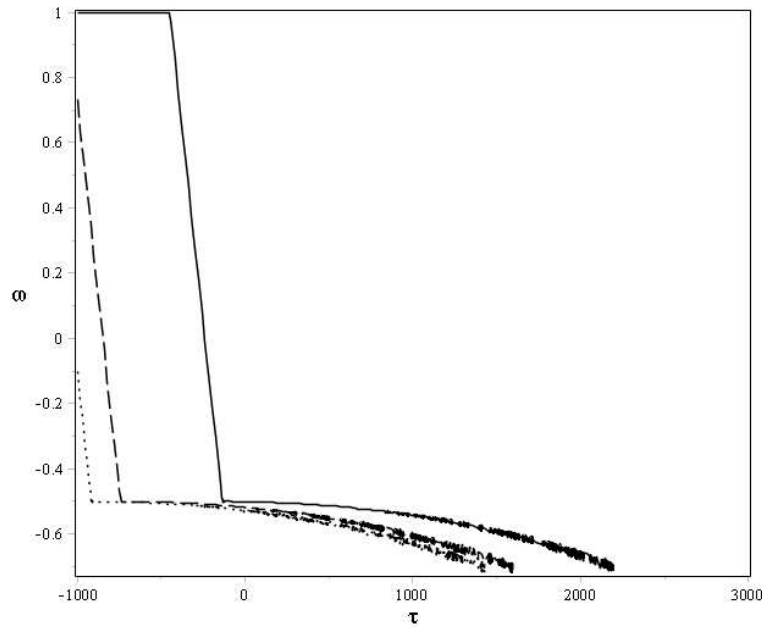


Рис. 27. Зависимость среднего ускорения $\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)}$ (6.2) от времени τ при начальных условиях: $\Phi(-1000) = 100, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – сплошная линия; $\Phi(-1000) = 30, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – пунктирная линия; $\Phi(-1000) = 10, \dot{\Phi}(-1000) = 0$ – точечная линия. Всюду принято $\Delta\tau = 100\pi$.

Что можно заключить, рассматривая этот рисунок? Во - первых, мы видим, как макроскопическое космологическое ускорение резко падает по окончании стадии инфляции ($\overline{\Omega} = +1$) до значения $\overline{\Omega} = -\frac{1}{2}$, а затем – медленно стремится к значению $\overline{\Omega} = -1$. Во - вторых, заметим, что инвариантное космологическое ускорением следующим образом связано с коэффициентом баротропы κ :

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa).$$

Отсюда следует, что значение $\Omega = 1$ соответствует значению $\kappa = -1$, значение $\Omega = -1/2$ – значению $\kappa = 0$ и, наконец, значение $\Omega = -1$ – значению $\kappa = 1/3$.

Утверждение 8. Таким образом, космологическая динамическая система, основанная на уравнениях Эйнштейна - Клейна - Гордона, обладает следующим свойством: макроскопическая космологическая эволюция этой системы имеет 3 этапа:

инфляционный этап: $\bar{\Omega} = +1; \bar{\kappa} = -1$;

резкий переход к нерелятивистскому этапу: $\bar{\Omega} = -\frac{1}{2}; \bar{\kappa} = 0$;

постепенное сползание, по - видимому, к ультрарелятивистскому этапу: $\bar{\Omega} \rightarrow -1; \bar{\kappa} \rightarrow \frac{1}{3}$.

Заключение

В заключении Автор выражает благодарность членам ВС - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Einstein A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1917. P. 142–152.
2. De Sitter W. On the curvature of space // Proc. Roy. Acad. Sci. 1917. P. 229–243.
3. Einstein A. Critical Comment on a Solution of the Gravitational Field Equations Given by Mr. de Sitter // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1918. P. 270–272.
4. Friedmann A. On the Curvature of Space // Z. Phys. 1922. Vol. 11. P. 326.
5. Gliner E.B. Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter // J. Exptl. Theoret. Phys. 1965. Vol. 49. P. 542–548.
6. Игнатьев Ю.Г. Физическая неустойчивость модели Вселенной с инфляционным (де-Ситтеровским) началом // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. Вып. 3. С. 5–15.
7. Starobinskii A.A. On a nonsingular isotropic cosmological model // Sov. Astron. Lett. 1978. Vol. 4(2). P. 82–84.
8. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.

Поступила в редакцию 07.07.2016

Игнатьев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis

Keywords: standard cosmological model, instability, quality analysis, numerical simulation, zero-center flat universe

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

A comprehensive analysis of the main provisions of the standard cosmological model (SCM), based on the classical massive scalar field. It is shown that the mathematical model of the incorrect decisions that lead to sustainable inflationary expansion mode. Based on a qualitative analysis of the system of differential equations of the standard cosmological model is proved that this system has a stable center, the zero-potential and its derivative at infinity. Thus, the cosmological model based on a classical massive scalar field in an infinite future, giving a flat universe. The numerical simulations of the dynamical system corresponding to the system of equations of Einstein - Klein - Gordon showed that for large time evolution invariant cosmological acceleration is oscillatory character, changing their values from -2 (braking) to $+1$ (acceleration). The average value of the cosmological acceleration is negative and is equal to $1/2$. However, these oscillations cosmological acceleration against the backdrop of rapidly falling value of the Hubble constant.

REFERENCES

1. Einstein A. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1917, pp. 142–152.
2. De Sitter W. On the curvature of space, *Proc. Roy. Acad. Sci.*, 1917, pp. 229–243.
3. Einstein A. Critical Comment on a Solution of the Gravitational Field Equations Given by Mr. de Sitter, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1918, pp. 270–272.
4. Friedmann A. On the Curvature of Space, *Z. Phys.*, 1922, vol. 11, p. 326.
5. Gliner E.B. Algebraic properties of the energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter, *J. Exptl. Theoret. Phys.*, 1965, vol. 49, pp. 542–548.
6. Ignat'ev Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning, *Space, Time and Foundament. Interactions*, 2015, vol. 3, pp. 5–15.
7. Starobinskii A.A. On a nonsingular isotropic cosmological model, *Sov. Astron. Lett.*, 1978, vol. 4(2), pp. 82–84.
8. Bogoyavlensky O.I. *Metody kachestvennoi teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoi dinamike* (Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.

Received 07.07.2016

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru