

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев¹КАЧЕСТВЕННЫЙ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАНДАРТНОЙ
КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С Λ - ЧЛЕНОМ²

С помощью качественной теории дифференциальных уравнений и компьютерного моделирования проведен анализ системы дифференциальных уравнений стандартной космологической модели с фундаментальным классическим скалярным полем и Λ членом.

Ключевые слова: стандартная космологическая модель, космологический член, неустойчивость, качественный анализ, численное моделирование, нулевой центр, плоская вселенная

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

1. Уравнения Эйнштейна с космологическим членом для Вселенной Фридмана с нулевой трехмерной кривизной

Рассмотрим уравнения Эйнштейна с космологическим членом³:

$$G_k^i = \Lambda \delta_k^i + 8\pi T_k^i \quad (1.1)$$

и будем полагать в дальнейшем космологический член неотрицательным:

$$\Lambda \geq 0. \quad (1.2)$$

Как и в предыдущей статье [1], рассмотрим в качестве материи классическое скалярное массивное поле:

$$T_k^i = 2\Phi^i \Phi_{,k} - \delta_k^i \Phi_{,j} \Phi^{,j} + \delta_k^i m^2 \Phi^2, \quad (1.3)$$

где m - масса квантов этого поля. Уравнение скалярного поля получается из тождеств Бианки $T_{k,i}^i = 0$:

$$\square \Phi + m^2 \Phi = 0, \quad (1.4)$$

где

$$\square \Phi = g^{ik} \Phi_{,ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi \quad (1.5)$$

есть оператор д'Аламбера. Для однородной вселенной $\Phi = \Phi(t)$, и тензор энергии - импульса скалярного поля принимает изотропную структуру, где

$$\varepsilon = \dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2; \quad p = \dot{\Phi}^2 - m^2 \Phi^2, \quad (1.6)$$

так что

$$\varepsilon + p = 2\dot{\Phi}^2, \quad (1.7)$$

а уравнение поля (1.4) принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + m^2 \Phi = 0. \quad (1.8)$$

В тоже время единственное независимое уравнение Эйнштейна есть⁴:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda + 8\pi(\dot{\Phi}^2 + m^2 \Phi^2). \quad (1.9)$$

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

²This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

³Здесь и в дальнейшем принята Планковская система единиц $\hbar = c = G = 1$; метрика имеет сигнатуру $(-1, -1, -1, +1)$, тензор Риччи получается из тензора Римана сверткой первого и третьего индексов.

⁴В дальнейшем в этой статье мы будем рассматривать модель с $\Lambda = 0$.

2. Качественный анализ динамической системы СКМ

2.1. Приведение системы уравнений к каноническому виду

Во - первых, произведем масштабирование уравнений, переходя к новой безразмерной временной переменной τ

$$\tau = mt, \Rightarrow \dot{f} = mf', \quad (2.1)$$

где $f' = df/d\tau$. Таким образом, получим вместо уравнений (1.8) и (1.9):

$$\Phi'' + 3H_m\Phi' + \Phi = 0; \quad (2.2)$$

$$3H_m^2 = \Lambda_m + 8\pi(\Phi'^2 + \Phi^2), \quad (2.3)$$

где $H_m(\tau)$ и Λ_m – постоянная Хаббла и космологическая постоянная, измеренные в единицах комптоновского времени:

$$H_m(\tau) = \frac{a'}{a} = \frac{H}{m}; \quad \Lambda_m = \frac{\Lambda}{m^2}. \quad (2.4)$$

Заметим, что уравнения (2.2) и (2.3) представляют систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую с учетом условия

$$\dot{a} \geq 0 \Leftrightarrow H \geq 0 \quad (2.5)$$

стандартной заменой можно привести к виду *нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости*:

$$\Phi' = Z(t); \quad (2.6)$$

$$Z' = -3H_m Z - \Phi, \quad (2.7)$$

где функция $H_m(\Phi, Z)$ алгебраически определяется из уравнения Эйнштейна с помощью функций $\Phi(\tau)$ и $Z(\tau)$:

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)}. \quad (2.8)$$

Таким образом, окончательно получим систему автономных дифференциальных уравнений динамической системы на плоскости (Φ, Z) :

$$\begin{cases} \Phi' = Z(t); \\ Z' = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi(Z^2 + \Phi^2)} Z - \Phi; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}. \quad (2.9)$$

Эту систему уравнений можно исследовать с помощью качественной теории дифференциальных уравнений и определить асимптотическое поведение решений при $t \rightarrow \pm\infty$. Важным является следующее свойство СКМ.

Утверждение 1. Эволюция Вселенной в стандартной космологической модели с космологическим членом в терминах временной переменной τ определяется только одним параметра Λ_m и начальными условиями.

Заметим, что если масса бозонов – квантов скалярного поля намного меньше планковской, то есть, в планковских единицах $m \ll 1$, то $\Lambda_m \gg \Lambda$, следовательно, есть вероятность того, что даже при $\Lambda \ll 1$ нормированная константа Λ_m может быть достаточно большой величиной.

2.2. Особые точки динамической системы

Особые точки динамической системы $M_0(x_0, y_0)$ (2.9) определяются нулями производных (см., например, [2]):

$$P(x_0, y_0) = 0; \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что динамическая система (2.9), как и в случае $\Lambda \equiv 0$, имеет единственную особую точку:

$$M_0 = (0, 0) \longleftrightarrow x_0 = \Phi_0 = 0; y_0 = Z_0 = 0. \quad (2.10)$$

2.3. Тип особой точки

Для определения типа особой точки необходимо найти собственные числа характеристического многочлена:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2.11)$$

где частные производные функций $P(x, y), Q(x, y)$ вычисляются в особой точке M_0 . Вычисляя производные от функций P, Q в (2.9), найдем:

$$P'_x(0, 0) = 0; \quad Q'_y(0, 0) = 1;$$

$$Q'_x(0, 0) = -1; \quad Q'_y(0, 0) = -\sqrt{3\Lambda_m}.$$

Таким образом, характеристический многочлен (2.11) равен:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда найдем его корни

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m} + \frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m - 4}; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m} - \frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda_m - 4}. \quad (2.12)$$

Собственные числа удовлетворяют тождеству:

$$\lambda_1 \lambda_2 \equiv 1. \quad (2.13)$$

Таким образом, возможны три принципиально различных случая (см. [2]):

1. Случай малого значения космологического члена:

$$\Lambda_m < \frac{4}{3} \quad (2.14)$$

– тогда мы имеем два комплексно сопряженных собственных числа, причем

$$Re(\lambda) = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} < 0. \quad (2.15)$$

В этом случае согласно качественной теории дифференциальных уравнений точка $M_0 : \Phi = 0, \dot{\Phi} = 0$ является *притягивающим фокусом*, – все фазовые траектории динамической системы при $\tau \rightarrow +\infty$ являются скручивающимися спиралями, наматывающимися на особую точку и совершающими при этом бесконечное количество витков. Этот случай, фактически, качественно совпадает с рассмотренным ранее [1].

2. Случай большого значения космологического члена:

$$\Lambda_m > \frac{4}{3} \quad (2.16)$$

– тогда мы имеем два различных вещественных и согласно (2.12) отрицательных собственных числа $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. В этом случае особая точка является *устойчивым притягивающим узлом*. При $\tau \rightarrow +\infty$ все фазовые траектории динамической системы входят в особую точку, причем все траектории, кроме исключительных двух, при входе в особую точку

касательны к собственному вектору \mathbf{u}_1 , отвечающему минимальному по модулю собственному числу, то есть, λ_1 . Две исключительные траектории касательны ко второму собственному вектору \mathbf{u}_2 . Указанные собственные векторы равны:

$$\mathbf{u}_1 = (1, \lambda_1); \quad \mathbf{u}_2 = (1, \lambda_2). \quad (2.17)$$

Угол α между собственными векторами определяется соотношением:

$$\cos \alpha \equiv \frac{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2^2}} = \sqrt{\frac{4}{3\Lambda_m}} < 1. \quad (2.18)$$

При очень больших значениях Λ_m угол между собственными векторами стремится к $\pi/2$, при $\Lambda_m \rightarrow 4/3$ угол стремится к нулю.

3. Вырожденный случай:

$$\Lambda_m = \frac{4}{3} \quad (2.19)$$

– этот случай практически совпадает с предыдущим с учетом лишь того обстоятельства, что все траектории входят в особую точку касательно к единственному собственному вектору – это как раз и соответствует указанному выше предельному случаю $\alpha \rightarrow 0$.

Утверждение 2. Таким образом, главный вывод предыдущей работы [1] сохраняется: фазовая траектория динамической системы, основанной на уравнении классического массивного скалярного поля (1.8) и уравнении Эйнштейна (1.9), в плоскости (Φ, Z) имеет одну нулевую особую точку (притягивающий фокус или притягивающий устойчивый узел) (2.10), в котором:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow \Phi \rightarrow 0; \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \Rightarrow H \rightarrow \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (2.20)$$

Изменяются лишь тип особой точки и вместе с этим детали приближения фазовых траекторий к особой точке $\Phi = 0, \dot{\Phi} = 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

2.4. Асимптотическое поведение масштабного фактора

Поскольку при $t \rightarrow +\infty$ (или $\tau \rightarrow +\infty$) $\Phi \rightarrow 0$ и $\dot{\Phi} \rightarrow 0$, то при отсутствии других видов материи, кроме скалярного поля, Вселенная остается наедине с Λ -членом, поэтому вследствие уравнения Эйнштейна (1.9) масштабный фактор эволюционирует по инфляционному закону:

$$a(t) \sim e^{H_0 t}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.21)$$

где H_0 – постоянная Хаббла:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \equiv m \sqrt{\frac{\Lambda_m}{3}}. \quad (2.22)$$

На ранних стадиях $\tau \rightarrow -\infty$, до тех пор, пока:

$$\Phi(\tau) \approx \Phi_0 = \text{Const}; \quad \rightarrow 8\pi\Phi_0^2 \gg \Lambda_m, \quad (2.23)$$

$$H(t) \approx H_1 = \frac{m}{\sqrt{3}} \sqrt{\Lambda_m + 8\pi\Phi_0^2} > H_0 \quad (2.24)$$

имеет место ранняя инфляция:

$$a(t) \sim e^{H_1 t}, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (2.25)$$

Утверждение 3. Таким образом, инвариантное космологическое ускорение

$$\Omega = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (2.26)$$

при $\Lambda \neq 0$ стремится к единице на ранних и поздних стадиях:

$$\Omega(t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (2.27)$$

Вместе с тем, «постоянная» Хаббла имеет постоянные значения в этих предельных случаях:

$$H(t) \rightarrow H_1; \quad (t \rightarrow -\infty), \quad H(t) \rightarrow H_0; \quad (t \rightarrow +\infty); \quad (H_1 > H_0). \quad (2.28)$$

3. Фазовые траектории динамической системы (2.9)

Приведем характерные примеры фазовых портретов динамической системы (2.9), полученных методами численного моделирования в прикладном математическом пакете MapleXVII.

3.1. Малые значения Λ : $\Lambda_m = 0.1 < \frac{4}{3}$

В этом случае конечным пунктом фазовой траектории является притягивающий фокус (2.10) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$.

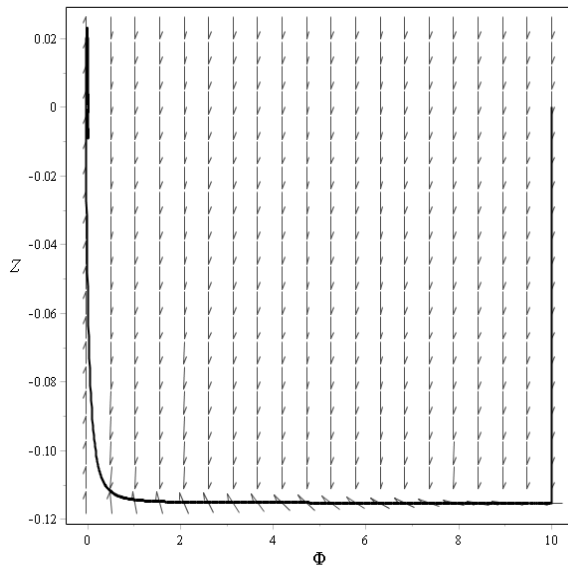


Рис. 1. Крупномасштабная картина фазовой траектории $\tau \in [-1000, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

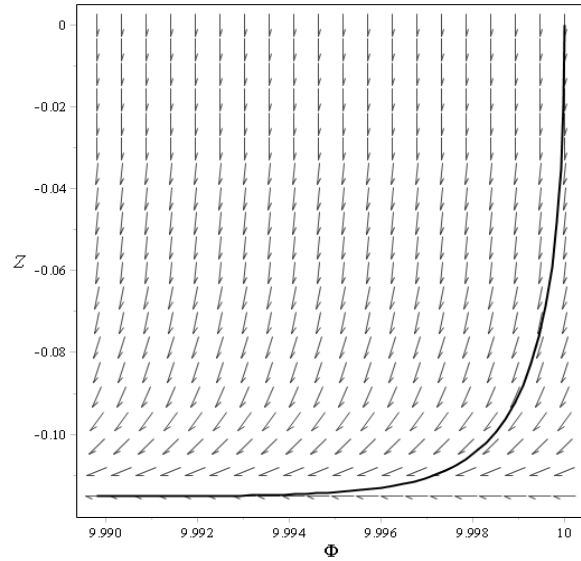


Рис. 2. Этап спуска фазовой траектории на временах $\tau \in [-1000, -999.9]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

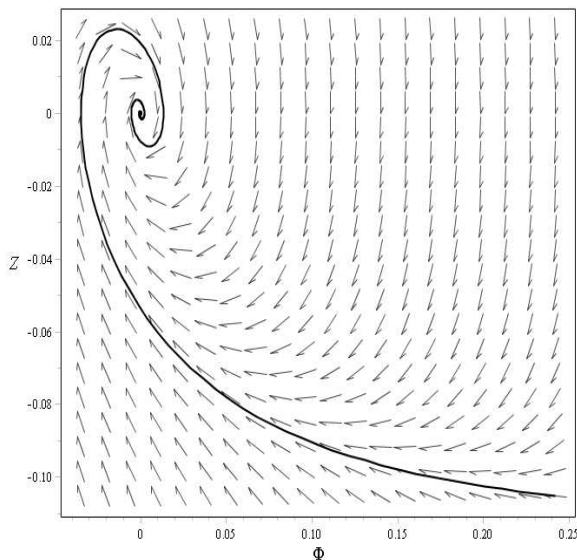


Рис. 3. Этап накручивания фазовой траектории на притягивающий фокус: $\tau \in [-915, -700]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

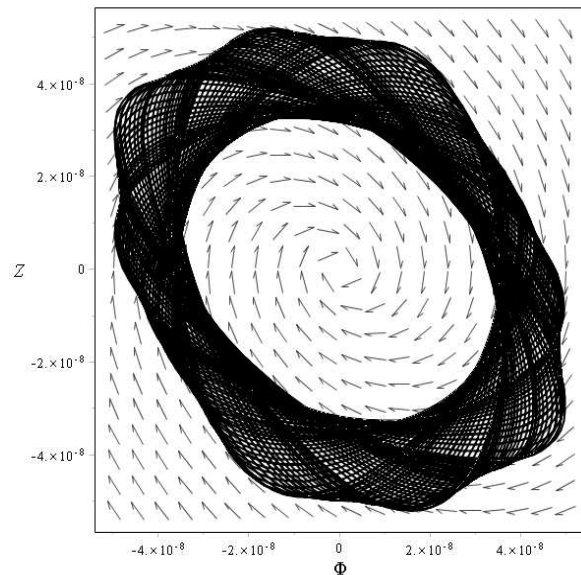


Рис. 4. Конечный этап фазовой траектории – скручивающаяся спиралевидная линия: $\tau \in [-800, -100]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

3.2. Большие значения Λ : $\Lambda_m = 10 > \frac{4}{3}$

В этом случае конечным пунктом фазовой траектории является устойчивый притягивающий узел (2.10) $\Phi_0 = 0$; $y_0 = Z_0 = 0$. Крупномасштабная картина фазовой траектории качественно не отличается от предыдущей, однако, способ вхождения в особую точку изменяется (Рис. 5, 6).

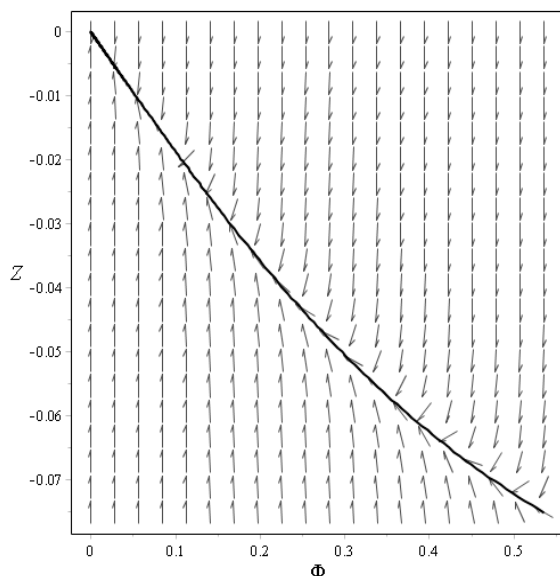


Рис. 5. Приближение к притягивающему узлу фазовой траектории: $\tau \in [85, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

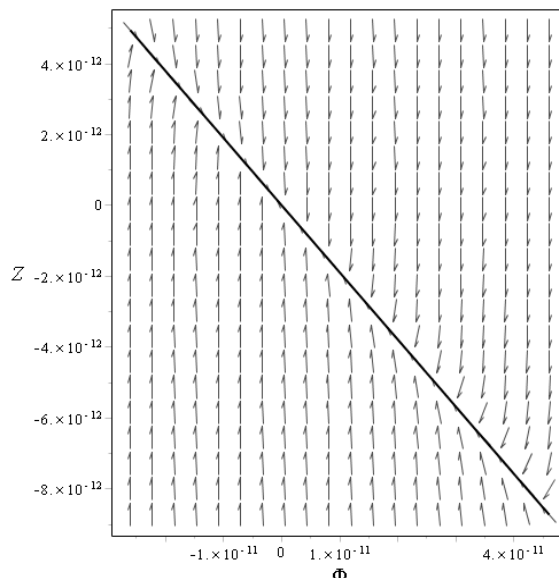


Рис. 6. Прохождение через притягивающий узел фазовой траектории: $\tau \in [900, 1000]$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 10$; $Z(-1000) = 0$.

4. Численное моделирование динамической системы

Фазовые портреты динамической системы (2.9), представленные на рисунках 1 – 4, однако, не дают информацию о некоторых деталях космологической эволюции, которые возможно получить лишь прямым численным интегрированием исходной системы уравнений Эйнштейна - Клейна - Гордона. Кроме того, они не дают информации об исходной трехмерной динамической системе, включающей также и уравнение Эйнштейна (1.9), а также о наблюдаемых космологических скалярах $H(t)$ и $\Omega(t)$. Для получения этой информации необходимо применить методы прямого численного интегрирования исходной системы дифференциальных уравнений. Ниже мы приведем результаты численного интегрирования этих уравнений методом Розенброка, хорошо приспособленного для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих признаками жесткости. В ряде более простых случаев мы применяли стандартный метод Рунге - Кутта - Фелхберга 4 - 5 порядков, а в ряде более сложных случаев – метод Рунге - Кутта 7 - 8 порядков.

4.1. Эволюция скалярного поля $\Phi(t), \dot{\Phi}(t)$

На начальных стадиях $\tau \rightarrow \infty$ при достаточно больших значениях потенциала скалярное поле эволюционирует также, как и в случае $\Lambda = 0$: значение потенциала скалярного поля падает линейно со временем. Затем происходит переход на колебательный режим.

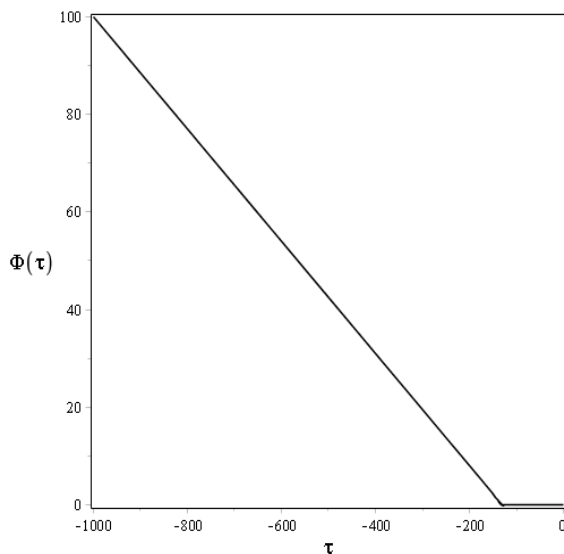


Рис. 7. Эволюция потенциала на ранних стадиях $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$.

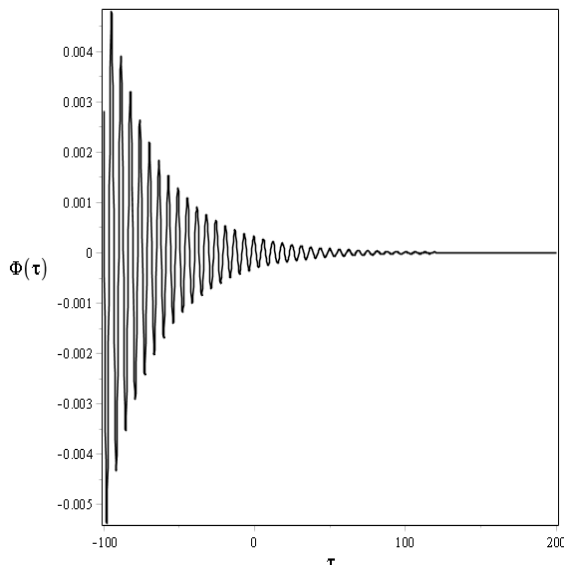


Рис. 8. Эволюция потенциала на поздних стадиях $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$

На рисунках 9 – 10 показана эволюция потенциала на стадии затухающих колебаний в случае нулевого и малого значения космологической постоянной. Видно, что при одних и тех же начальных значениях скалярного потенциала на этой стадии амплитуда колебаний потенциала в одно и то же значение времени на порядок больше в случае нулевого значения космологической постоянной.

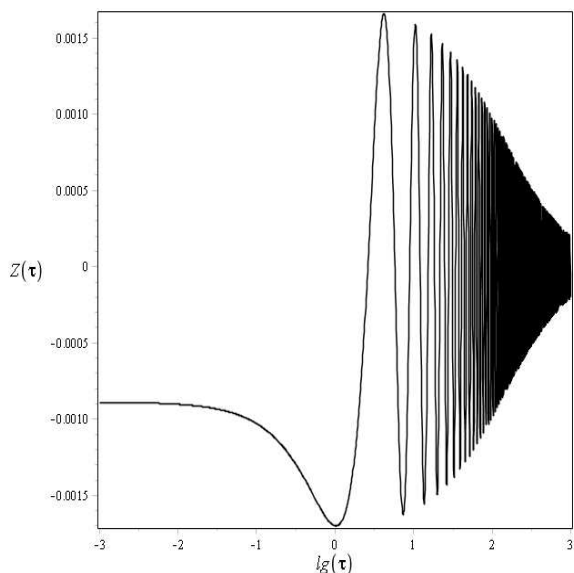


Рис. 9. Эволюция потенциала на стадии колебаний при нулевом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0$ в логарифмической шкале времени; $\Phi(-1000) = 100$.

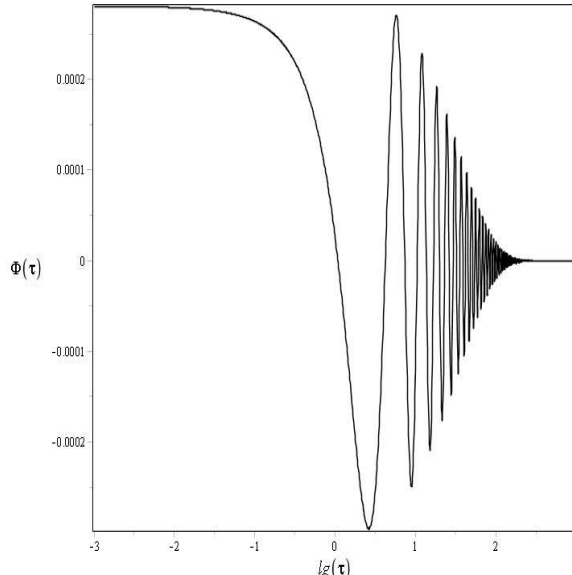


Рис. 10. Эволюция потенциала на стадии колебаний в логарифмической шкале времени при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.001$; $\Phi(-1000) = 100$.

4.2. Эволюция постоянной Хаббла $H(t)$

Падение величины постоянной Хаббла от значения H_1 (2.24) до значения H_0 (2.22) начинается тем позже, чем больше начальное значение потенциала скалярного поля $\Phi_0 = \Phi(-\infty)$ (Рис. 11, 12).

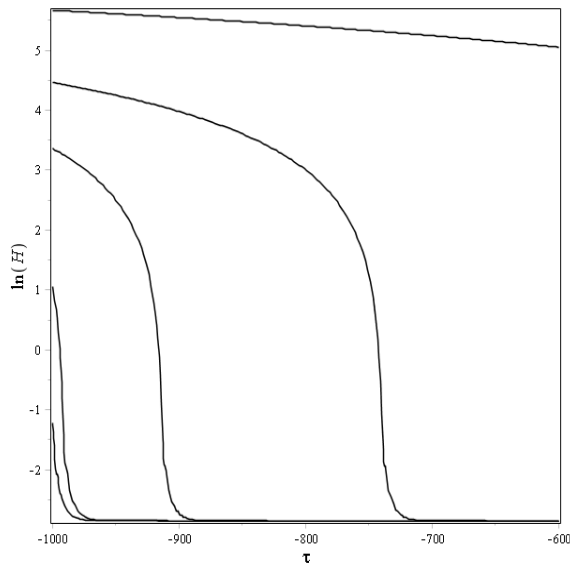


Рис. 11. Зависимость эволюции постоянной Хаббла от начального значения скалярного потенциала: снизу - вверх: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 30; 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.01$.

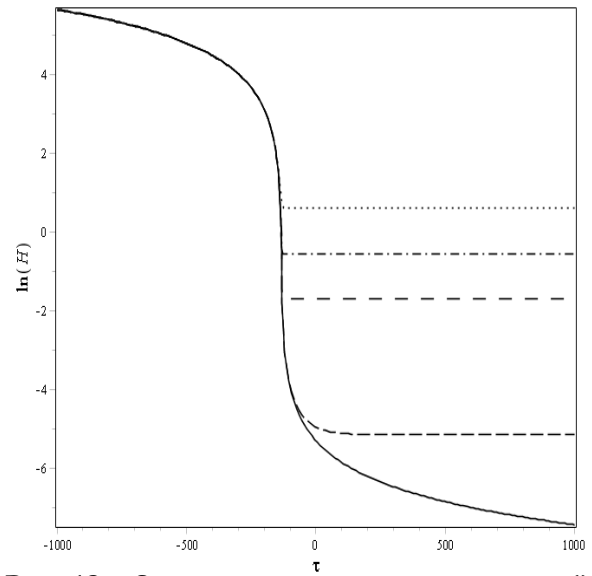


Рис. 12. Зависимость эволюции постоянной Хаббла от величины космологической постоянной: снизу - вверх: $\Lambda_m = 0; 0.0001; 0.1; 1; 10$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 100; Z(-1000) = 0$.

4.3. Масштабный фактор

Эволюция масштабного фактора показана на рисунках 13 – 14. На оси ординат графиков на этих рисунках отложены значения \ln функции

$$L(\tau) = \ln(a(\tau)).$$

Поэтому значение $\ln L = 10$ соответствует значению $L \sim 10^4$ и значению масштабного фактора $a/a_0 \sim 10^{9566}$.

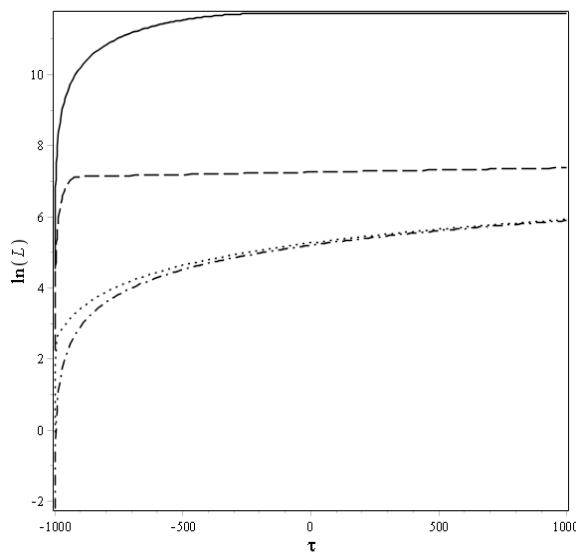


Рис. 13. Зависимость эволюции масштабного фактора от начального значения скалярного потенциала: снизу - вверх: $\Phi(-1000) = 0.1; 1; 10; 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.1$.

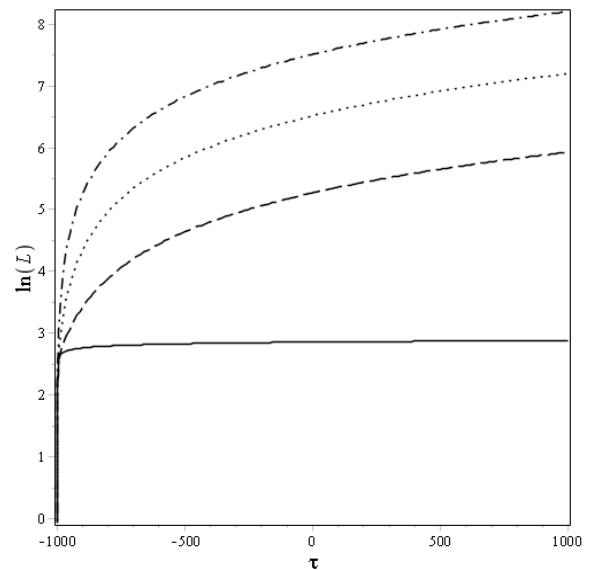


Рис. 14. Зависимость эволюции масштабного фактора от величины космологической постоянной: снизу - вверх: $\Lambda_m = 0; 0.1; 4/3; 10$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 1; Z(-1000) = 0$.

4.4. Эволюция инвариантного космологического ускорения

Космологическое ускорение Ω подсчитывается по формуле:

$$\Omega(\tau) = 1 + \frac{H'_m(\tau)}{H_m^2(\tau)}. \quad (4.1)$$

Величина космологического ускорения также осциллирует с периодом $\sim 2\pi$ после стадии первичной инфляции. На рисунках 15 – 16 показана стадия колебаний космологического ускорения. В частности, на рисунке 16 можно видеть, как среднее значение космологического ускорения растет примерно от $-1/2$ до 1.

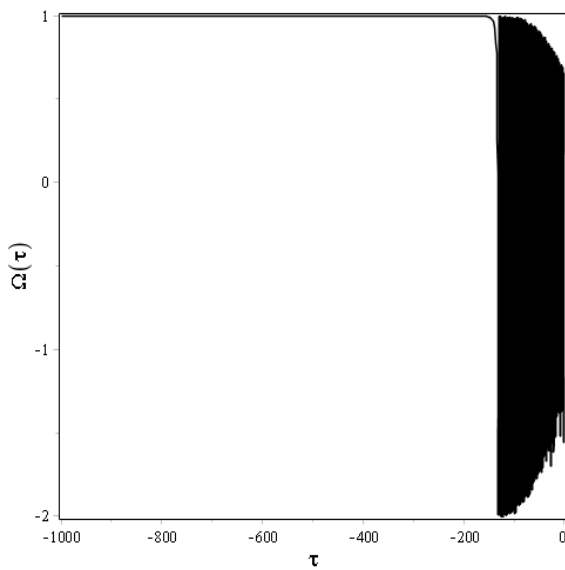


Рис. 15. Крупномасштабная эволюция космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при малом значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.00001$. Черная область графика представляет затухающие колебания.

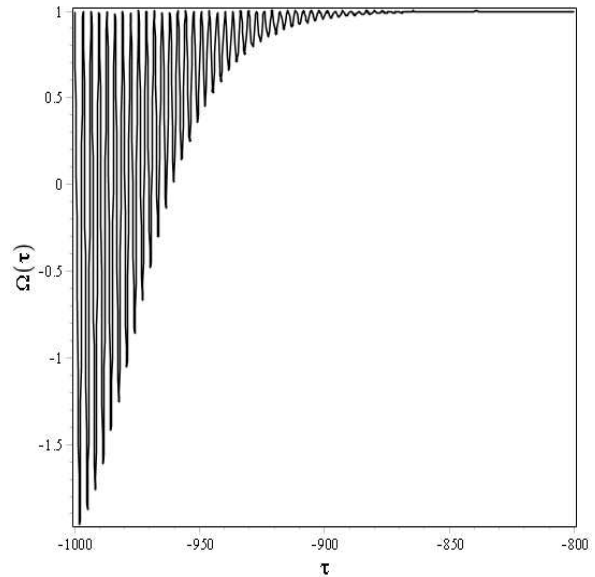


Рис. 16. Участок колебательной стадии эволюции космологического ускорения: $\Lambda_m = 0.001$ при начальных значениях: $\Phi(-1000) = 0.1$; $Z(-1000) = 0$.

4.5. Среднее значение космологического ускорения

Как отмечалось в [1], микроскопический характер колебания⁵ вынуждает перейти к наблюдаемому среднему значению космологического ускорения, вычисляемого по формуле [1]:

$$\overline{\Omega(\tau, \Delta\tau)} = 1 + \frac{1}{\Delta\tau} \left(\frac{1}{h(\tau)} - \frac{1}{h(\tau + \Delta\tau)} \right), \quad (4.2)$$

где $\Delta\tau = 2\pi N$ – длительность интервала усреднения.

⁵Период колебаний космологического ускорения Ω во временном масштабе τ порядка 2π . Поэтому в обычной шкале времени – это комптоновский масштаб $T \sim 2\pi m^{-1}$, поэтому эти колебания согласно принципу неопределенности недоступны наблюдениям. В принципе, этот фактор побуждает нас перейти к квантово - полевым вычислениям скалярного поля и космологического ускорения.

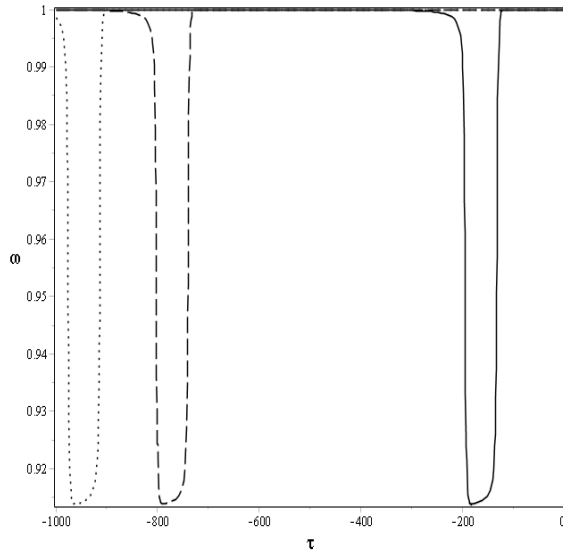


Рис. 17. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.1$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 20\pi$.

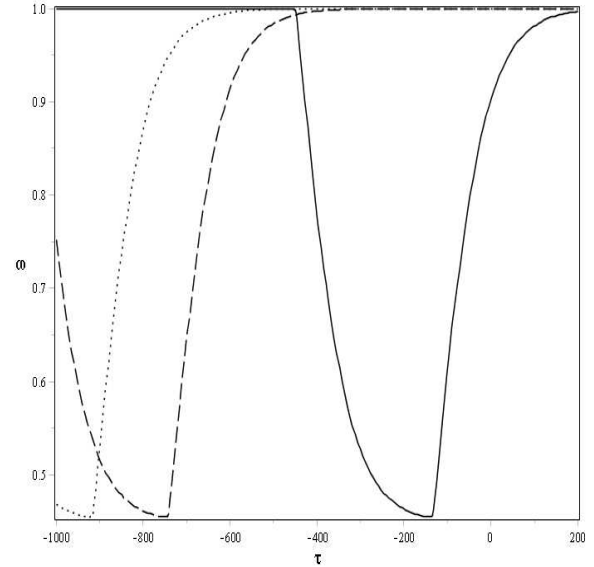


Рис. 18. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.0001$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi$.

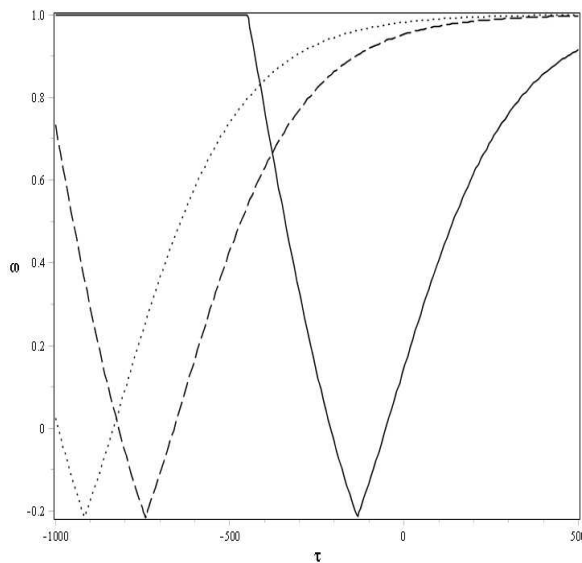


Рис. 19. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ значении космологической постоянной $\Lambda_m = 0.00001$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi$.

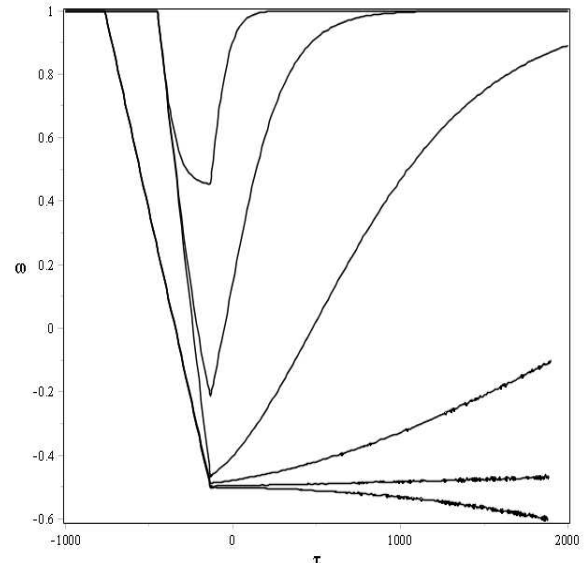


Рис. 20. Эволюция среднего космологического ускорения: $\Phi(-1000) = 100$ при значении космологической постоянной – снизу – вверх: $\Lambda_m = 10^{-8}; 3 \cdot 10^{-8}; 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$. Длительность интервала усреднения $\Delta\tau = 100\pi \div 200\pi$.

Заключение

Таким образом, можно констатировать, что при малых значениях космологической постоянной $\Lambda_m \leq 3 \cdot 10^{-8}$ эволюция динамической системы, положенной в основание СКС, на больших временных интервалах весьма слабо отличается от эволюции динамической системы без учета космологической постоянной. В частности, и в такой системе возникает достаточно длительная нерелятивистская стадия. Следует заметить, что при использовании в качестве базовой стандартной модели элементарных частиц с массой Хиггсова бозона порядка $10 \text{ TeV} \sim 10^{-15} m_{pl}$ это ограничение дает $\Lambda \leq 3 \cdot 10^{-38}$. Как известно, значение космологической постоянной оцени-

вается как 10^{-123} , так что реальная космологическая ситуация относится именно к рассматриваемому случаю, отвечающему первому типу особой точки – притягивающего полюса. Как мы отмечали выше, конечной стадией такой космологической модели является инфляционная, а на промежуточных стадиях расширения автоматически возникает нерелятивистский режим.

В заключении Авторы выражают благодарность членам MW - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ignat'ev Yu.G. The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis // *Space, Time and Fundamental Interactions*. 2016. № 3. P. 16–36.
2. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 320 с.

Поступила в редакцию 14.07.2016

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедры высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Yu. G. Ignat'ev

Qualitative and numerical analysis of the standard cosmological model with Λ - term

Keywords: standard cosmological model, instability, quality analysis, numerical simulation, zero-center flat universe

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

With the help of the qualitative theory of differential equations and computer simulation analysis system of differential equations of the standard cosmological model with the fundamental classical scalar field and Λ term.

REFERENCES

1. Ignat'ev Yu.G. The standard cosmological model: mathematical, qualitative and numerical analysis, *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2016, no. 3, pp. 16–36.
2. Bogoyavlensky O.I. *Metody kachestvennoi teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoi dinamike* (Methods of the qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics), Moscow: Nauka, 1980, 320 p.

Received 14.07.2016

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru