

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

Ю. Г. Игнатьев,¹ А. А. Агафонов²**СТАТИСТИЧЕСКИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ФЕРМИОНОВ С МЕЖЧАСТИЧНЫМ ФАНТОМНЫМ СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ**³

Исследуется космологическая эволюция статистических систем фермионов с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, в котором вклад в полную энергию скалярного поля “кинетического” члена отрицателен. В результате аналитического и численного моделирования таких систем выявлено наличие четырех возможных сценариев в зависимости от параметров системы и начальных условий. Среди выявленных сценариев присутствуют сценарии с ранней, промежуточной и поздней нерелятивистской стадией космологической эволюции при одновременном наличии необходимой инфляционной стадии.

Ключевые слова: физика ранней Вселенной, связь физики элементарных частиц и космологии, инфляция, фантомное скалярное взаимодействие.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

Введение

Фундаментальные скалярные поля играют важную роль в понимании динамики ранней Вселенной (см., например, [1], [2]) и с помощью различных модификаций теории гравитации, предложенных как самим А. Эйнштейном [3] (космологический Λ - член), так впоследствии Р. Утиямом и Т. Фукуямой [4], А. Минкевичем [5], [6] (Poincaré gauge theory of gravity), А. Старобинским [7] ($f(R)$ - гравитация), по-видимому, способны объяснить некоторые основные наблюдательные факты космологии. Тем не менее, некоторые важные факты наблюдательной космологии до сих пор не нашли достаточно убедительного объяснения в рамках стандартного космологического сценария. К таким очевидным фактам, относится, например, существование нерелятивистского этапа расширения Вселенной, необходимого для образования ее структуры. В связи, в частности, и с этим обстоятельством в настоящее время рассматривается широкий спектр *феноменологических теорий* фундаментального неминимально связанного скалярного поля, в которых вводятся различные связи между скалярным и гравитационным полями (потенциальная, кинетическая, комбинированная). Соответствующие теоретико - полевые конструкции преследуют обычно следующую цель: подобрать такой феноменологический Лагранжиан взаимодействия и его параметры, который обеспечивает космологический сценарий всеми необходимыми этапами: инфляция $\rightarrow$ ультрарелятивистский этап $\rightarrow$ нерелятивистский этап $\rightarrow$ вторичное ускорение. При этом, предшествующий стандартный космологический сценарий, общепринятый в 60-80-е годы XX-го столетия (горячая модель Гамова) встраивается между этапами раннего и позднего космологического ускорения.

В этой статье мы рассматриваем космологические модели, построенные на фундаментальном скалярном взаимодействии. В отличие от феноменологических неминимальных моделей скалярного взаимодействия мы рассмотрим динамические модели статистических систем скалярно заряженных частиц, в которых некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный *скалярный заряд*. Статистическая система, обладая, скалярным зарядом и сама являясь источником скалярного поля, может эффективно влиять на скалярное поле, управляя его поведением. Такое скалярное взаимодействие было введено в общерелятивистскую кинетическую теорию в 1982 г одним из авторов статьи [8], [9], [10], [11] и несколько позже - Г.Г. Ивановым [12]. В частности, в работах [9], [10] на основе кинетической теории получена самосогласованная система уравнений, описывающая статистическую систему частиц со скалярным взаимодействием. В работе [13] были исследованы групповые свойства равновесных статистических конфигураций со скалярным взаимодействием. В работах [14], [15] были сформулированы уравнения космологической модели на основе статистических Ферми - систем со скалярным взаимодействием и осуществлены попытки

¹E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

²E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

³С английской версией статьи можно ознакомиться по ссылке <https://arxiv.org/pdf/1608.05020v1.pdf>.

численного моделирования таких систем. В работах [16], [17], [18], [21], [23]⁴ макроскопическая теория статистических систем со скалярным взаимодействием была значительно усовершенствована и расширена на случай фантомных скалярных полей, а в работах [24], [25] - на сектор отрицательных эффективных масс скалярно взаимодействующих частиц, в этих же работах были изучены трансформационные свойства математических моделей статистических систем со скалярным взаимодействием по отношению к преобразованиям заряда, химического потенциала и других параметров модели. В работах [26], [27] математическая модель космологических систем со скалярным взаимодействием была расширена на случай конформно инвариантного скалярного поля и изучены асимптотические трансформационные свойства этой модели, а также исследована бесстолкновительная кинетическая модель Власова. В работе [28] исследованы асимптотические свойства космологической модели, основанные на статистической системе почти вырожденных фермионов с межчастичным скалярным взаимодействием.

Перейдем теперь к вопросам численного моделирования космологической эволюции статистических систем с межчастичным *фантомным скалярным взаимодействием*, обладающим отрицательной «кинетической» энергией. С математической точки зрения система дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию таких динамических систем относится к классу жестких систем, численное моделирование которых сопряжено с весьма большими вычислительными трудностями. Жесткий характер системы обусловлен, в первую очередь, уравнениями Эйнштейна, в левой части которых содержится квадрат «постоянной» Хаббла, а в правой содержится знакопеременное выражение, знак которого определяется игрой двух факторов - отрицательной кинетической энергии и положительной потенциальной. Некоторые результаты численного моделирования таких систем были получены в работах [29] (космологическая эволюция вырожденного Ферми-газа), [30] (космологическая эволюция однокомпонентного Больцмановского газа), [31] (комплексное исследование).

Результаты численного моделирования позволили выявить ряд уникальных свойств космологических статистических моделей с межчастичным фантомным взаимодействием, в частности, (см., например, [31]):

1. *всплеск ускорения* - наличие резких фантомных всплесков инвариантного космологического ускорения в достаточно широкой области параметров модели;
2. *фаза плато* - возникновение космологических этапов с постоянным ускорением;
3. *температурная вспышка* - быстрый разогрев статистической системы на определенных этапах эволюции.

Эти, а также и другие особенности фантомного скалярного взаимодействия резко отличают его от классического скалярного взаимодействия, сводящегося, фактически, к модели затухающих колебаний осциллятора в потенциальной яме. Указанные особенности космологических статистических моделей с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, возможно, могут объяснить ряд не совсем понятных в настоящее время наблюдательных фактов, относящихся, как к ранним, так и поздним эпохам космологической эволюции, а также выявить природу темной энергии и темной материи. Данная статья как раз и посвящена выявлению устойчивых особенностей космологических статистических моделей с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, которые могут быть использованы в конструировании моделей темных секторов энергии и материи. Поскольку, как было показано ранее (см. цитированные выше работы) космологическая эволюция статистических систем со скалярным взаимодействием весьма слабо зависит от типа статистики, в этой статье численное моделирование мы будем проводить для вырожденных или почти вырожденных систем фермионов в качестве носителя скалярного заряда.

⁴см. также монографии [19], [20] и обзор [22].

1. Математическая модель статистических систем с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием

1.1. Микроскопическая динамика скалярно заряженных частиц

Канонические уравнения движения релятивистской частицы в фазовом пространстве Γ имеют вид (см., например, [9]):

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial P_i}; \quad \frac{dP_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad (1.1)$$

где $H(x, P)$ - релятивистски инвариантная функция Гамильтона. $u^i = dx^i/ds$ - вектор скорости частиц. Вычисляя полную производную от функции динамических переменных $\Psi(x^i, P_k)$, с учетом (1.1) найдем:

$$\frac{d\Psi}{ds} = [H, \Psi], \quad (1.2)$$

где введены инвариантные скобки Пуассона:

$$[H, \Psi] = \frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}. \quad (1.3)$$

Отметим, что скобка Пуассона (1.3) может быть переписана в явно ковариантной форме с помощью оператора ковариантного дифференцирования по Картану, $\tilde{\nabla}_i$,⁵ (см., например, [34])⁶:

$$\tilde{\nabla}_i = \nabla_i + \Gamma_{ij}^k P_k \frac{\partial}{\partial P_j}, \quad (1.4)$$

где ∇_i - оператор ковариантного дифференцирования по Риччи, а Γ_{ij}^k - символы Кристоффеля второго рода относительно метрики g_{ij} базы X . Оператор $\tilde{\nabla}$ определяется таким образом, что

$$\tilde{\nabla}_i P_k \equiv 0 \quad (1.5)$$

и выполняется следующее символическое правило дифференцирования функций:

$$\tilde{\nabla}_i \Psi(x, P) = \nabla_i [\Psi(x), P]. \quad (1.6)$$

Это правило означает, что для вычисления производной по Картану от функции $\Psi(x, P)$ достаточно вычислить обычную ковариантную производную функции при ковариантном постоянстве вектора импульса. Вследствие этого равенства введенный оператор удобен для выполнения дифференциальных и интегральных операций в фазовом пространстве Γ . Перепишем скобки Пуассона (1.3) в явно ковариантной форме:

$$[H, \Psi] \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i \Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial P_i} \tilde{\nabla}_i H, \quad (1.7)$$

Функция Гамильтона и соотношение нормировки для обобщенного импульса принимают вид⁷:

$$H(x, P) = \frac{1}{2} [m_*^{-1}(x)(P, P) - m_*] = 0, \quad (1.8)$$

$$H(x, P) = 0 \Rightarrow (P, P) = m_*^2, \quad (1.9)$$

где $m_* = m_*(\Phi)$ - эффективная масса частиц.

Отметим тождества действительные для функции Гамильтона (1.8), которые могут быть полезны в дальнейшем:

$$\tilde{\nabla}_i H = -\nabla_i m_*, \quad (1.10)$$

⁵Ковариантная производная в расслоении Γ [35].

⁶Ковариантные производные по Картану впервые были использованы в релятивистской статистике А.А. Власовым [36].

⁷Здесь и в дальнейшем принята универсальная система единиц $\hbar = c = G = 1$.

$$[H, \Psi] = \frac{1}{m_*} P^i \tilde{\nabla}_i \Psi + \partial_i m_* \frac{\partial \Psi}{\partial P_i}, \quad (1.11)$$

где $\Psi(x, P)$ - произвольная функция.

Инвариантный функционал действия классической частицы в скалярных полях $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ имеет вид [25]

$$S = \int m_* ds, \quad (1.12)$$

где $m_*(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - инвариантная эффективная масса частицы в скалярных полях. Вследствие аддитивности функции Лагранжа эффективная масса частицы должна иметь вид [25]:

$$m_* = m_0 + \sum_r q^{(r)} \Phi_r, \quad (1.13)$$

где m_0 - некоторая начальная масса покоя и $q^{(r)}$ - заряд частицы относительно скалярного поля Φ_r , которые мы предполагаем функционально независимыми. В частности, для скалярного синглета $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\} \equiv \Phi$

$$m_* = m_0 + q\Phi. \quad (1.14)$$

Как было показано в [21], отрицательность функции эффективной масс частицы не приводит к каким-либо противоречиям на уровне микроскопической динамики, так как наблюдаемый импульс частицы (как и трехмерная скорость $v^a = u^a/u^4$) сохраняет свою ориентацию в отличие от не наблюдаемой кинематической 4-скорости частицы u^i :

$$p^i = m_* \frac{dx^i}{ds} \equiv P^i. \quad (1.15)$$

Заметим, что эффективная масса частицы (1.13) может быть и отрицательной величиной, однако это никак не сказывается ни на уравнениях движения, ни на определении макроскопических потоков динамических величин [25], поскольку в эти величины и соответствующие им уравнения входит лишь абсолютная величина эффективной массы частицы. Так, например, уравнения Эйлера-Лагранжа для частицы в скалярных и гравитационных полях принимают вид:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \partial_{,k} \ln |m_*| \mathcal{P}^{ik}, \quad (1.16)$$

где:

$$\mathcal{P}^{ik} = \mathcal{P}^{ki} = g^{ik} - u^i u^k; \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (1.17)$$

- тензор ортогонального проектирования на направление u такой, что:

$$\mathcal{P}^{ik} u_k \equiv 0; \quad \mathcal{P}^{ik} g_{ik} \equiv 3. \quad (1.18)$$

1.2. Макроскопические средние и уравнения переноса динамических средних

Пусть $f_a(x, p)$ есть инвариантная функция распределения a -го сорта частиц в семимерном фазовом пространстве $\Gamma = X \times P$, причем

$$dP = \sqrt{-g} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_4} \quad (1.19)$$

есть инвариантный элемент объема 3-х мерного пространства импульсов, где p_4 есть положительный корень уравнения (1.9). С помощью инвариантной функции распределения определяются макроскопические средние некоторой динамической скалярной функции $\psi(x, p)$:

$$\Psi(\tau) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_V U_i dV \int_{P(X)} p^i dP \psi(x, p) f(x, p), \quad (1.20)$$

где U^i есть вектор скорости макроскопического поля наблюдателей, а τ есть время, измеряемое по часам этих наблюдателей. Внутренний интеграл по импульсному пространству в (1.20) представляет собой вектор потока динамической величины ψ . В частности, при $\psi = 1$ мы получим из (1.20) вектор плотности потока частиц⁸:

$$n^i(x) = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_{P(X)} p^i f(x, p) dP, \quad (1.21)$$

так что:

$$N(\tau) = \int_V n^i U_i dV \quad (1.22)$$

есть полное число частиц в объеме V в момент времени τ .

Пусть в статистической системе протекают реакции:

$$\sum_{A=1}^m \nu_A a_A \rightleftharpoons \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B a'_B, \quad (1.23)$$

где a_A - символы частиц, а ν_A - их числа в каждом канале реакции. Таким образом, обобщенные импульсы начального (I) и конечного (F) состояний равны:

$$p_I = \sum_{A=1}^m \sum_{\alpha}^{\nu_A} p_A^{\alpha}, \quad p_F = \sum_{B=1}^{m'} \sum_{\alpha'}^{\nu'_B} p_B^{\alpha'} \rightarrow p_I = p_F. \quad (1.24)$$

Далее, строгими следствиями общерелятивистских кинетических уравнений являются уравнения переноса динамических величин [25]:

$$\begin{aligned} & \nabla_i \sum_a \int_{P_0} \psi_a f_a p^i dP_a - \sum_a \int_{P_0} f_a m_* [H_a, \psi_a] dP_a = \\ & - \sum_{by\ channels} \int \left(\sum_{A=1}^m \nu_A \psi_A - \sum_{B=1}^{m'} \nu'_B \psi'_B \right) \times \delta^4(p_F - p_I) (Z_{IF} W_{IF} - Z_{FI} W_{FI}) \prod_{I,F} dP, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$W_{FI} = (2\pi)^4 |M_{IF}|^2 2^{-\sum \nu_A + \sum \nu'_B}$$

- матрица рассеяния канала реакций (1.23), ($|M_{IF}|$ - инвариантные амплитуды рассеяния);

$$\begin{aligned} Z_{IF} &= \prod_I f(p_A^{\alpha}) \prod_F [1 \pm f(p_B^{\alpha'})]; \\ Z_{FI} &= \prod_I [1 \pm f(p_A^{\alpha})] \prod_F f(p_B^{\alpha'}), \end{aligned}$$

знак "+" соответствует бозонам, "-" - фермионам (подробности см. в [10, 11]).

Полагая в (1.25) $\Psi_a = g_a$, где g_a - некоторые фундаментальные заряды, сохраняющиеся в реакциях (1.23), получим с учетом (1.11) уравнения переноса плотностей потоков числа частиц статистической системы:

$$\nabla_i J_G^i = 0, \quad (1.26)$$

где:

$$J_G^i = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} g_a \int_P f_a(x, p) p^i dP. \quad (1.27)$$

- вектор плотности фундаментального тока, соответствующего зарядам g_a . В частности, закон сохранения (1.26) всегда имеет место для каждого сорта частиц b ($g_a = \delta_a^b$) при условии упругости их столкновений.

⁸Числовой вектор по Дж. Сингу [32]

Положим в (1.25) $\Psi_a = P^k$. Тогда в результате закона сохранения импульса при столкновениях (1.23), подынтегральное выражение в больших скобках (1.25) становится равным:

$$\sum_{A=1}^m v_A \Psi_A - \sum_{B=1}^{m'} v'_B \Psi'_B \equiv P_I - P_F = 0.$$

Тогда, получим уравнения переноса энергии-импульса статистической системы:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sum_r \sigma_{(r)} \nabla^i \Phi_r = 0, \quad (1.28)$$

где введен тензор энергии-импульса статистической системы

$$T_p^{ik} = \sum_a \frac{2S+1}{(2\pi)^3} \int_p f_a(x, p) p^i p^k dP \quad (1.29)$$

и скалярная плотность заряда статистической системы относительно скалярного поля $\Phi_r, \sigma^{(r)}$:

$$\sigma^{(r)} = \sum_a \sigma_a^{(r)}, \quad (1.30)$$

где $\sigma_a^{(r)}$ скалярная плотность заряда a -компоненты статистической системы относительно скалярного поля Φ_r Φ_r :

$$\sigma_a^{(r)} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} m_a^* q_a^{(r)} \int_p f_a(x, p) dP_0. \quad (1.31)$$

В частности, для синглета (q, Φ) закон сохранения (1.28) принимает вид:

$$\nabla_k T_p^{ik} - \sigma \nabla^i \Phi = 0, \quad (1.32)$$

где (см. [10, 22]):

$$\sigma = \Phi \frac{2S+1}{(2\pi)^3} q^2 \int_p f(x, p) dP. \quad (1.33)$$

Следует отметить, что форма (ТЭИ) (1.29), а также скалярной плотности заряда (1.31), найденная для скалярно заряженных частиц при заданной функции Гамильтона является однозначным следствием канонических уравнений и предположения о сохранении полного импульса в локальных столкновениях частиц.

1.3. Фантомные скалярные поля с притяжением

Функция Лагранжа массивного фантомного скалярного поля с притяжением одноименно заряженных частиц имеет вид [23]⁹:

$$L_s = -\frac{1}{8\pi} (g^{ik} \Phi_{,i} \Phi_{,k} + m_s^2 \Phi^2), \quad (1.34)$$

а соответствующий тензор энергии-импульса равен:

$$T_s^{ik} = \frac{1}{8\pi} (-2\Phi^{,i} \Phi^{,k} + g^{ik} \Phi_{,j} \Phi^{,j} + g^{ik} m_s^2 \Phi^2). \quad (1.35)$$

В этой статье мы будем рассматривать скалярный синглет. В этом случае закон сохранения суммарного тензора энергии-импульса системы "скалярно заряженные частицы + скалярное поле" $T^{ik} = T_p^{ik} + T_s^{ik}$ имеет вид:

$$\nabla_k T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} (\square \Phi - m_s^2 \Phi - 4\pi \sigma) \nabla^i \Phi = 0, \quad (1.36)$$

⁹В [18] показано, что классические скалярные поля с притяжением одноименно скалярно заряженных частиц несовместимы с уравнениями Эйнштейна, как и фантомные скалярные поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц.

откуда мы получаем уравнение для скалярного поля с источником (1.37):

$$\square\Phi - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (1.37)$$

Решение уравнения поля для точечного скалярного источника, покоящегося в начале координат евклидова пространства

$$f(x, p) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})\delta^{(3)}(\mathbf{p}),$$

имеет вид [18]:

$$\Phi = q \frac{\sin m_s r}{r}, \quad (1.38)$$

и, фактически, совпадает с решением уравнений Эйнштейна для малых сферических гравитационных возмущений на фоне метрики Фридмана [37]. Из (1.38) следует, что собственная масса скалярной частицы при $m_0 = 0$ определяется ее потенциальной энергией в собственном скалярном поле¹⁰:

$$m_*^0 = \lim_{r \rightarrow 0} q\Phi(r) = qm_s. \quad (1.39)$$

Заметим, что решение полевого уравнения для фантомного поля в случае одиночного отличается от соответствующего решения полевого уравнения для классического поля заменой $\sin m_s r \rightarrow e^{-m_s r}$.

Далее, сила взаимодействия двух скалярно заряженных частиц с зарядами q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии r , согласно (1.16) и (1.17) равна:

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} (m_s r \cos m_s r - \sin m_s r). \quad (1.40)$$

На малых расстояниях

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{3} m_s^3, \quad (r m_s \ll 1) \quad (1.41)$$

эта сила является силой притяжения для одноименно скалярно заряженных частиц и действует подобно упругой силе с модулем упругости $k = q_1 q_2 m_s^3/3$. Поэтому можно утверждать, что при малых расстояниях пары одноименно скалярно заряженных частиц будут подобно осциллятору совершать гармонические колебания с частотой $\sqrt{k/m_*} = m_s \sqrt{q/3}$. На больших расстояниях

$$\mathbf{F}_{12} = -q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cos m_s r, \quad (r m_s \gg 1) \quad (1.42)$$

сила знакопеременна и падает пропорционально $1/r$. Для разноименно скалярно заряженных частиц сила F_{12} на малых расстояниях соответствует отталкиванию. Вакуумные решения уравнения (1.37) соответствуют запаздывающим и опережающим волнам при волновых числах $\mathbf{k}$, больших комптоновских,

$$\Phi = \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm i \sqrt{\mathbf{k}^2 - m_s^2} t + i \mathbf{k} \mathbf{r}}, \quad \mathbf{k}^2 > m_s^2, \quad (1.43)$$

распространяющимся с фазовой скоростью, меньшей скорости света. Для волновых чисел $\mathbf{k}$, меньших комптоновских, вакуумные решения соответствуют растущим и затухающим стоячим волнам¹¹:

$$\Phi = \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm \sqrt{m_s^2 - \mathbf{k}^2} t + i \mathbf{k} \mathbf{r}}, \quad \mathbf{k}^2 < m_s^2. \quad (1.44)$$

1.4. Локально равновесные статистические системы скалярно взаимодействующих частиц

В случае локального термодинамического равновесия (ЛТР), который только и будет рассматриваться в данной статье¹², функция распределения частиц имеет локально - равновесный вид:

$$f_{(a)}^0(x, p_a) = \left\{ \exp \left[\frac{-\mu_a + (v, P_a)}{\theta} \right] \mp 1 \right\}^{-1}, \quad (1.45)$$

¹⁰Заметим, что скалярный заряд частицы является безразмерной величиной ($|q| = 0$).

¹¹Эти особенности решений еще раз подчеркивают уникальный, "экзотический" характер фантомного скалярного поля.

¹²Бесстолкновительная кинетическая модель рассматривалась в работах [26], [27]

где знаки $-$ и $+$ соответствуют частицам с целым и полуцелым спином, v^i - времениподобный вектор макроскопической скорости статистической системы, так что:

$$(v, v) = 1, \quad (1.46)$$

θ - локальная температура статистической системы. Далее, μ_a - химический потенциал a -го сорта частиц, при этом химические потенциалы должны удовлетворять условиям химического равновесия:

$$\sum_{A=1}^m v_A \mu_A = \sum_{B=1}^{m'} v'_B \mu'_B. \quad (1.47)$$

1.5. Моменты равновесного распределения

Моменты распределения (1.45) равны [25]:

$$n_{(a)}^i(x) = n_{(a)}(x) v^i; \quad (1.48)$$

$$T_p^{ik}(x) = (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i v^k - \mathcal{P}_p g^{ik}, \quad (1.49)$$

где $n_{(a)}$ есть плотность числа частиц сорта " a ", $\mathcal{E}_p = \sum \mathcal{E}_{(a)}$ и $\mathcal{P}_p = \sum \mathcal{P}_{(a)}$ есть суммарные плотность энергии и давление статистической системы:

$$n_{(a)} = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.50)$$

$$\mathcal{E}_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.51)$$

$$\mathcal{P}_p = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.52)$$

$$T_p = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (1.53)$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_{(a)} \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}, \quad (1.54)$$

где введены две безразмерные скалярные функции:

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_{(a)} = \frac{\mu_{(a)}}{\theta}, \quad (1.55)$$

а макроскопические скаляры $\mathcal{E}_p$, $\mathcal{P}_p$, T_p и σ получаются суммированием соответствующих величин по компонентам системы.

Заметим, что химический потенциал безмассовых частиц, обладающих нулевыми фундаментальными зарядами, в состоянии ЛТР равен нулю. Этот вывод следует из того, что числа v_A^a таких частиц, участвующих в реакциях (1.23), могут быть совершенно произвольными. Тогда из факта существования реакции аннигиляции частиц и античастиц следует известное соотношение [39]:

$$\underline{\mu}_{(a)} = -\mu_{(a)}. \quad (1.56)$$

Заметим также, что релятивистский химический потенциал связан с импульсом Ферми p_f стандартным релятивистским соотношением:

$$\mu = \sqrt{m_*^2 + p_f^2}. \quad (1.57)$$

2. Математическая модель локально равновесной самогравитирующей статистической системы скалярно заряженных частиц

2.1. Полная система уравнений

Полная система самосогласованных макроскопических уравнений, описывающих самогравитирующую статистическую систему скалярно заряженных частиц, состоит:

- Во-первых, из уравнений Эйнштейна:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} R g^{ik} = 8\pi (T_p^{ik} + T_s^{ik}), \quad (2.1)$$

где T_p^{ik} - определенный выше тензор энергии - импульса статистической системы (1.49), (1.51), (1.52), а T_s^{ik} тензор энергии - импульса скалярного поля (1.35).

- Во-вторых, из уравнений переноса тензора энергии - импульса частиц (1.32).
- В-третьих, из уравнения скалярного поля с источником (1.37).
- В-четвертых, из закона сохранения частиц (1.26):

$$\nabla_i \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}^i = 0. \quad (2.2)$$

Выясним, к чему приводят законы сохранения (1.32) и (2.2) в условиях LTE (см. [31]). С помощью (1.48) приведем закон сохранения числа частиц (2.2) к виду:

$$\nabla_k (\Delta n v^k) = 0, \quad \Delta n \equiv \sum_{(a)} e_{(a)} n_{(a)}. \quad (2.3)$$

Из соотношения нормировки вектора скорости (1.46) вытекает известное тождество:

$$v^k_{,i} v^i_k \equiv 0. \quad (2.4)$$

Далее, с учетом определения (1.49) законы сохранения тензора энергии - импульса статистической системы (1.32) можно привести к виду:

$$(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^i_{,k} v^k = (g^{ik} - v^i v^k) (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (2.5)$$

$$\nabla_k (\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) v^k = (\mathcal{P}_{p,k} + \sigma \Phi_{,k}) v^k. \quad (2.6)$$

Таким образом, формально на 3 макроскопические скалярные функции $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e$ и 3 независимые компоненты вектора скорости v^i макроскопические законы сохранения дают 5 независимых уравнений (2.3) - (2.6), так как одно из уравнений (2.5) является зависимым от остальных вследствие тождества (2.4). Однако, не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, поскольку все они определяются локально равновесными функциями распределения (1.45). При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляра, $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p, n_e, \sigma$, определяются двумя термодинамическими скалярами — некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ . Таким образом, система уравнений (2.3) - (2.6) оказывается полностью определенной.

2.2. Космологическая модель

Рассмотрим сформулированную выше самосогласованную математическую модель применительно к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

В этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Нетрудно убедиться, что $v^i = \delta_4^i$ обращает уравнения (2.5) в тождества, система уравнений (2.3) - (2.6) сводятся к двум дифференциальным уравнениям относительно двух термодинамических функций μ и θ . а :

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma\dot{\Phi}; \quad (2.7)$$

$$\Delta n + 3\frac{\dot{a}}{a}\Delta n = 0 \Rightarrow \Delta n a^3 = \text{Const}. \quad (2.8)$$

При $\Phi = \Phi(t)$ тензор энергии - импульса скалярного поля также принимает вид тензора энергии - импульса изотропной однородной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s)v^i v^k - \mathcal{P}_s g^{ik}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2); \quad (2.10)$$

$$\mathcal{P}_s = -\frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2), \quad (2.11)$$

так что:

$$\mathcal{E}_s + \mathcal{P}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{4\pi}. \quad (2.12)$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 4\pi\sigma. \quad (2.13)$$

К этим уравнениям необходимо добавить нетривиальное уравнение Эйнштейна:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\mathcal{E}, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{E}$ - суммарная плотность энергии фермионов и скалярного поля. Эта система уравнений (2.7), (2.8), (2.13) и (2.14) относительно переменных $\theta(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(t)$, $a(t)$ описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции статистической системы с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием (см. [23]). В этих уравнениях одно, (2.8), является алгебраическим, два, (2.7) и (2.14), являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка и одно уравнение, (2.13), является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Таким образом, при приведении этой системы к нормальному виду мы получим систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с алгебраической связью относительно пяти функций:

$$\mu(t); \theta(t); \Phi(t); Z(t) = \dot{\Phi}; a(t). \quad (2.15)$$

2.3. Упрощение уравнений космологической модели

Заметим следующие важные обстоятельства:

1. Система уравнений (2.7), (2.13) и (2.14) с учетом определений (1.50) - (1.54), а также (2.10) и (2.11) является автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций (2.15), так как временная переменная явно не входит в эти уравнения. Следовательно, эту переменную можно исключить, переходя к новой системе переменных:

$$\mu(a); \theta(a); \Phi(a); \Phi'_a; \dot{a}(a), \quad (2.16)$$

полагая

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\phi}{da}\dot{a}; \quad \ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{da}\dot{a} \equiv \frac{1}{2}\frac{d\dot{a}^2}{da}; \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{da^2} + \frac{1}{2}\frac{d\phi}{da}\frac{d\dot{a}^2}{da}. \quad (2.17)$$

2. В этих переменных закон сохранения энергии-импульса статистической системы (2.7) принимает вид:

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{da} + \frac{3}{a}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma\Phi'_a. \quad (2.18)$$

3. В этих переменных уравнение скалярного поля (2.13) принимает вид:

$$\Phi''_{aa}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\Phi'_a\frac{d\dot{a}^2}{da} + 3\frac{\dot{a}^2}{a}\Phi'_a - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma. \quad (2.19)$$

4. Наконец, уравнение Эйнштейна (2.14) становится алгебраическим уравнением относительно переменных (2.16):

$$\left(\frac{3}{a^2} + \Phi_a'^2\right)\dot{a}^2 = m_s^2\Phi^2 + 8\pi\mathcal{E}_p. \quad (2.20)$$

В принципе, это последнее уравнение легко разрешить относительно $\dot{a}$ и результат подставить в уравнение поля (2.19). В результате у нас останется система трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных $\Phi(a)$, $\Phi'_a(a)$ и одной из термодинамических функций. Найдя решение этих уравнений, мы должны разрешить уравнение

$$\frac{da}{dt} = \dot{a} \Rightarrow a = a(t). \quad (2.21)$$

3. Математическая модель релятивистской почти вырожденной Ферми - системы

3.1. Макроскопические скаляры для почти вырожденной однокомпонентной Ферми-системы

В этом разделе мы более подробно исследуем аналитические свойства почти вырожденной локально равновесной Ферми - системы с межчастичным скалярным взаимодействием. Заметим, что эти свойства, относящиеся непосредственно к частицам, не зависят от характера скалярного взаимодействия: они совпадают для систем с классическим и фантомным скалярным взаимодействием. Поскольку в этой статье мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, необходимо учитывать в состоянии термодинамического равновесия частицы и античастицы одновременно. Рассмотрим вопрос о необходимости учета античастиц для простоты в симметричной модели, в которой $m_*^+ = m_*^- = |q\Phi|$ (см., например, [31]). Согласно (1.56) в условиях ЛТР должно выполняться условие антисимметрии химических потенциалов частиц и античастиц. Таким образом, для макроскопических скаляров (1.50) - (1.52) имеем:

$$n_{\pm} = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1} p^2 dp; \quad (3.1)$$

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 \sqrt{m_*^2 + p^2} dp}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1}; \quad (3.2)$$

$$\mathcal{P}_{\pm} = \frac{2S+1}{6\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\mp\gamma + \frac{\sqrt{m_*^2 + p^2}}{\theta}} + 1} \frac{p^4 dp}{\sqrt{m_*^2 + p^2}}. \quad (3.3)$$

Предполагая выполненным закон сохранения скалярного заряда фермионов (2.8), запишем:

$$\Delta n = \frac{2S+1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{p^2}{e^{-\gamma + \frac{\varepsilon(p)}{\theta}} + 1} - \frac{p^2}{e^{\gamma + \frac{\varepsilon(p)}{\theta}} + 1} \right) dp, \quad (3.4)$$

где Δn - константа в правой части (2.8), пропорциональная избытку фермионов над антифермионами; $\varepsilon(p) = \sqrt{m_*^2 + p^2}$ - кинетическая энергия частиц. Будем далее полагать выполненным условие сильного вырождения:

$$\gamma \gg 1 \Rightarrow e^{-\gamma} \ll 1. \quad (3.5)$$

Будем разлагать соответствующие интегралы по этой малой экспоненте. Вследствие (3.5) в подинтегральных выражениях для античастиц член с экспонентой является большим по сравнению с единицей, которую можно отбросить. Как следует из (3.5) в условиях сильного вырождения число античастиц экспоненциально мало в статистической системе даже, если она является ультрарелятивистской.

Античастицы:

Таким образом, макроскопические плотности для античастиц в условиях сильного вырождения легко находятся [28] и сводятся к классическим выражениям для соответствующих плотностей с учетом множителя $e^{-\gamma}$:

$$n_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda}; \quad (3.6)$$

$$\mathcal{E}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \left(\frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right); \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}_- = \frac{(2S+1)}{2\pi^2} m_*^4 e^{-\gamma} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2}; \quad (3.8)$$

$$\sigma_- = \frac{2S+1}{2\pi^2} q m_*^3 e^{-\gamma} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}, \quad (3.9)$$

где

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2n} t dt \quad (3.10)$$

- функции Бесселя мнимого аргумента (см., например, [42]), $\Gamma(z)$ - гамма-функция.

Частицы:

Для нахождения макроскопических скаляров для скалярно заряженных фермионов используем метод Зоммерфельда (см., например, [39]) приближенного вычисления интеграла вида:

$$\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{-\gamma+\varepsilon/\theta} + 1} \approx \int_0^\mu f(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6} \theta^2 f'_\varepsilon(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} \theta^4 f'''_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(\mu) + \dots \quad (3.11)$$

для малых θ . При этом необходимо учесть релятивистскую связь (1.57) в интегралах (3.11), что приведет к изменению пределов интегрирования. В случае плотности числа частиц n_+ функция $f(\varepsilon)$ принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2} \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2}, \quad (3.12)$$

поэтому интеграл (3.1) с точностью до θ^2 можно аппроксимировать выражением:

$$n_+ = \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} + \theta^2 \frac{m_*}{6} \frac{(1 + 2\psi^2)}{\psi}, \quad (3.13)$$

где введена безразмерная функция

$$\psi = \frac{p_f}{m_*}. \quad (3.14)$$

Вычислим теперь плотность энергии Ферми частиц (3.2). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ для интеграла (3.11) принимает вид:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{2\pi^2} \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon^2 - m_*^2}. \quad (3.15)$$

Тогда с точностью до квадратичного по температуре слагаемого плотность энергии фермионов равна:

$$\mathcal{E}_+ = \frac{m_*^4}{8\pi^2} \left[\psi \sqrt{1+\psi^2} (1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \frac{\sqrt{1+\psi^2} (1+3\psi^2)}{\psi}. \quad (3.16)$$

Вычислим, наконец, давление Ферми - частиц (3.3). В этом случае функция $f(\varepsilon)$ для интеграла (3.11) равна:

$$f(\varepsilon) = \frac{2S+1}{6\pi^2} (\varepsilon^2 - m_*^2)^{3/2}, \quad (3.17)$$

и с точностью до квадратичного по температуре слагаемого давление фермионов равно:

$$\mathcal{P}_+ = \frac{m_*^4}{24\pi^2} \left[\psi \sqrt{1+\psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \psi \sqrt{1+\psi^2}. \quad (3.18)$$

Слагаемые в квадратных скобках (3.16) и (3.18) совпадают с соответствующими выражениями для полностью вырожденной однокомпонентной Ферми - системы. Из (3.13) следует, что условие малости температурных поправок эквивалентно условию (3.5), то есть,

$$\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{p_f}{\theta} \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda\psi \gg 1. \quad (3.19)$$

Фотоны:

Для установления термодинамического равновесия между частицами и античастицами при высоких энергиях необходимо учитывать фотоны и другие безмассовые частицы, которые могут быть продуктами аннигиляции фермионов: именно, условие (1.56) справедливо при учете реакций аннигиляции частиц и античастиц. При этом в реакциях аннигиляции рождаются фотоны, которые необходимо учитывать в модели двухкомпонентной Ферми системы.

В условиях ЛТР плотность энергии и давление фотонов задаются выражениями:

$$\mathcal{E}_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \theta^4, \quad \mathcal{P}_\gamma = \frac{\pi^2}{45} \theta^4. \quad (3.20)$$

3.2. Закон сохранения заряда фермионов

В рассматриваемом приближении (3.5) закон сохранения числа фермионов (2.8) примет вид:

$$a^3 \Delta n = a^3 (n_+ - n_-) = a^3 \left[\frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} + \frac{m_*^3}{6\lambda^2} \frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \frac{m_*^3 e^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda} \right] = \text{Const}. \quad (3.21)$$

Разложим Δn по малости температурной поправки:

$$\Delta n = n_0 + \delta n(\theta), \quad (3.22)$$

где

$$n_0 = \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} \quad (3.23)$$

есть плотность числа частиц полностью вырожденной Ферми - системы. Вычисляя поправку δn , найдем:

$$\delta n = \frac{m_*^3}{6\lambda^2} \frac{(1+2\psi^2)}{\psi} - \frac{m_*^3 e^{-\lambda\sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda}. \quad (3.24)$$

В нулевом по $1/\gamma$ приближении вследствие закона сохранения числа частиц (3.21) и (3.23) получим интеграл движения:

$$m_* \psi a = \text{Const} \Rightarrow p_f a = \text{Const}. \quad (3.25)$$

3.3. Закон сохранения энергии-импульса

Найдем суммарные плотность энергии и давление Ферми - системы, состоящей из скалярно заряженных фермионов, антифермионов и фотонов. Используя соотношения (3.7), (3.8), (3.16), (3.18) и (3.20), получим выражение для полной плотности энергии статистической системы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = & \frac{m_*^4}{8\pi^2} \left[\psi \sqrt{1+\psi^2} (1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2}) \right] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \frac{\sqrt{1+\psi^2} (1+3\psi^2)}{\psi} + \\ & e^{-\gamma} \frac{m_*^4}{\pi^2} \left(\frac{K_3(\lambda)}{\lambda} - \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} \right) + \frac{\pi^2}{15} \theta^4 \end{aligned} \quad (3.26)$$

и ее давления:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p = & \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1+\psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})] + \theta^2 \frac{m_*^2}{6} \psi \sqrt{1+\psi^2} + \\ & e^{-\gamma} \frac{m_*^4}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{45} \theta^4. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Переходя к безразмерным функциям λ, ψ

$$\theta = \frac{m_*}{\lambda}, \quad \gamma = \lambda \sqrt{1+\psi^2}, \quad (3.28)$$

с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя

$$K_3(\lambda) = K_1(\lambda) + \frac{4K_2(\lambda)}{\lambda} \quad (3.29)$$

получим окончательные выражения для макроскопических скаляров $\mathcal{E}_p, \mathcal{P}_p$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = & \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1+\psi^2} (1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \frac{\sqrt{1+\psi^2} (1+3\psi^2)}{\psi} + \\ & \frac{m_*^4 e^{-\lambda \sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2} \frac{\lambda K_1(\lambda) + 3K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{15} \frac{m_*^4}{\lambda^4}; \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p = & \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1+\psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})] + \frac{m_*^4}{6\lambda^2} \psi \sqrt{1+\psi^2} + \\ & \frac{m_*^4 e^{-\lambda \sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_2(\lambda)}{\lambda^2} + \frac{\pi^2}{45} \frac{m_*^4}{\lambda^4}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Аналогично найдем скалярную плотность заряда:

$$\sigma = \frac{qm_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})] + \frac{qm_*^3}{6\lambda^2} \frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi} + \frac{qm_*^3 e^{-\lambda \sqrt{1+\psi^2}}}{\pi^2} \frac{K_1(\lambda)}{\lambda}. \quad (3.32)$$

Разложим полученные макроскопические скаляры по малости температурных поправок:

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_0 + \delta \mathcal{E}(\theta); \quad \mathcal{P}_p = \mathcal{P}_0 + \delta \mathcal{P}(\theta); \quad \sigma = \sigma_0 + \delta \sigma(\theta),$$

где $\mathcal{E}_0, \mathcal{P}_0$ и σ_0 - первые члены в правых частях соотношений (3.30), (3.31) и (3.32), соответствующие полностью вырожденной Ферми - системе. Таким образом, для полностью вырожденной Ферми - системы закон сохранения энергии - импульса частиц (2.7) принимает вид:

$$\dot{\mathcal{E}}_0 + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\mathcal{E}_0 + \mathcal{P}_0) - \sigma_0 \dot{\Phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_*^4 \psi^3 \sqrt{1+\psi^2}}{\pi^2} \frac{d}{dt} \ln(m_* \psi a) = 0 \quad (3.33)$$

и тождественно выполняется вследствие интеграла движения (3.25). Полученный интеграл движения необходимо использовать в температурных поправках. Важно подчеркнуть, что интеграл

движения (3.25) получается как интеграл закона сохранения энергии полностью вырожденной Ферми - системы, закон сохранения числа фермионов можно получить из этого закона. Таким образом, снимается кажущееся противоречие между числом независимых уравнений и числом неизвестных функций в условиях полного вырождения¹³.

Таким образом, автономная система уравнений (2.7), (2.13) и (2.14) с учетом определений (3.30) - (3.32), а также интеграла (3.25) описывает самосогласованную космологическую модель на основе релятивистской статистической системы, состоящей из почти вырожденных скалярно заряженных фермионов, фотонов и фантомного скалярного поля.

4. Асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе

4.1. Ультрарелятивистский предел и условие сильного вырождения

Исследуем теперь асимптотическое поведение системы в ультрарелятивистском пределе, когда $p_f \gg m$, $\theta \gg m$. Тогда:

$$\mu \rightarrow p_f, \quad \gamma \rightarrow \frac{p_f}{\theta}. \quad (4.1)$$

Условие сильного вырождения фермионов $\gamma \gg 1$ приводит к ограничению на функции:

$$\gamma = \frac{p_f}{\theta} \gg 1 \Rightarrow p_f \gg \theta. \quad (4.2)$$

Разложим макроскопические скаляры статистической системы (3.30) - (3.32) по малому параметру отклонения от вырождения релятивистской Ферми - системы:

$$\xi = \left(\frac{\theta}{p_f} \right)^2 \equiv \frac{1}{\psi^2 \lambda^2} \ll 1. \quad (4.3)$$

В линейном приближении по ξ макроскопические скаляры для Ферми - системы (3.30) - (3.32) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{p_f^3}{3\pi^2} + \xi \frac{p_f^3}{3}, \\ \mathcal{E}_p &= \frac{p_f^4}{4\pi^2} + \xi \frac{p_f^4}{2} + \frac{\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2, \\ \mathcal{P}_p &= \frac{p_f^4}{12\pi^2} + \xi \frac{p_f^4}{6} + \frac{\pi^2}{45} (p_f^2 \xi)^2, \\ \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, в этом приближении $\sigma = 0$, а, значит, ультрарелятивистские почти вырожденные фермионы взаимодействуют со скалярным полем минимально, то есть скалярное поле становится свободным.

4.2. Законы сохранения

1. Из закона сохранения числа фермионов (2.8) следует:

$$\begin{aligned} a^3 p_f^3 (1 + \pi^2 \xi) &= \text{Const} \Rightarrow \\ p_f &= \frac{p_0}{a} (1 + \pi^2 \xi)^{-1/3}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, окончательно получим для импульса Ферми соотношение:

$$p_f = \frac{p_0}{a} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \xi \right). \quad (4.6)$$

¹³пропала локальная температура $\theta = 0$

2. Закон сохранения энергии-импульса переписывается как:

$$\frac{p_f^4}{\pi^2} \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + 2\pi^2 \xi \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + \frac{\dot{\xi}}{4\xi} \right) \right] + \frac{4\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2 \left[\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{p}_F}{p_f} + \frac{\dot{\xi}}{2\xi} \right] = 0.$$

Раскладывая полученное выражение по малости параметра ξ , получим окончательно:

$$\frac{p_f^4}{\pi^2} \left[\frac{d}{dt} \ln(ap_f) + 2\pi^2 \xi \frac{d}{dt} \ln(ap_f \xi^{1/4}) \right] + \frac{4\pi^2}{15} (p_f^2 \xi)^2 \frac{d}{dt} \ln(ap_f \xi^{1/2}) = 0. \quad (4.7)$$

В случае полного вырождения $\xi = 0$ выражение (4.6) приводит к полученному выше интегралу (3.25). В линейном по малости ξ приближении выражение (4.7) переписем как:

$$\frac{C_1}{a^4} \left[-\frac{\pi^2}{3} \xi \left(1 + \frac{\pi^2}{3} \xi \right) + 2\pi^2 \xi \dot{\xi} \left(\frac{1}{4\xi} - \frac{\pi^4}{9} \xi - \frac{\pi^2}{3} \right) \right] + \frac{C_2}{a^4} \left(\xi^2 - \frac{4\pi^2}{3} \xi^3 \right) \dot{\xi} \left(\frac{1}{2\xi} - \frac{\pi^4}{9} \xi - \frac{\pi^2}{3} \right) = 0.$$

Так как параметр вырождения ξ является свободным параметром и не зависит от других функций, входящих в соотношение (4.8), последнее может выполняться лишь в случае:

$$\dot{\xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = \text{Const}, \quad (4.8)$$

откуда получим закон эволюции импульса Ферми и температуры в ультрарелятивистском пределе:

$$p_f = \frac{p_0}{a} \left(1 - \frac{\pi^2}{3} \xi \right) = \frac{\bar{p}_0}{a}, \quad \theta = \frac{\theta_0}{a}. \quad (4.9)$$

4.3. Учет нерелятивистских поправок

В ультрарелятивистском пределе для почти вырожденных фермионов должны выполняться соотношения

$$p_f \gg m_* \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\psi} = \frac{m_*}{p_f} \rightarrow 0.$$

Для почти вырожденных фермионов $\gamma \gg 1$ имеем:

$$\gamma = \frac{\mu}{\theta} = \frac{\sqrt{m_*^2 + p_f^2}}{\theta} \equiv \frac{p_f \sqrt{1 + (1/\psi)^2}}{\theta}. \quad (4.10)$$

В ультрарелятивистском пределе ($1/\psi \rightarrow 0$):

$$\gamma \rightarrow \bar{\gamma} \equiv \frac{p_f}{\theta}.$$

Разложим макроскопические скаляры по малости нерелятивистских поправок:

$$\begin{aligned} \Delta n &= \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2} (1 + \pi^2 \xi), \\ \mathcal{E}_p &= \frac{m_*^4 \psi^4}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\psi^2} + 2\pi^2 \xi \right) + \frac{\pi^2}{15} (m_*^2 \psi^2 \xi)^2, \\ \mathcal{P}_p &= \frac{m_*^4 \psi^4}{12\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\psi^2} + 2\pi^2 \xi \right) + \frac{\pi^2}{45} (m_*^2 \psi^2 \xi)^2, \\ \sigma &= \frac{q m_*^3 \psi^4}{2\pi^2} \frac{1}{\psi^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Доля античастиц в приближении $\psi \gg 1$, $\lambda \rightarrow 0$ равна:

$$\frac{n_-}{n_+} = 6e^{-1/\sqrt{\xi}} \xi^{3/2} \ll 1 \quad (4.12)$$

и зависит только от ξ , поэтому вследствие (4.8) относительная концентрация античастиц остается постоянной.

Подводя итоги этому разделу, отметим следующие особенности поведения *почти вырожденной* статистической системы:

1. В ходе космологической эволюции импульс Ферми изменяется по закону (3.25):

$$ap_f = \text{Const.} \quad (4.13)$$

2. В ходе космологической эволюции температура почти вырожденной Ферми - системы меняется по закону:

$$a\theta = \text{Const}, \quad (4.14)$$

а степень ее вырожденности остается постоянной.

3. В ходе космологической эволюции степень поляризации ультрарелятивистской почти вырожденной Ферми - системы (4.12) остается малой и постоянной.

Заметим далее следующее обстоятельство. Степень релятивизма почти вырожденной статистической системы, очевидно, определяется условием:

$$p_f^2 + \theta^2 \gg m_*^2 \Rightarrow \psi^2(1 + \xi^2) \gg 1, \quad (4.15)$$

то есть, в условиях сильного вырождения ($\xi \rightarrow 0$) сводится, фактически, к одному условию:

$$\psi \gg 1 \Rightarrow p_f \gg m_*. \quad (4.16)$$

Поэтому условие релятивизма статистической системы почти вырожденных фермионов легко может быть нарушено, если только потенциал скалярного поля не падает пропорционально $1/a$, как в случае конформно инвариантного скалярного поля [26], [27]. Как будет видно ниже, условие релятивизма, действительно, достаточно быстро нарушается вследствие роста потенциала скалярного поля. Вместе с этим статистическая система становится нерелятивистской, а степень ее вырождения растет.

5. Математическая модель космологической эволюции полностью вырожденной статистической системы с фантомным скалярным взаимодействием

5.1. Полная система уравнений

Итак, в условиях полного вырождения макроскопические скаляры однокомпонентной теперь статистической системы равны:

$$n = \frac{p_f^3}{3\pi^2} \equiv \frac{m_*^3 \psi^3}{3\pi^2}; \quad (5.1)$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (5.2)$$

$$\mathcal{P}_p = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) + 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (5.3)$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})], \quad (5.4)$$

причем:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{p_f}{m_*} \quad m_* = |m_0 + q\Phi|; \\ p_f &= \frac{p_0}{a}, \quad p_0 = p_f|_{a=1}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, в условиях полного вырождения все макроскопические скаляры явно определяются элементарными скалярными функциями $\Phi(t)$ и $a(t)$.

В ультрарелятивистском пределе значения этих скаляров определены формулами (4.4), в которых надо положить $\xi = 0$, в нерелятивистском пределе

$$m_* \gg p_F \Rightarrow \psi \ll 1 \quad (5.6)$$

формулы (5.2) - (5.4) имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= \frac{m_* p_f^3}{3\pi^2} = \frac{|m_0 + q\Phi|^3 p_0^3}{3\pi^2 a^3}; \\ \mathcal{P}_p &= 0; \quad \sigma = \frac{q p_f^3}{3\pi^2} = \frac{q p_0^3}{\pi^2 a^3}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

В свою очередь, скалярные функции $\Phi(t)$ и $a(t)$ определяются системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений, (2.13) и (2.14):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_s^2\Phi = 4\pi\sigma; \quad (5.8)$$

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (5.9)$$

где $\mathcal{E}_p$ - плотность энергии Ферми - системы (5.2), а $\mathcal{E}_s$ - плотность энергии фантомного скалярного поля (2.10):

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{8\pi}(-\dot{\Phi}^2 + m_s^2\Phi^2). \quad (5.10)$$

Вводя переменные:

$$Z(t) = \dot{\Phi}; \quad \Lambda(t) = \ln a \Leftrightarrow a = e^\Lambda, \quad (5.11)$$

приведем уравнения (5.8) и (5.10) к виду:

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi); \quad (5.12)$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p(\Lambda, \Phi) - Z^2 + m_s^2\Phi^2. \quad (5.13)$$

Для того, чтобы получить из этой системы нормальную систему дифференциальных уравнений, удобную для численного моделирования, необходимо подставить в левую часть уравнения (5.12) выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (5.13).

5.2. Задача Коши

Сформулируем теперь задачу Коши для системы (5.11), (5.12) и (5.13). Пользуясь допустимыми преобразованиями, выберем масштабный фактор и время таким образом, чтобы было:

$$\Lambda(0) = 0; \quad p_f(0) = p_0; \quad \Phi(0) = \Phi_0; \quad Z(0) = Z_0. \quad (5.14)$$

Поскольку $a(0) = 1$, выбранный момент времени не совпадает с временной сингулярностью. Для того, чтобы окончательные результаты переформулировать в терминах космологического времени t , отсчитываемого от космологической сингулярности, можно предложить два алгоритма. В первом необходимо распространить численное интегрирование на отрицательный интервал времени до тех пор, пока не получим $a(-t_0) = 0$. Тогда все вычисленные функции необходимо преобразовать следующим образом: $\Psi(t) \rightarrow \psi(t + t_0)$. Второй алгоритм заключается в следующем. Поскольку мы рассматриваем здесь класс космологических моделей с ультрарелятивистским стартом, в котором на ранних стадиях космологической эволюции вклад скалярного поля в энергобаланс исчезающе мал, мы можем воспользоваться известным соотношением для ультрарелятивистской вселенной (см., например, [38]):

$$\mathcal{E} = \frac{3}{32\pi\tau^2}, \quad (5.15)$$

где τ - истинно космологическое время. Тогда мы можем осуществить следующую перекалибровку нашей временной переменной t . Пусть $\mathcal{E}(t_0)$ есть величина полной плотной плотности

энергии на ранних стадиях, полученная в результате численного интегрирования. Тогда должно быть:

$$\mathcal{E}(t_0) = \frac{3}{32\pi\tau_0^2} \Rightarrow \tau_0 = \sqrt{\frac{3}{32\pi\mathcal{E}(t_0)}}. \quad (5.16)$$

Заметим, что подобная перекалибровка времени к космологическому времени не была произведена в цитированных выше работах [29] - [31]. Временная переменная t на графиках космологической эволюции этих работ имеет относительный смысл. Для приведения этих графиков к космологическому времени необходимо произвести указанный сдвиг временной шкалы:

$$t \rightarrow t + (\tau_0 - t_0). \quad (5.17)$$

В данной статье мы будем производить указанную перекалибровку временной шкалы на всех графиках, таким образом, время t всюду будет отсчитываться от космологической сингулярности. Далее для простоты будем всюду полагать:

$$Z_0 = 0. \quad (5.18)$$

5.3. Анализ математической модели на малых временах $m_s t \ll 1$

Как указано выше, мы рассматриваем космологические модели с ультрарелятивистским стартом, в котором инфляционный режим расширения может реализовываться на более поздних стадиях. В самом крайнем, ультрарелятивистском пределе $\psi \rightarrow \infty$ формулы (4.4) для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{p_F^4}{4\pi^2}; \quad \mathcal{P}_p = \frac{p_F^4}{12\pi^2}; \quad \sigma = 0. \quad (5.19)$$

Далее, ранним стадиям соответствует условие:

$$m_s t \ll 1. \quad (5.20)$$

В этом случае уравнение поля принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} = 0 \quad (5.21)$$

и имеет своим первым интегралом

$$a^3\dot{\Phi} = C_1, \quad (5.22)$$

где C_1 - произвольная константа. В этом же приближении плотность энергии скалярного поля (5.10) равна:

$$\mathcal{E}_s = -\frac{C_1^2}{8\pi a^6} \quad (5.23)$$

и уравнение Эйнштейна (5.9) с учетом (5.19) и (5.5) принимает вид

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{C_1^2}{a^6} + \frac{2p_0^4}{a^4}. \quad (5.24)$$

В случае классического скалярного поля главный вклад вблизи сингулярности вносит скалярное поле, имеющее в этом случае предельно жесткое уравнение состояния $\mathcal{E}_s = \mathcal{P}_s$ и приводящее к закону эволюции масштабного фактора $a \sim t^{1/3}$ [40]. Для фантомного же скалярного поля такой возможности $C_1 \neq 0$ не существует именно вследствие преобладания в этом случае вклада отрицательного скалярного поля вблизи сингулярности. Поэтому для фантомного поля, в отличие от классического, вблизи сингулярности остается единственная возможность:

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Const}, \quad (m_s t \ll 1). \quad (5.25)$$

В этом случае уравнение Эйнштейна принимает вид:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = m_s^2 \Phi_0^2 + \frac{2p_0^4}{a^4}. \quad (5.26)$$

и имеет своим решением

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}p_0^2}{m_s\Phi_0}} \sqrt{\sinh\left(\frac{2m_s\Phi_0}{\sqrt{3}}t\right)}. \quad (5.27)$$

Решение (5.27) принадлежит к классу решений, полученных в [41] и описывающих плавный переход с ультрарелятивистской стадии $a \sim t^{1/2}$ на стадию инфляции $a \sim e^{v_0 t}$. Как видно из решения (5.26), переход на инфляционную стадию происходит во времена порядка:

$$t \gtrsim t_{inf} = \frac{\sqrt{3}}{4m_s\Phi_0}. \quad (5.28)$$

С другой стороны, условием корректности рассматриваемого приближения является (5.20). Отсюда можно сделать следующий вывод: при $t_{inf}m_s < 1$ инфляция может развиваться на рассматриваемом промежутке времени, в противном случае вся ранняя эпоха вселенной является ультрарелятивистской. Итак, условием возникновения ранней инфляции (во времена, меньшие m_s^{-1}) в случае системы с фантомным полем является малость начального скалярного потенциала¹⁴:

$$\Phi_0 \ll \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad (5.29)$$

5.4. Безмассовое фантомное поле

Очевидно, что к случаю малого времени $m_s t \ll 1$ целиком относится и случай безмассового фантомного поля. Замечательным является тот факт, что масса скалярного поля m_s выпадает из условия (5.29). В частности, для безмассового скалярного поля, полагая в (5.27) $m_s \rightarrow 0$ получим:

$$a(t) = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/4} \sqrt{t} \quad (5.30)$$

ультрарелятивистскую асимптотику ($\Omega = -1$). Как видно из предыдущего анализа, ультрарелятивистская асимптотика будет справедлива для безмассового фантомного поля до тех пор, пока фермионы остаются ультрарелятивистскими.

Рассмотрим теперь случай нерелятивистской статистической системы для безмассового скалярного поля. В нерелятивистском пределе $\psi \rightarrow 0$ формулы (4.4) для макроскопических скаляров принимают вид:

$$\mathcal{E}_p = \frac{m_* p_f^3}{3\pi^2} = \frac{|m_0 + q\Phi|^3 p_0^3}{3\pi^2 a^3}; \quad (5.31)$$

$$\mathcal{P}_p = 0; \quad \sigma = \frac{q p_f^3}{3\pi^2} = \frac{q p_0^3}{3\pi^2 a^3}. \quad (5.32)$$

В этом случае мы опять получаем уравнение безмассового скалярного поля без источника (5.21) и, следовательно, по указанным выше причинам его единственно допустимое постоянное решение (5.25) $\Phi = \Phi_0$. Таким образом, вклад в энергию вносит лишь нерелятивистские фермионы, в результате чего мы получим решение

$$a(t) = \sqrt{\frac{2m_*^{(0)3} p_0^3}{\pi}} t^{2/3} \quad (m_*^{(0)} = |m_0 + q\Phi_0|), \quad (5.33)$$

¹⁴как это ни представляется, на первый взгляд, парадоксальным

соответствующее нерелятивистскому режиму расширения ($\Omega = -1/2$). Таким образом, в случае безмассового скалярного поля космологическая эволюция может стартовать с ультрарелятивистского режима и окончить нерелятивистским. Для исследования поведения модели с безмассовым фантомным полем на промежуточных этапах необходимо численное интегрирование.

5.5. Свойства космологической модели с массивным фантомным полем на больших временах $m_s t \gg 1$

Пусть теперь $m_s \neq 0$. Рассмотрим поведение космологической модели при больших временах

$$m_s t \gg 1, \quad (5.34)$$

предполагая, что на этих временах Ферми - система уже станет нерелятивистской. Поскольку, однако, на таких временах масштабный фактор станет большой величиной, то согласно (5.32) плотность скалярного заряда σ снова станет малой величиной, и ее можно отбросить. Но в уравнении поля (5.8) при этом нельзя отбросить первые и вторые производные по сравнению с массивным членом, так как мы получили бы $m^2 \Phi = 0$:

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - m_s^2 \Phi = 0. \quad (5.35)$$

В уравнении Эйнштейна (5.9) по этой же причине можно отбросить вклад частиц в плотность энергии:

$$3\dot{\Lambda}^2 = -\dot{\Phi}^2 + m_s^2 \Phi^2. \quad (5.36)$$

Эта система имеет следующее асимптотическое при $m_s t \rightarrow \infty$ решение:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(t) &= \frac{m_s t}{\sqrt{3}} + \Phi_0, \quad (m_s \neq 0); \\ \Lambda^{(0)}(t) &= \frac{m_s^2 t^2}{6} + \Phi_0 \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

где $\Phi_0 = \text{Const}$ - произвольная константа. Отметим, что решение (5.37) обращает в тождество уравнение поля (5.35), а при подстановке в уравнение Эйнштейна (5.36) приводит к относительной погрешности порядка $(m_s t)^{-2}$.

Вычислим инвариантное космологическое ускорение относительно найденного решения:

$$\Omega = \frac{\ddot{a}^{(0)} a^{(0)}}{\dot{a}^{(0)2}} = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}^{(0)}}{\dot{\Lambda}^{(0)2}} = 1 + \frac{1}{(\Phi^{(0)}(t))^2}. \quad (5.38)$$

Таким образом, при больших временах ($m_s t \rightarrow \infty$) система выходит на режим инфляционного расширения ($\Omega \rightarrow 1$). Отметим, что можно доказать устойчивость полученного асимптотического решения при больших временах.

Нетрудно видеть, что эффективная масса фермионов при этом растет линейно со временем:

$$m_* \equiv |m + q\Phi| \approx q \frac{m_s t}{\sqrt{3}}, \quad (5.39)$$

так что фермионы быстро становятся нерелятивистскими ($\Psi \rightarrow 0$). В связи с этим сделаем следующие важные замечания:

1. Холодная полностью вырожденная Ферми - система с очень большими эффективными массами скалярно заряженных фермионов может стать хорошей моделью темной материи.
2. На определенном этапе космологической эволюции гравитационные неустойчивости в нерелятивистской материи могут привести к возникновению обособленных областей с темной материей.
3. Стандартные Куперовские механизмы в Ферми - системах с притяжением частиц могут привести к образованию бозонов из пар фермионов и, тем самым, к сверхтекучести областей темной материи.

4. При росте эффективных масс фермионов выше планковского значения, то есть, согласно (5.39) при

$$m_* \gg m_{\text{Pl}} \Leftrightarrow q \frac{m_s t}{\sqrt{3}} \gg 1, \quad (5.40)$$

массивные фермионы могут, в принципе, могут образовать устойчивые первичные черные дыры, скорее всего, с учетом теорем Хоукинга о черных дырах, в варианте со сверхтекущими квази-бозонами с нулевым спином.

6. Численное моделирование космологической эволюции

Итак, перейдем теперь к результатам численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (5.8), (5.9 с начальными условиями (5.14) и определениями плотностей энергии и скалярного заряда (5.2), (5.4) и (5.10). При этом, мы должны помнить замечание в разделе 5.2 о перекалибровке момента времени t_0 . На представленных ниже графиках эта перекалибровка произведена, так что всюду время отсчитывается от момента космологической сингулярности в Планковской шкале времени. Все представленные на графиках величины также измеряются в Планковских единицах. Далее, коэффициентом баратропы, κ , мы будем называть отношение полного давления системы к ее полной плотности энергии:

$$\kappa = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{P}_p + \mathcal{P}_s}{\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s}. \quad (6.1)$$

Как известно (см., например, [31]), величина инвариантного космологического ускорения Ω связана с коэффициентом баратропы κ соотношением:

$$\Omega = -\frac{1}{2}(1 + 3\kappa), \quad (6.2)$$

так что ультрарелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 1/3$ соответствует значение $\Omega = -1$; нерелятивистскому уравнению состояния $\kappa = 0$ соответствует $\Omega = -1/2$; значению $\kappa = -1/3$ соответствует $\Omega = 0$; инфляционному (вакуумному) уравнению состояния $\kappa = -1$ соответствует $\Omega = +1$, значениям $\kappa < -1$ соответствует гиперинфляция $\Omega > 1$.

Также введем важный для дальнейшего безразмерный параметр

$$\eta_s = \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p}, \quad (6.3)$$

равный отношению плотности энергии скалярного поля к плотности энергии фермионов.

Введем следующие характерные моменты времени, важные для понимания механизма космологической эволюции системы фермионов с фантомным скалярным полем:

1. Комптоновский момент времени по отношению к массе квантов скалярного поля:

$$t_s = \frac{1}{m_s}, \quad m_s \neq 0. \quad (6.4)$$

2. Для безмассового скалярного поля с источником можно определить аналогичный момент времени по отношению к эффективной массе скалярного поля. В работах [26], [27] (а также в [28]) аналитическими методами показано, что плотность скалярного заряда σ при определенных условиях может играть роль массивного члена в уравнении скалярного поля. При этом можно ввести эффективную массу скалярного поля даже в случае $m_s = 0$:

$$m_s^* = \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\Phi}}. \quad (6.5)$$

Поэтому, даже при нулевой массе квантов скалярного поля при наличии функции источника σ скалярное поле ведет себя во многих случаях как массивное скалярное поле с той лишь разницей, что эффективная масса (6.5) зависит от космологического времени $m_s^*(t)$. Соответственно эффективной массе введем комптоновский момент времени:

$$t_s^* = \frac{1}{m_s^*}, \quad m_s = 0. \quad (6.6)$$

3. Момент времени t_η , когда становятся равными плотности энергии фермионов и скалярного поля:

$$\mathcal{E}_s(t_\eta) = \mathcal{E}_p(t_\eta) \Leftrightarrow \eta_s(t_\eta) = 1. \quad (6.7)$$

Заметим, что таких момента времени может быть два.

4. Момент времени t_r перехода фермионов от ультрарелятивистского состояния к нерелятивистскому:

$$\psi(t_r) = 1. \quad (6.8)$$

Далее, в графическом представлении результатов моделирования будет использована авторская функция:

$$\text{Lig}(x) \equiv \text{sgn}(x) \lg(1 + |x|), \quad (6.9)$$

необходимая для представления результатов в логарифмической шкале в тех случаях, когда отображаемая функция может менять знак. Введенная нами функция $\text{Lig}(x)$ удобна тем, что при малых значениях аргумента функция совпадает со значением аргумента, а при больших значениях аргумента - с его десятичным логарифмом, взятого со знаком аргумента:

$$\text{Lig}(x) \approx \begin{cases} x, & |x| \rightarrow 0; \\ \text{sgn}(x) \ln |x|, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{d\text{Lig}(x)}{dx} \geq 0,$$

что обеспечивает непрерывную дифференцируемость функции $\text{Lig}(x)$, и тем самым - биективность отображения (6.9). Обратный пересчет осуществляется по формуле:

$$x = \begin{cases} 10^{\text{Lig}(x)} - 1, & x \geq 0; \\ 1 - 10^{-\text{Lig}(x)}, & x < 0. \end{cases}$$

6.1. Случай массивного фантомного скалярного поля с минимальным взаимодействием ($\sigma = 0$)

Численное интегрирование выявило три характерные стадии космологической эволюции в этом случае:¹⁵

1. $t \lesssim t_s$: доминирование фермионов

Характерные особенности: Малые значений потенциала скалярного поля и его производной - влияние поля на эволюцию системы незначительно.

2. $t_s \lesssim t \lesssim t_\eta$: конкуренция фермионов и скалярного поля

Характерные особенности: Резкий рост потенциала скалярного поля и его производной в момент времени t_η (6.7) (Рис. 3). В этот момент времени достигают экстремума следующие функции: $\dot{\Phi}$ (максимум); коэффициент баротропии, κ , (минимум); инвариантное космологическое ускорение, Ω , (максимум); плотность полной энергии, $\mathcal{E}_{pl} + \mathcal{E}_s$, (минимум). В момент пика коэффициент баротропии становится меньше -1 - фантомное уравнение состояния.

3. $t_\eta \lesssim t < +\infty$: доминирование скалярного поля

Характерные особенности: Производная потенциала скалярного поля стремится к константе $m_s/\sqrt{3}$; потенциал линейно возрастает; плотность энергии скалярного поля намного превосходит энергию фермионов и определяет дальнейшую эволюцию системы; коэффициент баротропии $\kappa \rightarrow -1$; инвариантное космологическое ускорение $\Omega \rightarrow 1$ - выход на инфляцию.

¹⁵Основные закономерности эволюции на ранних и поздних стадиях подтверждают приведенные выше результаты аналитического исследования.

Ниже приведены графики численного моделирования системы со следующими параметрами:

$p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Всюду на графиках 1 - 10: жирная линия - $m_s = 10^{-2}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-4}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-6}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-8}$. Также всюду на этих графиках, как и на всех остальных, по оси абсцисс отложены значения десятичного логарифма времени от момента космологической сингулярности в Планковской шкале, $\log_{10} t$.

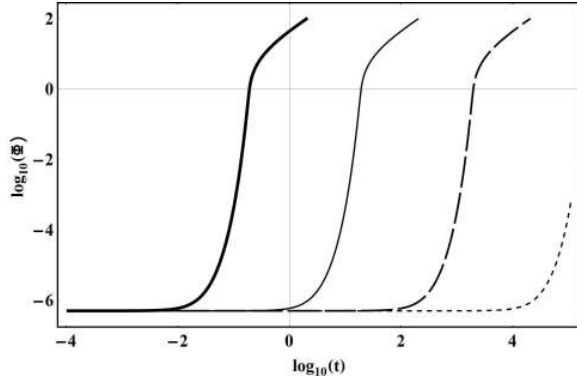


Рис. 1. Эволюция потенциала Φ . По по оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

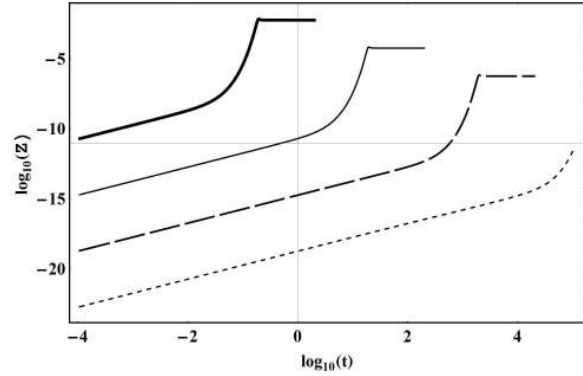


Рис. 2. Эволюция производной потенциала $Z = \dot{\Phi}$. По оси ординат отложены значения десятичного логарифма скалярного потенциала, $\log_{10} \Phi$.

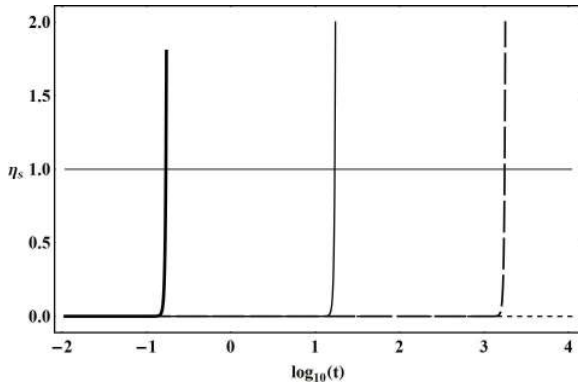


Рис. 3. Эволюция отношения плотностей энергии скалярного поля и фермионов η_s .

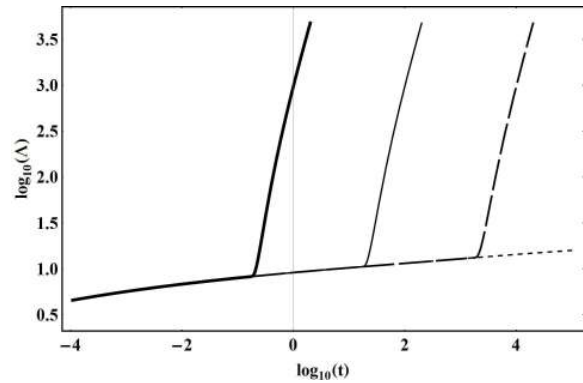


Рис. 4. Эволюция логарифма масштабной функции $\Lambda(t) = \exp a(t)$. По оси ординат отложены значения значения десятичного логарифма, $\log_{10} \Lambda$, то есть, $\log_{10}(\ln a(t))$.

Ниже, на фазовой диаграмме (Рис. 9), можно отчетливо увидеть все три вышеуказанные стадии космологической эволюции. Далее, на рисунке 3 можно увидеть моменты космологического времени t_η , в которые $\eta_s(t_\eta) = 1$. Сравнение с рисунком 2 показывает, что момент времени t_η соответствует экстремуму производной потенциала скалярного поля, Z .

На рисунках 5 - 7 показаны графики эволюции коэффициента баротропии $\kappa(t)$ и связанным с ним инвариантным космологическим ускорением $\Omega(t)$. Эти всплески возникают именно в моменты времени t_η .

Как видно из графиков на рисунке 6, всплескам предшествует ультрарелятивистский режим расширения, который после всплеска сменяется инфляцией. На рисунке 7 показана детальная структура всплеска космологического ускорения. Этот рисунок наглядно демонстрирует, что всплеск не является компьютерным фантомом.

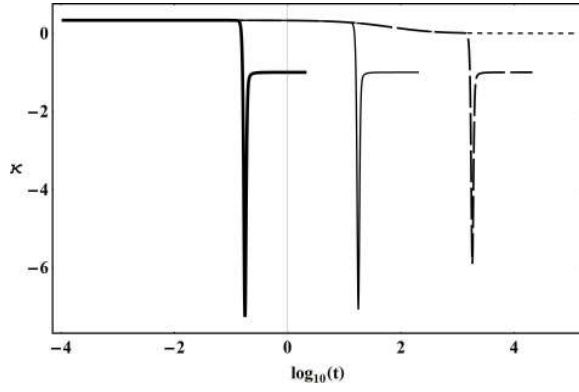


Рис. 5. Эволюция коэффициента баротропы κ .

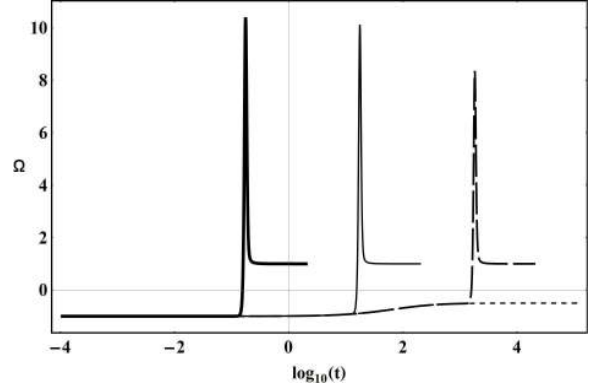


Рис. 6. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

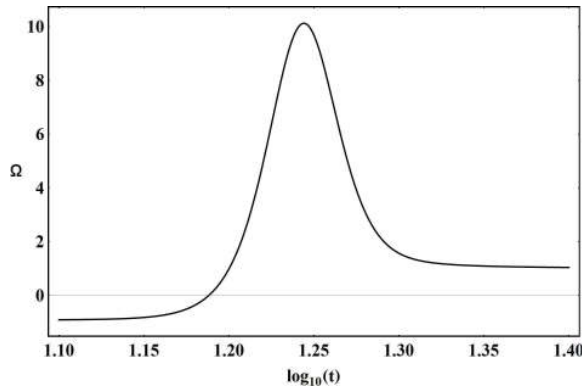


Рис. 7. Детальная структура второго фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения Ω на рисунке 6: $p_0 = 100$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$, $m_s = 10^{-4}$.

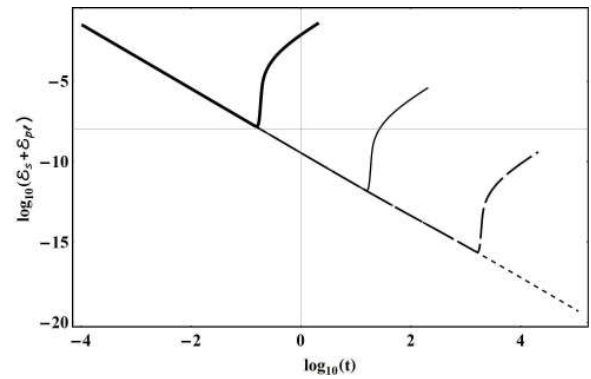


Рис. 8. Эволюция логарифма суммарной плотности энергии $\log_{10} \mathcal{E}$.

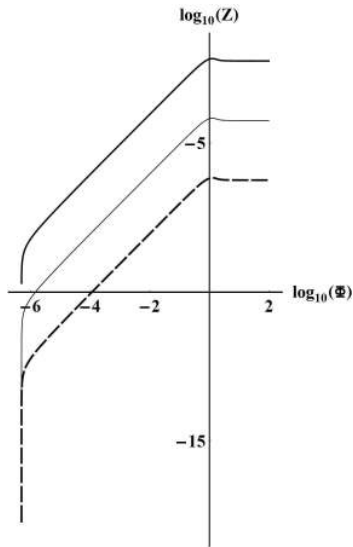


Рис. 9. Фазовый портрет. Левые вертикальные ветви графиков соответствуют первой стадии эволюции системы, наклонные части - второй стадии, горизонтальные правые ветви - третьей стадии.

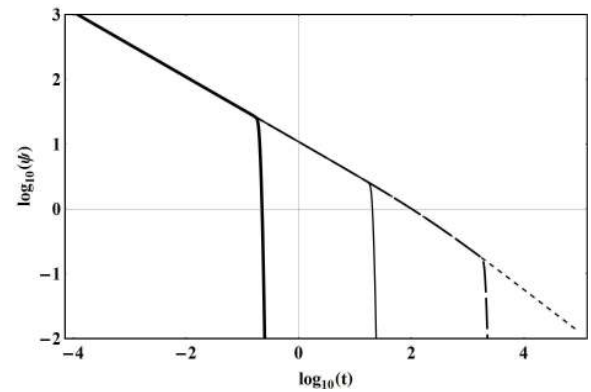


Рис. 10. Эволюция функции $\psi = p_f/m_s$. Горизонтальная линия соответствует значению $\log_{10} \psi = 0 \rightarrow \psi = 1$, то есть, переходу с ультрарелятивистского уравнения состояния фермионов на нерелятивистское.

6.2. Случай безмассового ($m_s = 0$) фантомного скалярного поля с источником

В этом случае система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\dot{\Lambda}\dot{\Phi} - 4\pi\sigma = 0; \quad (6.10)$$

$$\dot{\Lambda}^2 = \frac{8\pi}{3}(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s), \quad (6.11)$$

где плотность энергии скалярного поля равна

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\dot{\Phi}^2}{8\pi}. \quad (6.12)$$

и может быть только отрицательной, причем в начальный момент времени $t = 0$ она равна нулю. В результате, космологический сценарий для массивного скалярного поля раздела 6.1 изменился, в нем по-прежнему присутствуют три стадии, но на последней стадии доминируют фермионы:

1. $t \lesssim t_s^*$: доминирование ультррелятивистских фермионов.
Характерные особенности: малые значения потенциала скалярного поля и его производной - вклад поля в эволюцию системы незначителен.
2. $t_s^* < t \lesssim t_r$: доминирование скалярного поля.
Характерные особенности: Резкий рост потенциала скалярного поля и его производной, максимальное влияние скалярного поля на эволюцию системы. В момент времени перехода фермионов от релятивистского состояния к нерелятивистскому, t_r , плотность скалярного заряда достигает максимума, в этот момент достигают экстремума функции: $Z = \dot{\Phi}$ (максимум); коэффициент баротропии, κ , (минимум); инвариантное космологическое ускорение, Ω , (максимум); плотность полной энергии, $\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_s$, (максимум). В момент пика коэффициент баротропии в зависимости от параметров системы может становиться меньше -1 - фантомное уравнение состояния и инфляция. Следует отметить важный факт: на этом этапе вклад фермионов в плотность энергии незначителен, но именно фермионы управляют скалярным полем с помощью скалярной плотности зарядов σ . В этом смысле можно провести аналогию между фермионами и катализаторами химических реакций.
3. $t_r < t < +\infty$: доминирование нерелятивистских фермионов
Характерные особенности: Плотность скалярного заряда падает, при этом влияние на космологическую эволюцию скалярного поля становится исчезающе малым. Производная потенциала скалярного поля стремится к нулю ($m_s^* \rightarrow 0$), потенциал стремиться к постоянно-му значению; нерелятивистские фермионы определяют дальнейшую эволюцию системы, коэффициент баротропии $\kappa \rightarrow 0$ ¹⁶.

На приведенных ниже графиках (Рис. 11 - 18) представлены результаты численного моделирования космологической эволюции системы вырожденных фермионов с безмассовым фантомным скалярным полем. Ввиду на указанных графиках приняты следующие значения параметров: $p_0 = 0.01$, $m_0 = 0$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия - $q = 0.01$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 1$, мелко - пунктирная линия - $q = 5$.

¹⁶Таким образом, рассмотренный случай показывает, что данная модель может снять проблему остановки ранней инфляции и тем самым - обеспечить необходимый для образования структуры нерелятивистский этап эволюции Вселенной.

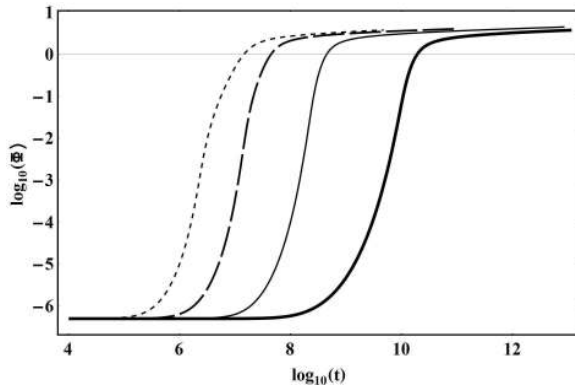


Рис. 11. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

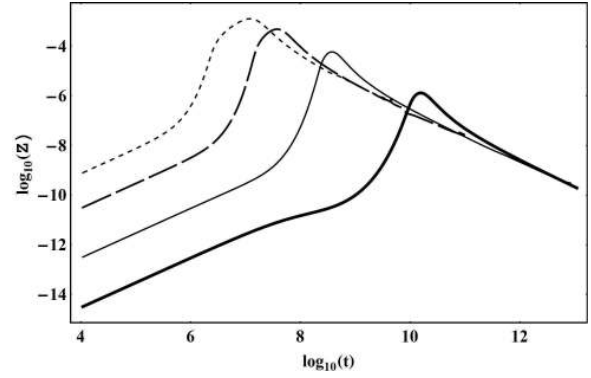


Рис. 12. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

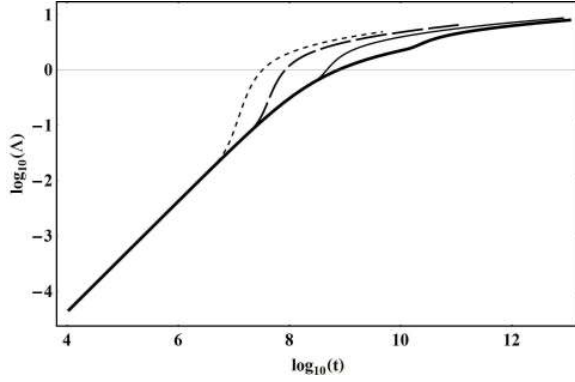


Рис. 13. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

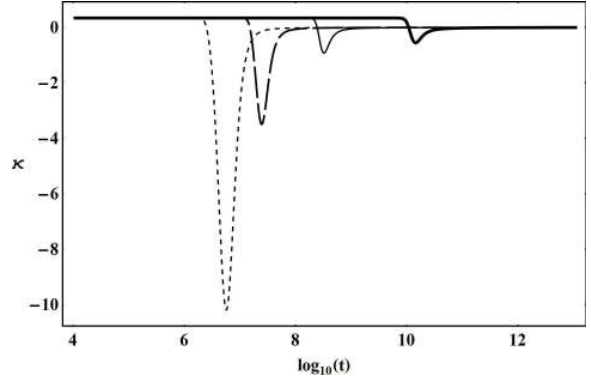


Рис. 14. Эволюция коэффициента баротропии κ .

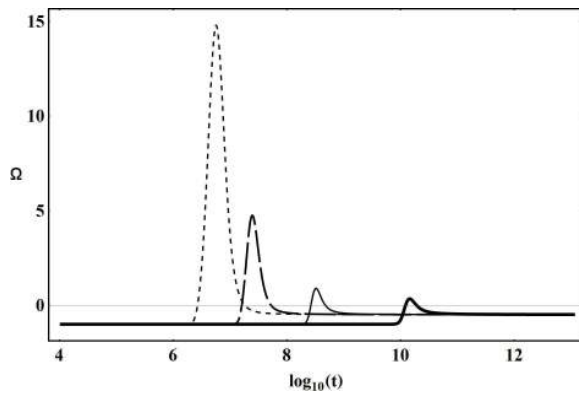


Рис. 15. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

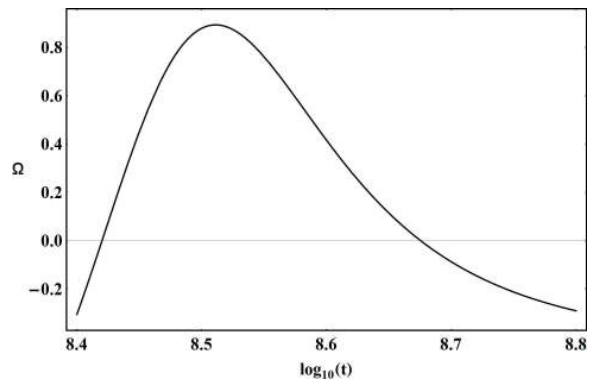


Рис. 16. Детальная структура третьего фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на фигуре (Рис. 15): Ω ; $q = 1$.

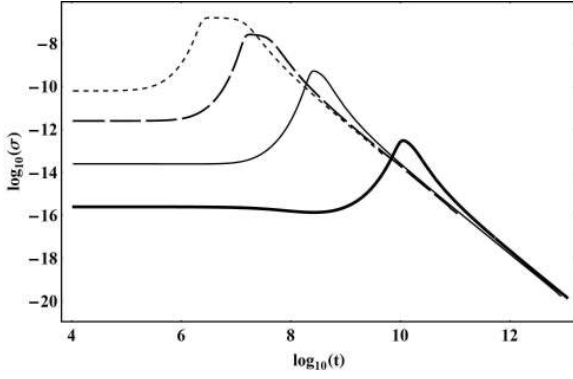


Рис. 17. Эволюция логарифма плотности скалярного заряда $\log_{10} \sigma$.

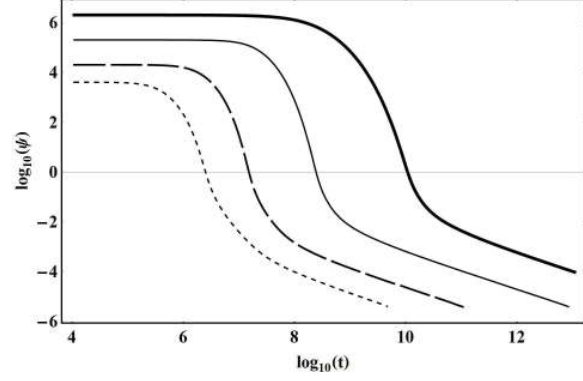


Рис. 18. Эволюция логарифма функции $\psi = p_0/m_* a$.

6.3. Случай массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

В этом, наиболее общем случае, нам необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5.11), (5.12) и (5.13) с начальными условиями (5.14) с учетом определений (5.2) - (5.4) и (5.10). Ниже (Рис. 19 - 26) представлены результаты численного интегрирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 0.01$, $m_0 = 0.001$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}$. Жирная линия - $m_s = 10^{-4}$, $q = 0$; тонкая линия - $m_s = 10^{-4}$, $q = 0.1$; мелко пунктирная линия - $m_s = 0$, $q = 0.01$.

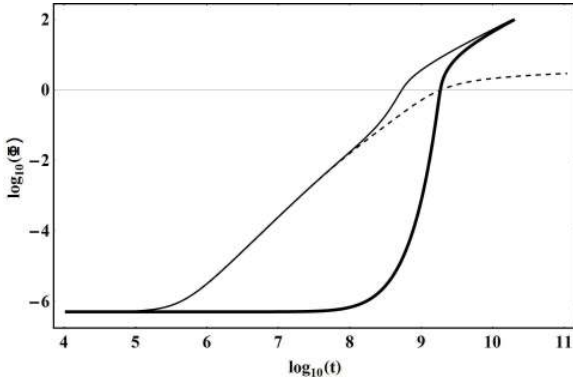


Рис. 19. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

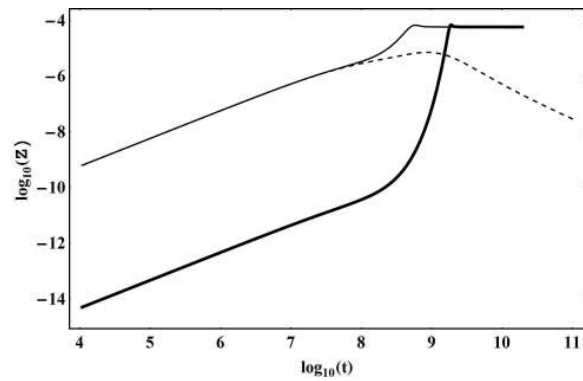


Рис. 20. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

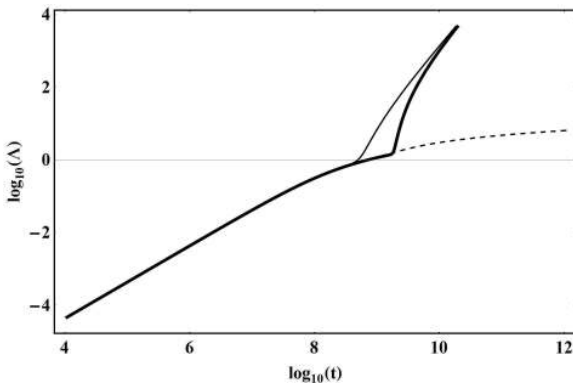


Рис. 21. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

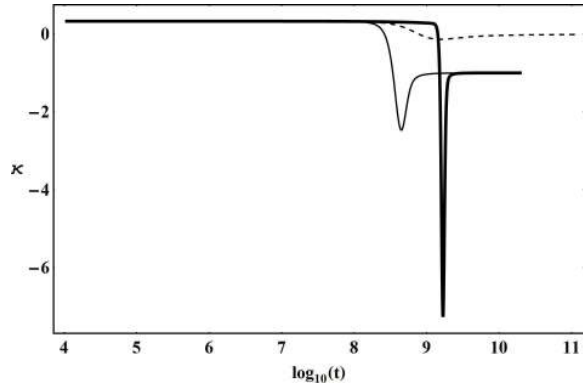


Рис. 22. Эволюция коэффициента баротропии κ .

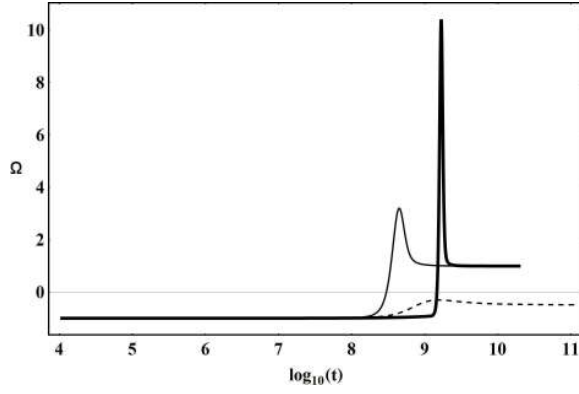


Рис. 23. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

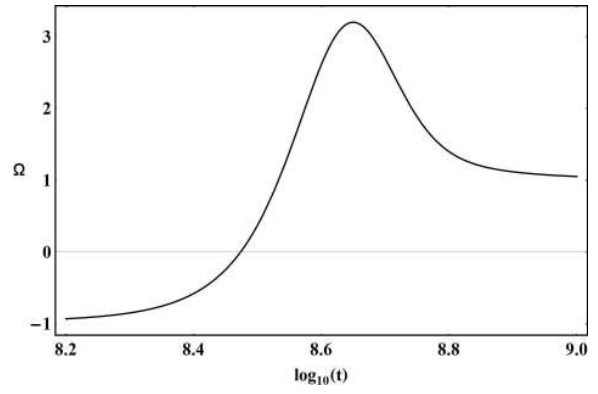


Рис. 24. Детальная структура первого фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на рисунке 23: Ω ; $m_s = 10^{-4}$, $q = 0.1$.

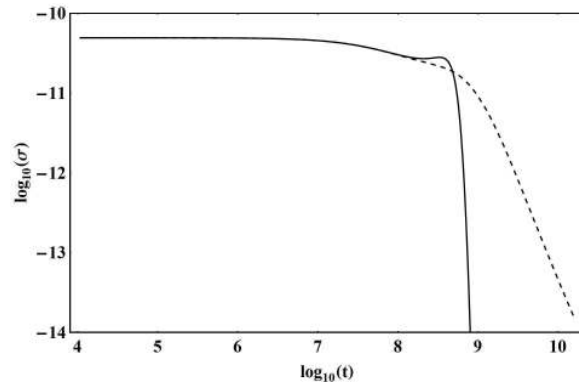


Рис. 25. Эволюция логарифма плотности скалярного заряда $\log_{10} \sigma$.

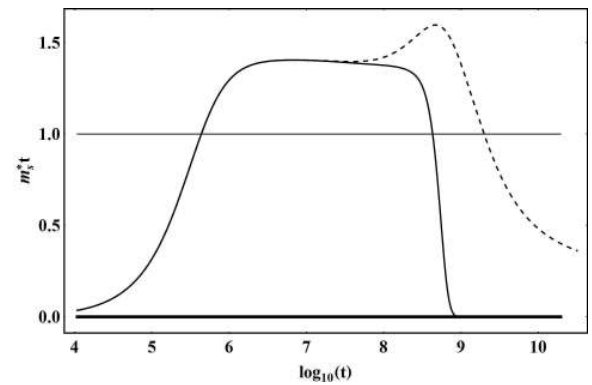


Рис. 26. График функции $m_s^* t$.

7. Характерные примеры случая массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником ($\sigma \neq 0$)

7.1. Случай перехода от релятивистской стадии к инфляции через нерелятивистское плато

При малых значениях m_s переход к инфляционной стадии отодвигается на поздние времена и ферми - система успевает к этому моменту стать нерелятивистской. На графике коэффициента баротропии появляется характерное нерелятивистское плато ($\kappa = 0$) перед фантомным всплеском. При увеличении m_s всплеск сдвигается к малым временам, обрезая плато вплоть до его полного исчезновения. В этом случае происходит переход от релятивистской стадии к инфляции через фантомный всплеск.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 1$, $m_0 = 0.1$, $q = 0.001$, $\Phi(0) = 0.05$. Жирная линия - $m_s = 10^{-8}$, тонкая линия - $m_s = 10^{-6}$, средне - пунктирная линия - $m_s = 10^{-3}$, мелко - пунктирная линия - $m_s = 10^{-1}$.

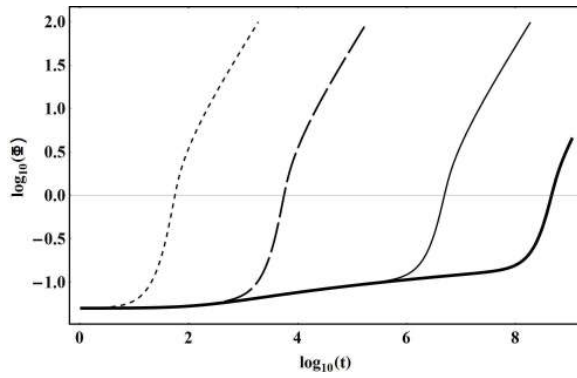


Рис. 27. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

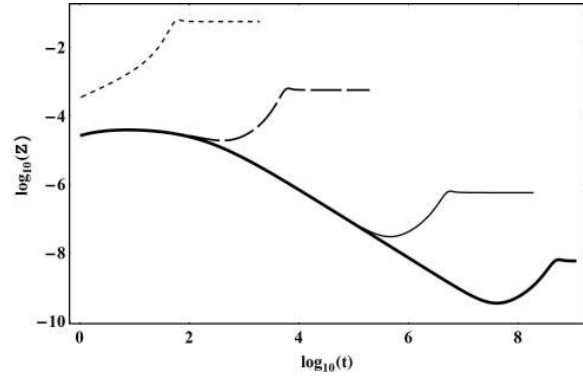


Рис. 28. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

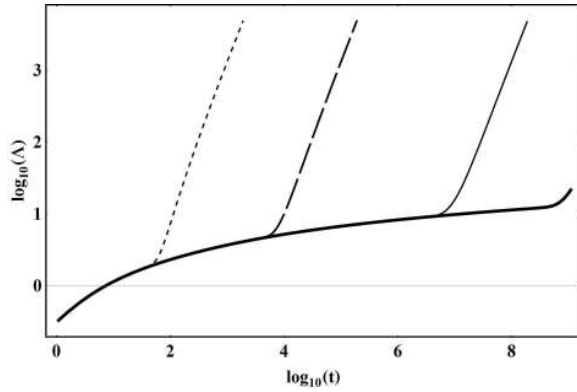


Рис. 29. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

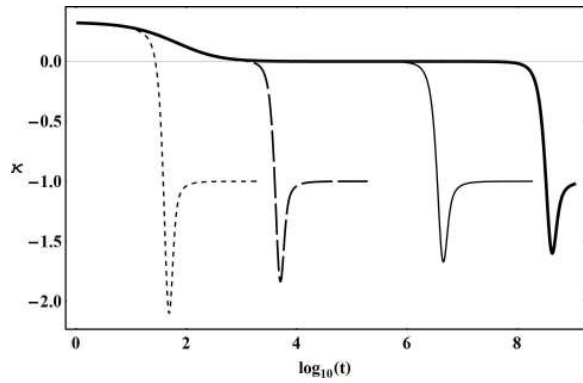


Рис. 30. Эволюция коэффициента баротропии κ .

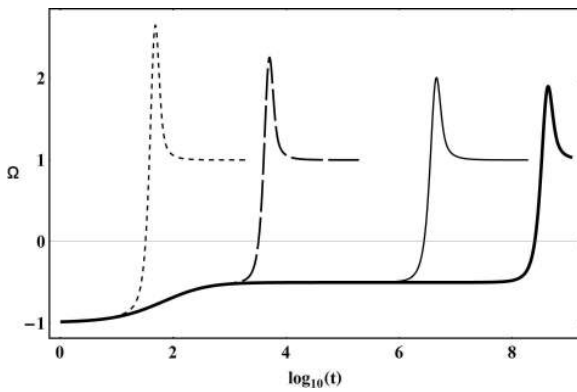


Рис. 31. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

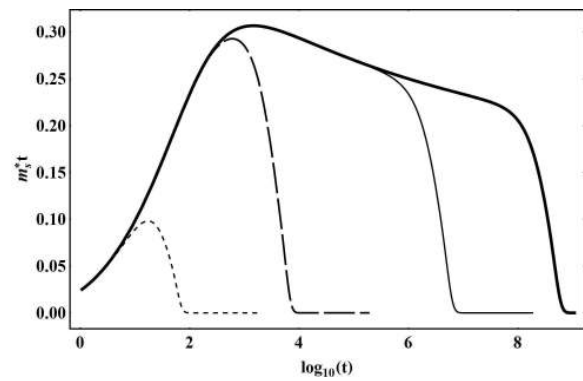


Рис. 32. Эволюция функции $m_s^* t$.

7.2. Случай двух стадий ускорения с промежуточной нерелятивистской стадией

При определенных значениях параметров системы можно наблюдать две стадии ускорения: первая - временное доминирование скалярного поля за счет достаточно больших значений эффективной массы скалярного поля m_s^* на соответствующих временах ($m_s^* t > 1$) и вторая - устойчивое доминирование скалярного поля на временах $m_s t > 1$. Между инфляционными стадиями может возникать нерелятивистское плато ($\kappa = 0$, $\Omega = -1/2$).

7.2.1. Зависимость от скалярного заряда

Меняя значение скалярного заряда q при постоянном значении массы скалярного поля m_s , можно наблюдать сдвиг первого инфляционного всплеска и соответствующее изменение длительности нерелятивистской стадии.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия - $q = 1$, тонкая линия - $q = 0.1$, средне - пунктирная линия - $q = 0.01$, мелко - пунктирная линия - $q = 0.001$.

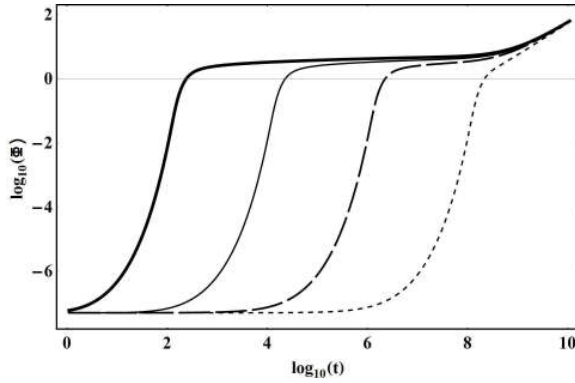


Рис. 33. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

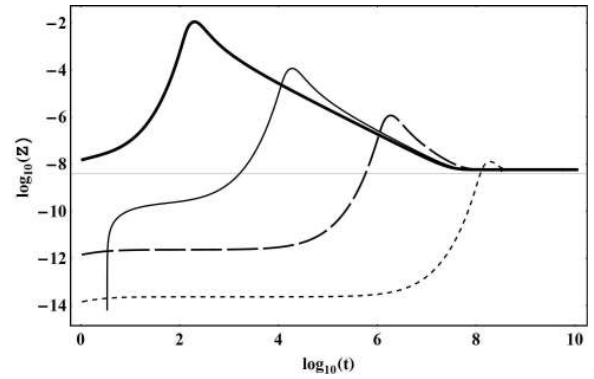


Рис. 34. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

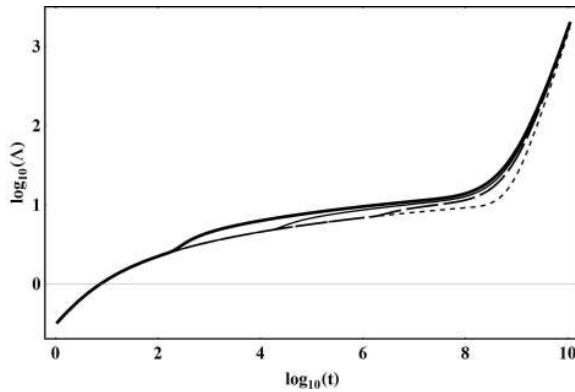


Рис. 35. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

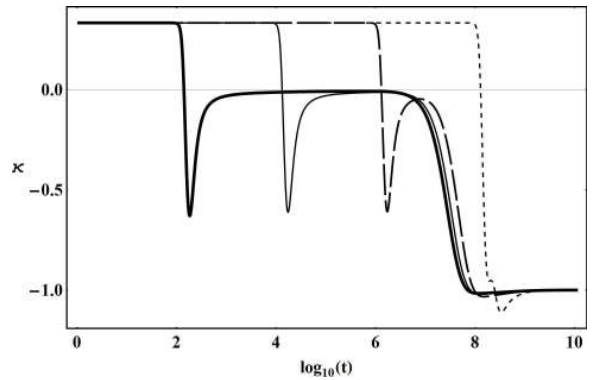


Рис. 36. Эволюция коэффициента баротропии κ .

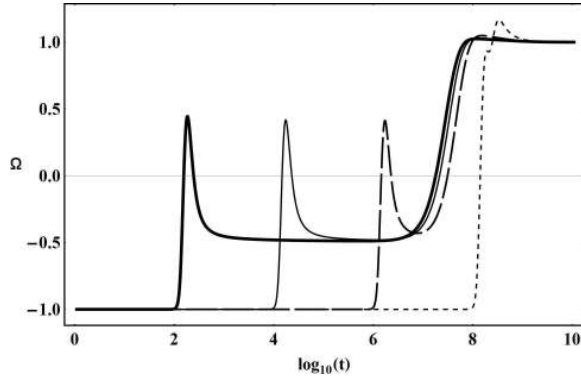


Рис. 37. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

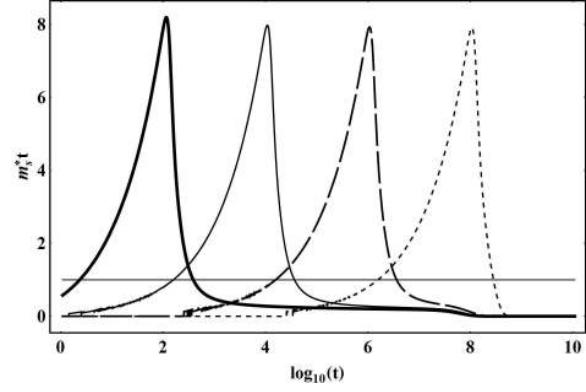


Рис. 38. График функции $m_s^* t$.

7.2.2. Зависимость космологической эволюции от начального значения потенциала скалярного поля

Меняя начальное значение потенциала скалярного поля Φ_0 , можно наблюдать сдвиг первой инфляционной стадии и изменение амплитуды всплеска космологического ускорения.

Малые начальные значения потенциала скалярного поля $\Phi_0 = 10^{-4} \div 10^{-14}$.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами: $p_0 = 1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-8}$, $q = 1$. Жирная линия - $\Phi(0) = 10^{-4}$, тонкая линия - $\Phi(0) = 10^{-8}$, средне пунктирная линия - $\Phi(0) = 10^{-14}$, мелко пунктирная линия - $\Phi(0) = 10^{-20}$.

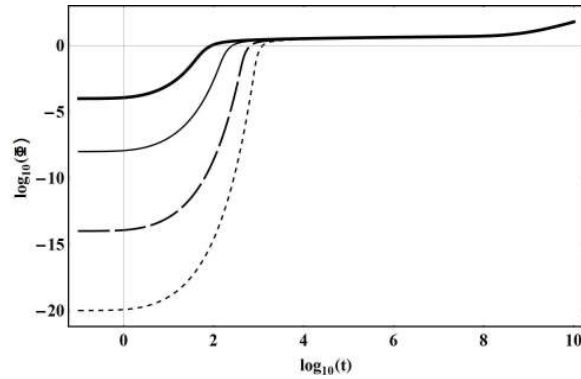


Рис. 39. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

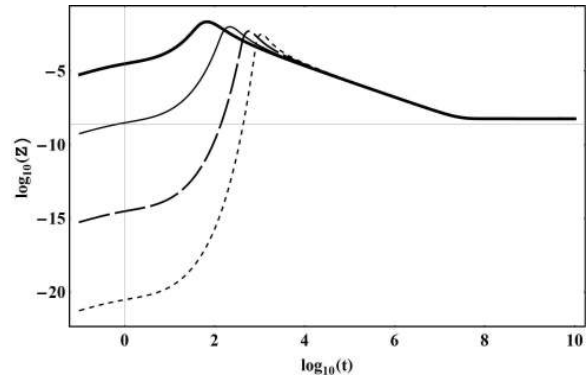


Рис. 40. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

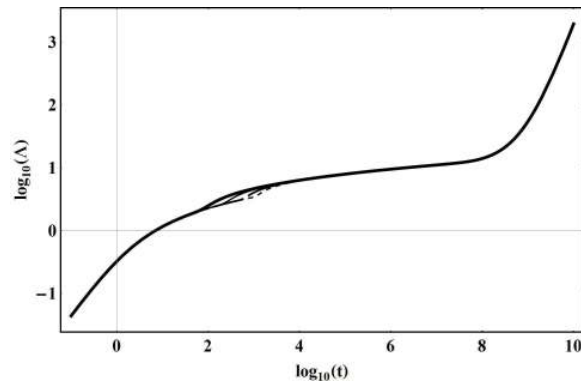


Рис. 41. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

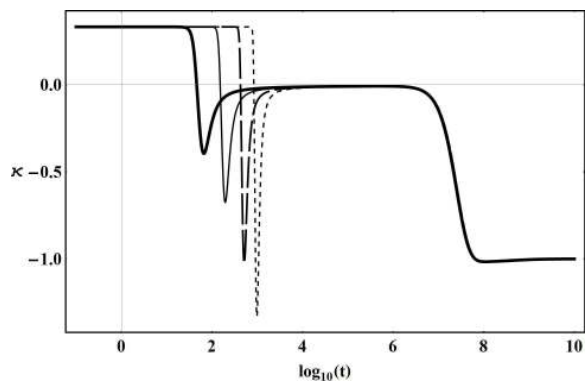


Рис. 42. Эволюция коэффициента баротропии κ .

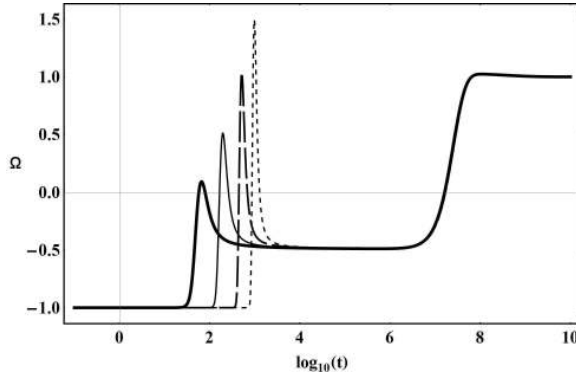


Рис. 43. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

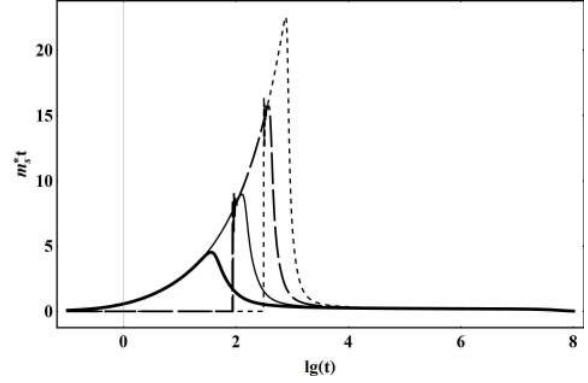


Рис. 44. График функции $m_s^* t$.

Еще меньшие начальные значения потенциала скалярного поля $\Phi_0 = 10^{-50} \div 10^{-300}$.

Приведем графики численного моделирования системы со следующими параметрами: $p_0 = .1$, $m = 0$, $m_s = 10^{-10}$, $q = 5$. Жирная черная линия - $\Phi(0) = 10^{-50}$, тонкая черная линия - $\Phi(0) = 10^{-150}$, средне пунктирная линия - $\Phi(0) = 10^{-250}$, мелко пунктирная линия - $\Phi(0) = 10^{-300}$.

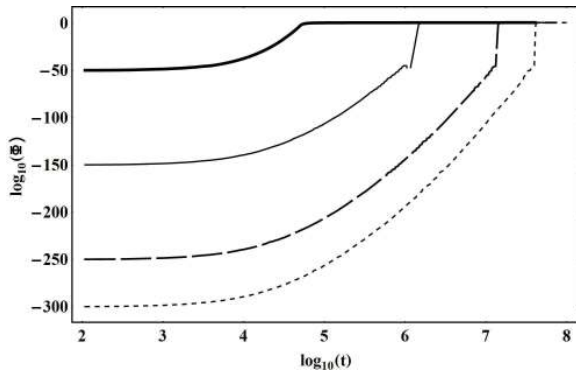


Рис. 45. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

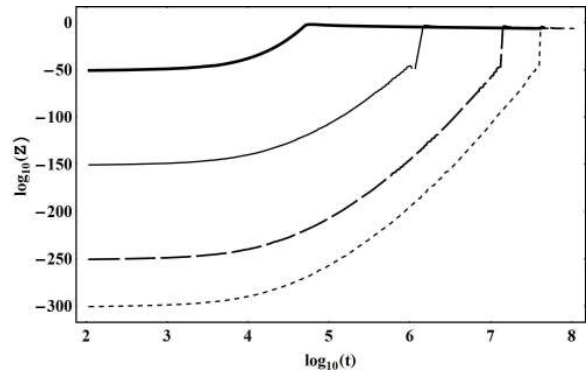


Рис. 46. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \Phi'$.

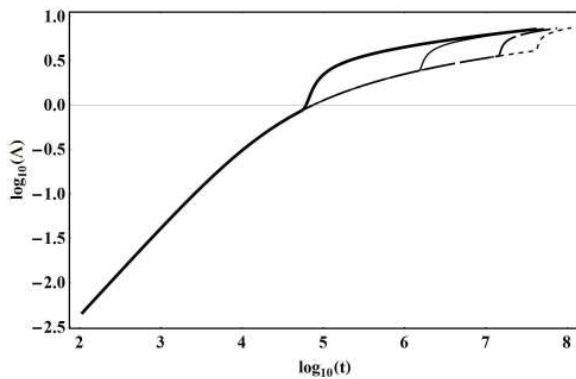


Рис. 47. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

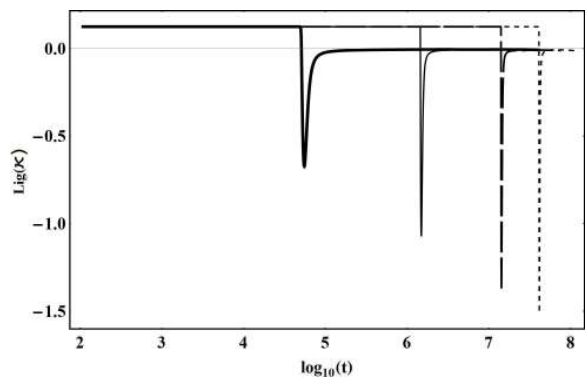


Рис. 48. Эволюция коэффициента баротропии κ .

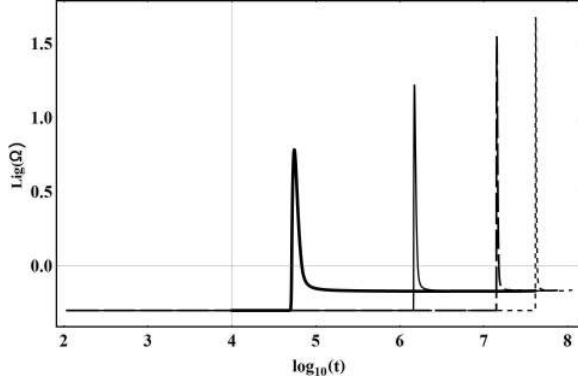


Рис. 49. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

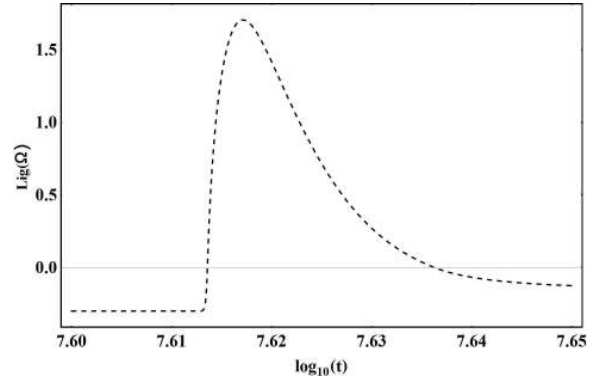


Рис. 50. Детальная структура четвертого фантомного всплеска инвариантного космологического ускорения на рисунке 49.

8. Космологическая эволюция термодинамических величин

Исследуем теперь влияние тепловых поправок на космологическую эволюцию почти вырожденной Ферми - системы с фантомным скалярным взаимодействием. В этом случае в уравнениях поля и уравнении Эйнштейна (5.11) - (5.13) вместо выражений (5.2) - (5.4) для макроскопических скаляров полностью вырожденной Ферми - системы необходимо использовать выражения для макроскопических скаляров почти вырожденной Ферми - системы (3.30) - (3.32). К начальным данным задачи Коши добавится еще и начальное значение обратной температуры $\lambda = m_*/\theta$.

$$\begin{aligned}\Lambda(0) &= 0; \quad p_f(0) = p_0; \quad \lambda(0) = \lambda_0; \\ \Phi(0) &= \Phi_0; \quad \tilde{n}(0) = Z_0.\end{aligned}\tag{8.1}$$

При этом безразмерный химический потенциал γ определяется с помощью двух безразмерных функций $\lambda = m_*/\theta$ (3.28) и $\psi = p_f/m_*$ (3.14) как $\gamma = \lambda\sqrt{1+\psi^2}$.

Таким образом для определения четырех неизвестных скалярных функций $\Lambda(t)$, Φ , $Z(t)$, ψ , λ имеем полностью определенную систему пяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\Delta \dot{n} + 3\dot{\Lambda}\Delta n = 0;\tag{8.2}$$

$$\dot{\Phi} = Z;\tag{8.3}$$

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z + m^2\Phi + 4\pi\sigma(\Lambda, \Phi);\tag{8.4}$$

$$\dot{\Lambda} = 8\pi\mathcal{E}_p - Z^2 + m_s^2\Phi^2;\tag{8.5}$$

$$\dot{\mathcal{E}}_p + 3\dot{\Lambda}(\mathcal{E}_p + \mathcal{P}_p) = \sigma\dot{\Phi}.\tag{8.6}$$

Перейдем к результатам численного интегрирования этой системы.

8.1. Случай безмассового фантомного скалярного поля ($m_s = 0$) с источником $\sigma \neq 0$

На рисунках 51 - 59 приведены результаты численного моделирования системы со следующими параметрами:

$$\lambda_0 = 10^{-6}; \quad \Phi(0) = 5 \cdot 10^{-7}; \quad q = 0.01; \quad \psi_0 = 2 \cdot 10^6.$$

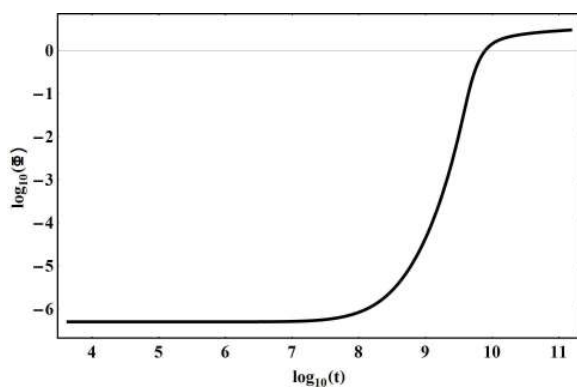


Рис. 51. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

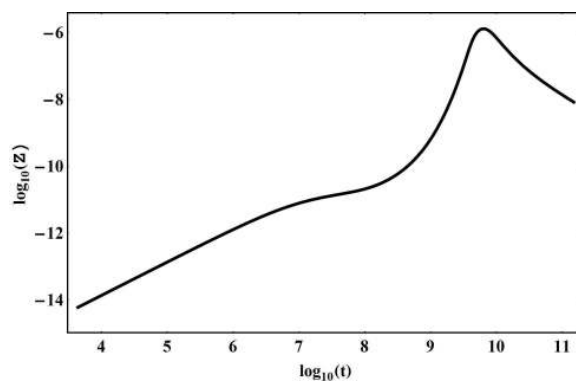


Рис. 52. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

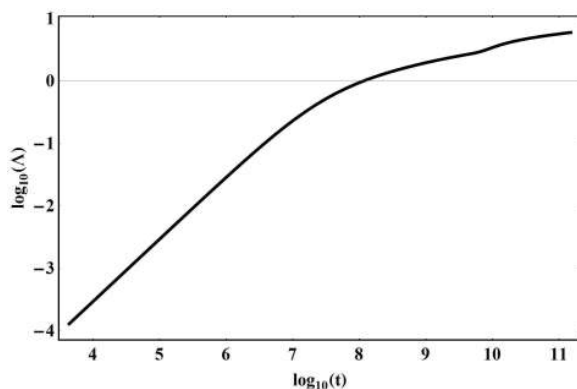


Рис. 53. Эволюция логарифма масштабной функции $\log_{10} \Lambda(t)$.

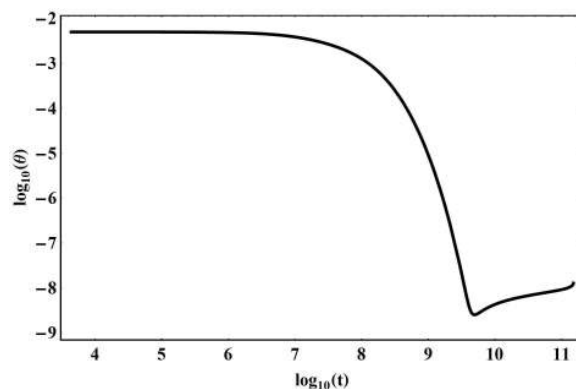


Рис. 54. Эволюция логарифма температуры $\log_{10} \theta(t)$.

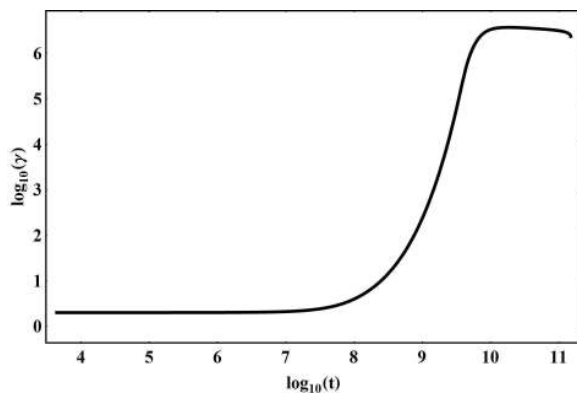


Рис. 55. Эволюция логарифма химического потенциала $\log_{10} \mu(t)$.

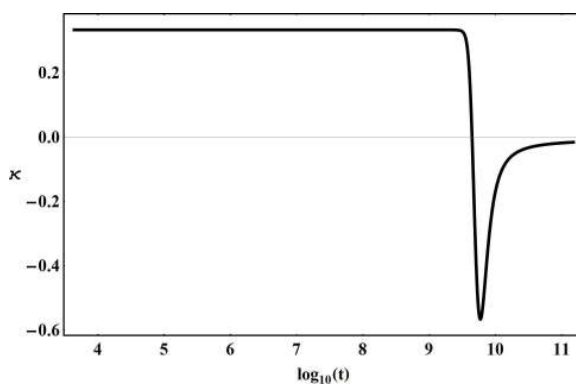


Рис. 56. Эволюция коэффициента баротропы κ .

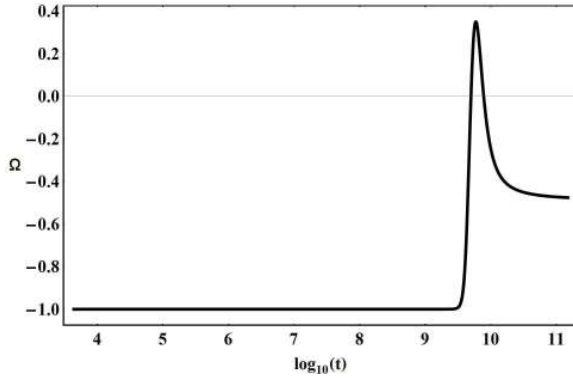


Рис. 57. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

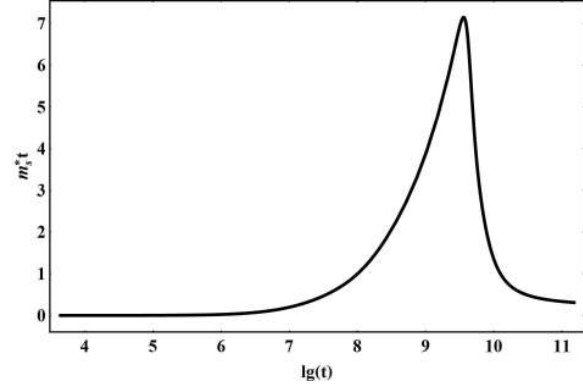


Рис. 58. График функции $m_s^* t$.

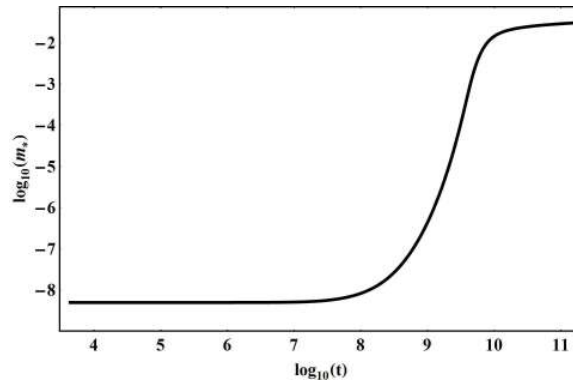


Рис. 59. Эволюция логарифма эффективной массы $\log_{10} m_*$.

На приведенных выше графиках можно обнаружить следующие закономерности:

1. На этапе роста $Z = \dot{\Phi}$ ($t > 10^8$) наблюдается одновременный рост химического потенциала μ и падение температуры θ .
2. С момента максимума Z и одновременного максимума ускорения Ω и эффективной массы скалярного поля m_s^* ($t \approx 3 \cdot 10^9$) химический потенциал становится приближенно постоянным, а температура начинает расти, все-таки, оставаясь малой.
3. Таким образом, в целом, степень вырождения Ферми - системы растет со временем.

8.2. Случай массивного фантомного скалярного поля ($m_s \neq 0$) с источником $\sigma \neq 0$

На рисунках 60 - 67 приведены результаты численного моделирования системы со следующими параметрами: $m_s = 10^{-6}$, $\lambda_0 = 10^{-7}$, $\Phi(0) = 5 \cdot 10^{-8}$. Жирная линия - $q = 1$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^7$; тонкая линия - $q = 0.1$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^8$; средне - пунктирная линия - $q = 0.01$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^9$; мелко - пунктирная линия - $q = 0.001$, $\psi_0 = 2 \cdot 10^{10}$.

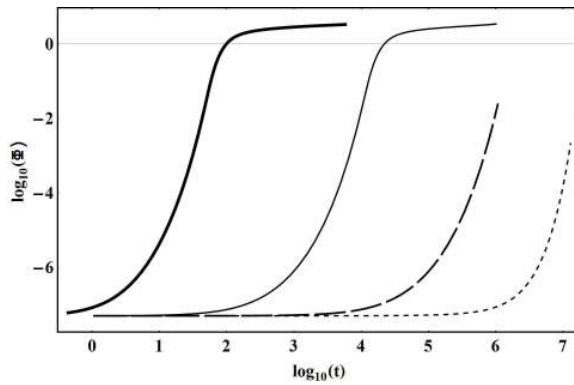


Рис. 60. Эволюция логарифма потенциала $\log_{10} \Phi$.

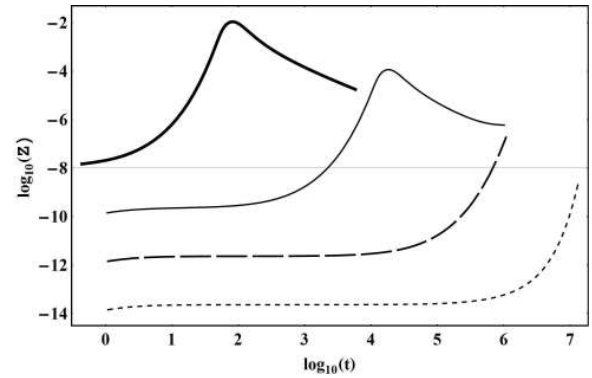


Рис. 61. Эволюция логарифма производной потенциала $\log_{10} Z = \log_{10} \dot{\Phi}$.

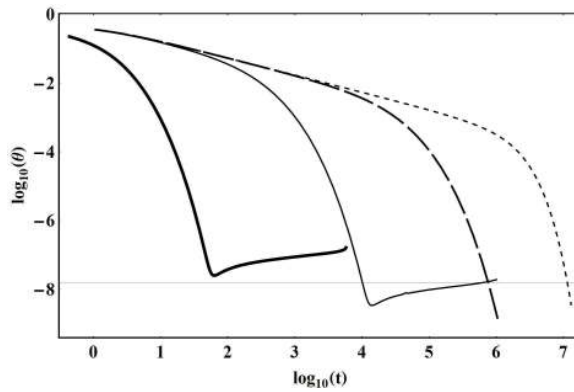


Рис. 62. Эволюция логарифма температуры $\log_{10} \theta(t)$.

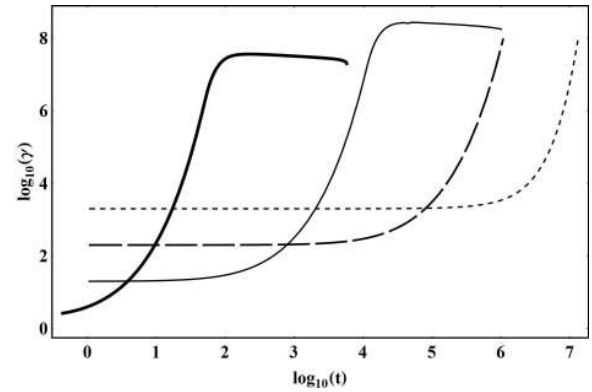


Рис. 63. Эволюция логарифма химического потенциала $\log_{10} \mu(t)$.

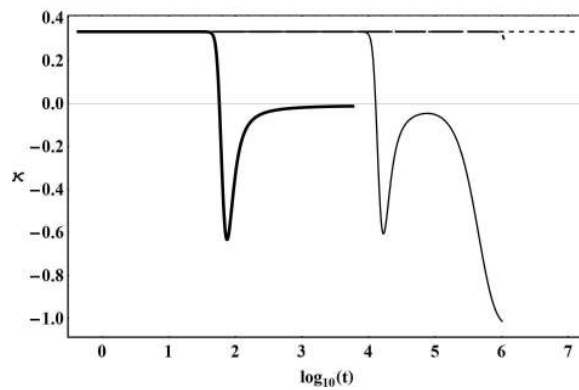


Рис. 64. Эволюция коэффициента баротропии κ .

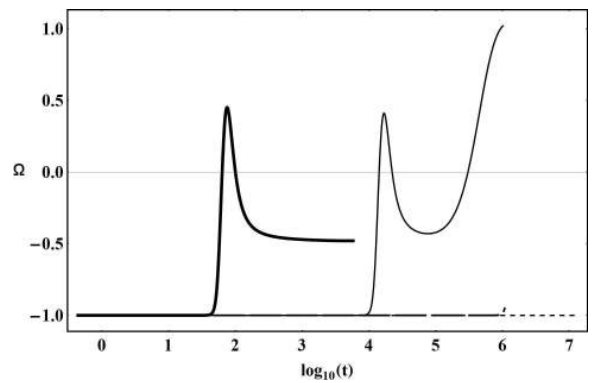
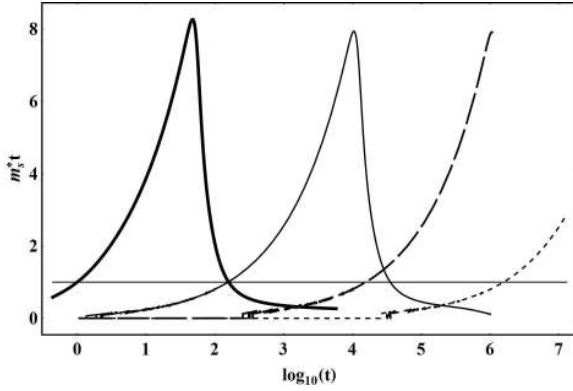
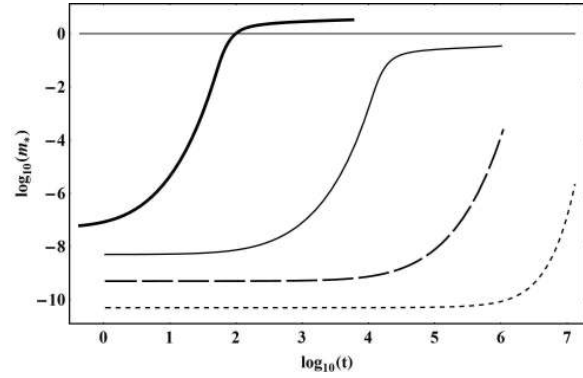


Рис. 65. Эволюция инвариантного космологического ускорения Ω .

Рис. 66. График функции $m_s^* t$.Рис. 67. Эволюция логарифма эффективной массы $\log_{10} m_*$.

9. Обсуждение результатов

Таким образом, проведенные исследования выявили следующие закономерности космологической эволюции статистических систем фермионов с фантомным скалярным взаимодействием.

1. В процессе космологической эволюции в таких системах обязательно возникают всплески ускорения Ω , которые можно охарактеризовать тремя параметрами: моментом времени максимума всплеска t_m , полушириной всплеска Δt и высотой h всплеска в максимуме.
2. Статистические системы фермионов с фантомным скалярным взаимодействием обнаруживают тенденцию к образованию устойчивых режимов с постоянным ускорением (этапов космологической эволюции) $\Omega = -1$ ($\kappa = 1/3$, ультрарелятивистское состояние), $\Omega = -1/2$ ($\kappa = 0$, нерелятивистское состояние) и $\Omega = 1$ ($\kappa = -1$, инфляционное, вакуумное состояние).
3. Динамические особенности статистических систем с фантомным скалярным взаимодействием слабо зависят от типа статистики систем частиц [31].
4. Четко выявляются 4 различных типа принципиально различных космологических сценариев для статистических систем частиц с фантомным скалярным взаимодействием в зависимости от параметров системы (фундаментальных констант и начальных условий):

- 1-й тип. Ультрарелятивистский старт $\rightarrow$ всплеск ускорения $\rightarrow$ инфляционная стадия (рисунок 68). Этот сценарий осуществляется для случая минимального взаимодействия ($\sigma = 0 \rightarrow q = 0$) массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

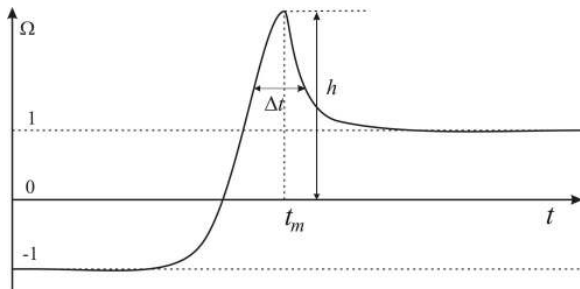


Рис. 68. Первый тип космологического сценария.

Этому сценарию отвечают следующие характерные параметры: $t_m \sim 10^{-1} \div 10^3$; $\Delta t \sim 2$; $h \sim 10$, то есть, ранний всплеск ускорения и ранний переход на инфляционную стадию.

- 2-й тип. Ультрарелятивистский старт $\rightarrow$ всплеск ускорения $\rightarrow$ нерелятивистская стадия (Рис. 69). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и безмассового скалярного поля ($m_s = 0$).

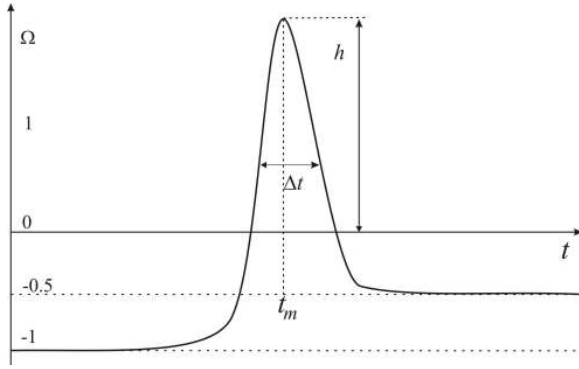


Рис. 69. Второй тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^6 \div 10^9$; $\Delta t \sim 10^6$; $h \sim 10$, то есть, достаточно длительный промежуточный этап сверхускорения с окончательным переходом на нерелятивистскую стадию.

- 3-й тип. Ультрарелятивистский старт → плавный переход на нерелятивистскую стадию → небольшой всплеск ускорения → инфляционная стадия (Рис. 70). Этот сценарий осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

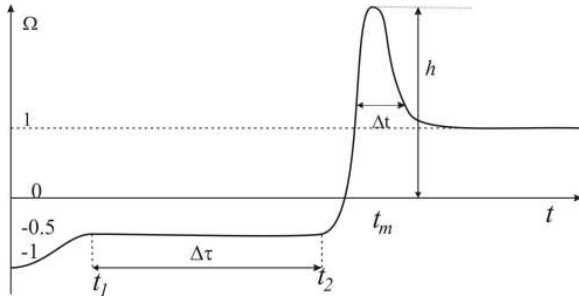


Рис. 70. Третий тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_1 \sim 10^2$ (время смены ультрарелятивистской стадии на нерелятивистскую стадию); $\Delta \tau = 10^3 \div 10^8$ (длительность нерелятивистской стадии), $t_m \sim 10^2 \div 10^9 \div 10^9$, $h \sim 2 \div 3$, $\Delta t \sim 10^6 \div 10^8$.

- 4-й тип. Ультрарелятивистский старт → небольшой всплеск ускорения → нерелятивистская стадия → переход на инфляционную стадию (Рис. 71). Этот сценарий также осуществляется для случая неминимального взаимодействия ($\sigma \neq 0 \rightarrow q \neq 0$) и массивного скалярного поля ($m_s \neq 0$).

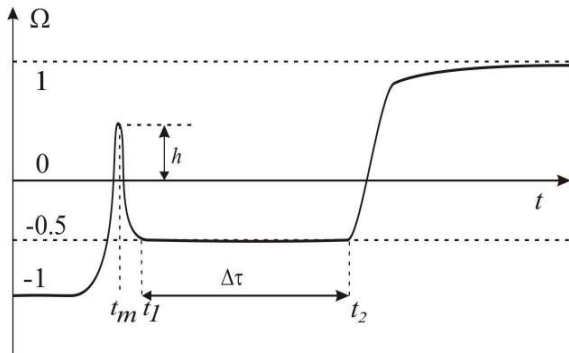


Рис. 71. Четвертый тип космологического сценария.

Для этого сценария характерны следующие параметры: $t_m \sim 10^2 \div 10^6 \div 10^9$, $t_1 \sim 10^2 \div 10^6$ (начало нерелятивистской стадии); $\Delta \tau \sim 10^7$ (длительность нерелятивистской стадии), $h \sim 0.5$.

5. Самые большие и вместе с тем поздние всплески космологического ускорения (порядка $\Omega \sim 10^2$ и даже больше)¹⁷ во времена $t_m \sim 10^5 \div 10^9$ присущи космологическому сценарию 1-го типа.

Отметим, что, фактически, все рассмотренные выше явления имеют место быть на пост-планковских временах, когда необходимость квантования гравитации исчезает. Заметим, что как известно (см., например, [2]), согласно современным наблюдениям для решения проблем горизонта и плоскостности вселенной достаточна длительность инфляции $10^{-42} \div 10^{-9}$ s (см.,

¹⁷В работе [31] приводятся примеры всплесков космологического ускорения до $\Omega \sim 10^8 \div 10^{10}$.

например, [2]), то есть, достаточна послепланковская инфляция $t \sim 10 \div 10^{24}$ в планковских масштабах времени. В эти масштабы укладываются даже длительности всплесков космологического ускорения. Далее отметим очень важный факт, выявленный в данном исследовании. В ходе космологической эволюции естественно образуются нерелятивистские этапы, как ранние (3-й тип сценария), так промежуточные (четвертый тип сценария) и конечные (2-й тип сценария). Существование этих этапов даст возможность развития гравитационной неустойчивости, следовательно, образование космической структуры. При этом 2-й и 4-й типы сценария ограничивают сверху и снизу масштаб неустойчивых мод $kt > 1$. Таким образом, на основе модели с межчастичным фантомным скалярным взаимодействием, по-видимому, возможно создание более полной космологической модели, способной описать основные наблюдательные данные.

В заключении Авторы выражают благодарность членам MW - семинара по релятивистской кинетике и космологии Казанского федерального университета за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Weinberg S. Cosmology. Oxford: Oxford University Press, 2008.
2. Gorbunov D.S., Rubakov V.A. Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory. Singapore: World Scientific, 2011.
3. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie // Sitzungsber preus, Akad. Wiss. 1917. Vol. 1. P. 142-152.
4. Utiyama R., Fukuyama T. Gravitational Field as a Generalized Gauge Field // Progr. Theor. Phys. 1971. Vol. 45. P. 612-627.
5. Minkevich A.V. Gauge Approach to Gravitation and Regular Big Bang Theory // Grav. and Cosmol. 2006. Vol. 12. P. 11-20.
6. Minkevich A.V., Garkun A.S., Kudin V.I. Regular accelerating Universe without dark energy // Class. Quantum Grav. 2007. Vol. 24. P. 5835-5848.
7. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity // Phys. Lett. B. 1980. Vol. 91. № 1. P. 99-102.
8. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations // Sov. Phys. J. 1982. Vol. 25. № 4. P. 372-375.
9. Ignat'ev Yu.G. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. № 8. P. 686-690.
10. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. № 12. P. 690-694.
11. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles // Sov. Phys. J. 1983. Vol. 26. № 12. P. 1068-1072.
12. Ivanov G.G. Stationary macroscopic motions of a relativistic gas and its relation to the symmetries of the gravitational field // Sov. Phys. J. 1979. Vol. 22. № 6. P. 579-584.
13. Игнатьев Ю.Г. Магнитоактивная бесстолкновительная плазма в поле длинноволнового гравитационного излучения // Украинский физический журнал. 1984. Т. 29. № 7. С. 1021-1026.
14. Ignatyev Yu.G. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology // Grav. and Cosmol. 2006. Vol. 12. № 2-3. P. 179-185.
15. Ignatyev Yu.G. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles // Grav. and Cosmol. 2011. Vol. 17. № 2. P. 190-193. <http://arXiv:1011.5774>
16. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction // Russ. Phys. J. 2012. Vol. 55. № 2. P. 166-172.
17. Ignatiev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model // Russ. Phys. J. 2012. Vol. 55. № 5. P. 550-560.
18. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles // Russ. Phys. J. 2012. Vol. 55. № 11. P. 1345-1350.
19. Ignatyev Yu.G. Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields. Kazan: Foliant-Press, 2010. URL: <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>

20. Ignatyev Yu.G. The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution, Kazan: Kazan University Press, 2013.
URL: http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf
21. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a fantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic // Grav. and Cosmol. 2014. Vol. 20. № 4. P. 299-303.
22. Игнат'ев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике // Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 47-69.
23. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with fantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models // Grav. and Cosmol. 2014. Vol. 20. № 4. P. 304-308. URL: [arXiv:1608.05020](https://arxiv.org/abs/1608.05020) [gr-qc]
24. Игнат'ев Ю.Г. Неминимальные макроскопические модели скалярного поля, основанные на микроскопической динамике. III. Расширение теории на отрицательные массы // Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 1. С. 5-23.
25. Ignatyev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses // Grav. and Cosmol. 2015. Vol. 21. № 4. P. 296-308.
26. Ignat'ev Yu.G. Collisionless self-gravitating statistical systems of scalarly interacting particles // Grav. and Cosmol. 2016. Vol. 22. № 1. P. 20-25.
27. Ignat'ev Yu.G. Relativistic Kinetic Theory of Statistical Systems with Conformally Invariant Interparticle Scalar Interaction // Russ. Phys. J. 2016. Vol. 59. № 1. P. 20-28.
28. Игнат'ев Ю.Г., Агафонов А.А. Статистические космологические системы почти вырожденных скалярно заряженных фермионов // Пространство, время. и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 4. С. 91-103.
29. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles // Grav. and Cosmol. 2015. Vol. 21. № 2. P. 105-112.
30. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases // Russ. Phys. J. 2015. Vol. 57. P. 1743-1752.
31. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles // Astroph. Space Sci. 2015. Vol. 357:61.
32. Synge J.L. The relativistic gas. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1957.
33. Synge J.L. Relativity: The General Theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.
34. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field // Grav. and Cosmol. 2007. Vol. 13, № 1. P. 59-79.
35. Cartan E. Les espaces de Finsler. Paris : Hermann, 1934.
36. Власов А.А. Статистические функции распределения. М: Наука, 1966. 356 с.
37. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universe and isotropization of relict radiation by gravitational interactions // Astroph. Space Sci. 1990. Vol. 163. P. 153-174.
URL: <https://arxiv.org/pdf/1101.4303.pdf>
38. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М: Наука, 1964. 568 с.
40. Игнат'ев Ю.Г. Физическая неустойчивость модели Вселенной с инфляционным (де-Ситтеровским) началом // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 3. С. 5-15.
41. Ignatyev Yu.G. Establishment of Thermodynamic Equilibrium in a Cosmological Model with Arbitrary Acceleration // Grav. and Cosmol. 2013. Vol. 19. № 4. P. 232-239.
42. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М-Л: ГИФМЛ, 1963. 360 с.

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

Агафонов Александр Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35А.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com

Yu. G. Ignat'ev, A. A. Agathonov

Statistical Cosmological Fermion Systems With Interparticle Fantom Scalar Interaction

Keywords: physics of the early universe, particle physics - cosmology connection, inflation, phantom scalar interaction.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S 52.27.Ny

The article represents a research of the cosmological evolution of fermion statistical systems with fantom scalar interaction where "kinetic" term's contribution to the total energy of a scalar field is negative. As a result of analytical and numerical simulation of such systems it has been revealed a existence of four possible scenarios depending on parameters of the system and initial conditions. Among these scenarios there are scenarios with an early, intermediate and late non-relativistic stages of the cosmological evolution, all of which also have necessary inflation stage.

REFERENCES

1. Weinberg S. *Cosmology*, Oxford: Oxford University Press, 2008.
2. Gorbunov D.S., Rubakov V.A. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*, Singapore: World Scientific, 2011.
3. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie, *Sitzungsber preus, Akad. Wiss.*, 1917, vol. 1, pp. 142-152.
4. Utiyama R., Fukuyama T. Gravitational Field as a Generalized Gauge Field, *Progr. Theor. Phys.*, 1971, vol. 45, pp. 612-627.
5. Minkevich, A.V. Gauge Approach to Gravitation and Regular Big Bang Theory, *Grav. and Cosmol.*, 2006, vol. 12, pp. 11-20.
6. Minkevich A.V., Garkun, A.S., Kudin, V.I. Regular accelerating Universe without dark energy, *Class. Quantum Grav.*, 2007, vol. 24, pp. 5835-5848.
7. Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity, *Phys. Lett. B.*, 1980, vol. 91, no. 1, pp. 99-102.
8. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic theory and conformal transformations, *Sov. Phys. J.*, 1982, vol. 25, no. 4, pp. 372-375.
9. Ignat'ev Yu.G. Relativistic canonical formalism and the invariant single-particle distribution function in the general theory of relativity, *Sov. Phys. J.*, 1983, vol. 26, no. 8, pp. 686-690.
10. Ignat'ev Yu.G. Relativistic kinetic equations for inelastically interacting particles in a gravitational field, *Sov. Phys. J.*, 1983, vol. 26, no. 12, pp. 690-694.
11. Ignat'ev Yu.G. Conservation laws and thermodynamic equilibrium in the general relativistic kinetic theory of inelastically interacting particles, *Sov. Phys. J.*, 1983, vol. 26, no. 12, pp. 1068-1072.
12. Ivanov G.G. Stationary macroscopic motions of a relativistic gas and its relation to the symmetries of the gravitational field, *Sov. Phys. J.*, 1979, vol. 22, no. 6, pp. 579-584.
13. Ignat'ev Yu.G. Magnetoactive collisionless plasma in the long-wavelength gravitational radiation, *Ukr. J. Phys.*, 1984, vol. 29, no. 7, pp. 1021-1026.
14. Ignatyev Yu.G. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology, *Grav. and Cosmol.*, 2006, vol. 12, no. 2-3, pp. 179-185.
15. Ignatyev Yu.G. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles, *Grav. and Cosmol.*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 190-193. <http://arXiv:1011.5774>
16. Ignat'ev Yu.G. Cosmological evolution of plasma with scalar interparticle interaction. I. Canonical formulation of classical scalar interaction, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 2, pp. 166-172.
17. Ignatiev Yu.G. Cosmological evolution of the degenerated plasma with interparticle scalar interaction. II. Formulation of mathematical model, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 5, pp. 550-560.

18. Ignatyev Yu.G. Cosmological evolution of the plasma with interparticle scalar interaction. III. Model with attraction of like-charged scalar particles, *Russ. Phys. J.*, 2012, vol. 55, no. 11, pp. 1345-1350.
19. Ignatyev Yu.G. *Relativistic Kinetic Theory of Nonequilibrium Processes in Gravitational Fields*, Kazan: Foliant-Press, 2010. <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>
20. Ignatyev Yu.G. *The Nonequilibrium Universe: The Kinetics Models of the Cosmological Evolution*, Kazan: Kazan University Press, 2013. http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf
21. Ignatyev Yu.G., Ignatyev D.Yu. Statistical system with a phantom scalar interaction in the Gravitation Theory. I. The Microscopic Dynamic, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 299-303.
22. Ignat'ev Yu.G. Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics, *Space, Time and Found. Interact.*, 2014, no. 1, pp. 47-69.
23. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A., Ignatyev D.Yu. Statistical systems with phantom scalar interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models, *Grav. and Cosmol.*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 304-308. arXiv:1608.05020 [gr-qc]
24. Ignatyev Yu.G. Nonminimal macroscopic models of a scalar field based on microscopic dynamics. III. Advancing theory on negative masses, *Space, Time and Found. Interact.*, 2015, no. 1, pp. 5-25.
25. Ignat'ev Yu.G. Nonminimal Macroscopic Models of a Scalar Field Based on Microscopic Dynamics: Extension of the Theory to Negative Masses, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 296-308.
26. Ignat'ev Yu.G. Collisionless self-gravitating statistical systems of scalarly interacting particles, *Grav. and Cosmol.*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 20-25.
27. Ignat'ev Yu.G. Relativistic Kinetic Theory of Statistical Systems with Conformally Invariant Interparticle Scalar Interaction, *Russ. Phys. J.*, 2016, vol. 59, no. 1, pp. 20-28.
28. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. Statistical Cosmological Systems of Strongly Degenerate Scalar Charged Fermions, *Space, Time and Found. Interact.*, 2015, no. 4, pp. 91-103.
29. Ignatyev Yu.G., Agathonov A.A. Numerical Models of Cosmological Evolution of a Degenerate Fermi-System of Scalar Charged Particles, *Grav. and Cosmol.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 105-112.
30. Ignat'ev Yu.G., Mikhailov M.L. Cosmological Evolution of a Boltzmann Plasma with Interparticle Phantom Scalar Interaction. I. Symmetric Cases, *Russ. Phys. J.*, 2015, vol. 57, pp. 1743-1752.
31. Ignat'ev Yu., Agathonov A., Mikhailov M., Ignatyev D. Cosmological evolution of statistical system of scalar charged particles, *Astroph. Space Sci.*, 2015, vol. 357:61.
32. Synge J.L. *The relativistic gas*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1957.
33. Synge J.L. *Relativity: The General Theory*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.
34. Ignat'ev Yu.G. Statistical dynamics of a classical particle ensemble in the gravitational field, *Grav. and Cosmol.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 59-79.
35. Cartan E. *Les espaces de Finsler*, Paris : Hermann, 1934.
36. Vlasov A.A. *Statisticheskie funktsii raspredeleniya* (Statistical Distribution Functions), Moscow: Nauka, 1966, 356 p.
37. Ignat'ev Yu.G., Popov A.A. Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson - Walker universe and isotropization of relict radiation by gravitational interactions, *Astroph. Space Sci.*, 1990, vol. 163, pp. 153-174. <https://arxiv.org/pdf/1101.4303.pdf>
38. Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*, Oxford-NewYork-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt: Pergamon Press, 1971.
39. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Statistical Physics. Part I*, Oxford: Pergamon Press, 1980.
40. Ignat'ev Yu.G. Instability Model of the Universe with De Sitter Beginning, *Space, Time and Found. Interact.*, 2015, no. 3, pp. 5-15.
41. Ignatyev Yu.G. Establishment of Thermodynamic Equilibrium in a Cosmological Model with Arbitrary Acceleration, *Grav. and Cosmol.*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 232-239.
42. Lebedev N.N. *Special'nye funktsii i ih prilozheniya* (Special Functions and Its Applications), Moscow: GIFML, 1963, 360 p.

Received 30.09.2016

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Agathonov Alexander Alexeevich, Candidat of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institut of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: a.a.agathonov@gmail.com