УДК 530.12; 530.51

А. М. Баранов[1]

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТИП СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ТЕОРЕМА БИРКГОФА

В рамках общей теории относительности и алгебраической классификации Петрова доказана теорема, что для случая сферической симметрии вне зависимости от наличия или отсутствия источников гравитационного поля 4D пространство-время относится к алгебраическому типу **D** или **0** с чисто вещественной матрицей Вейля. Для сферически симметричного гравитационного поля без материальных источников с учетом свойств тензора Вейля также доказана теорема Биркгофа.

Ключевые слова: алгебраическая классификация Петрова гравитационных полей, сферически симметричные гравитационные поля, теорема Биркгофа.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv; 02.90.+p

Введение

Возможность формулировки общих утверждений, позволяющих указать конкретный алгебраический тип четырехмерного пространства-времени, обладающего определенной симметрией, очень важна в теории гравитации, так как можно заранее получить представление об исследуемом пространстве-времени как в геометрическом, так и в физическом смысле. Созданная А.З. Петровым ([1]– [2]) алгебраическая классификация 4D пространств имеет для каждого алгебраического типа и подтипа, входящих в эту классификацию, свою геометрическую и физическую интерпретации.

В настоящей работе как раз рассматривается такая проблема, связанная с наличием сферически-симметричного пространственноподобного 3-мерного подпространства 4D пространства-времени как наиболее распространенного случая.

Кроме того, со сферической симметрией связана теорема Биргкгофа [3], утверждающая, что внешнее решение Шварцшильда – единственное статическое решение для островного источника в отсутствие негравитационных источников поля.

1. Введение сферически симметричной метрики

Для записи метрического интервала в произвольной координатной сетке выберем наиболее общий вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.1}$$

где $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ — метрический тензор, являющийся функцией всех четырех координат; греческие индексы пробегают четыре значения: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; латинские – три значения: $i, j, k = 1, 2, 3$, а скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная G_N полагаются равными единице (геометрическая система единиц). В дальнейшем запятой с индексом будет обозначаться обычная частная производная, а точкой с запятой с индексом — ковариантная производная.

Однако при наложении свойств симметрии на пространство-время можно упростить запись метрики, что связано с выбором системы координат, отвечающей этой симметрии. Для этого распишем (1.1) как

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ij} dx^i dx^j. \tag{1.2}$$

Прибавляя к (1.2) и вычитая выражение $(1/g_{00})(g_{0i} dx^i g_{0j} dx^j)$, приведем метрику к виду

$$ds^2 = d\tau^2 - b_{ij} dx^i dx^j = d\tau^2 - dl^2, \tag{1.3}$$

[1]E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

где введено физическое время $d\tau = \tau_\mu dx^\mu = (g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}})dx^\mu$ и физически наблюдаемый элемент 3-расстояния $dl^2 = b_{ij}dx^i dx^j$ с 3-мерным метрическим тензором $b_{ij} = (1/g_{00})g_{0i}g_{0j} - g_{ij}$, который может быть переписан как $b_{ij} = \tau_i\tau_j - g_{ij}$. Фактически здесь введена система отсчета, заданная монадой $\tau^\mu = dx^\mu/ds$ (единичным 4-вектором) ([4] - [5]), которая определяет временноподобное направление движения тела (временноподобную линию) и ортогональна к пространственноподобной 3-гиперповерхности в 4-мерном пространстве-времени, а 3-метрика $b_{\mu\nu} = \tau_\mu\tau_\nu - g_{\mu\nu}$ при этом является 3-проектором на эту 3-гиперповерхность, $\tau^\mu b_{\mu\nu} = 0$. Такая процедура представления 4-мерного пространства-времени носит название процедуры (1+3)-расщепления ([4]– [5]).

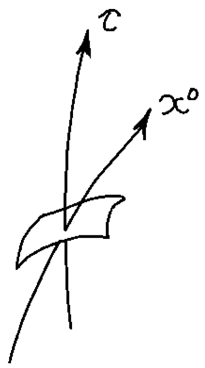

Рис. 1. Две конгруэнции временноподобных линий τ и x^0 в общем случае не совпадают.

В общем случае конгруэнция мировых линий системы отсчета τ и линий координатного времени x^0 ($x^i = const$) не совпадают (Рис. 1). Однако если смешанные компоненты g_{0i} ковариантного метрического тензора равны нулю, то конгруэнция координатных линий x^0 совпадает с конгруенцией временноподобных мировых линий систем отсчета τ. Такие системы координат называют физическими, сопутствующими системе отсчета или хронометрическими ([4]– [5]). В этом случае монада принимает вид $\tau^\mu = \delta^\mu_0/\sqrt{g_{00}}$ или $\tau_\mu = \sqrt{g_{00}}\,\delta^0_\mu$, что означает существование нормали к пространственной 3-мерной гиперповерхности, пропорциональной $x^0_{,\mu} = \delta^0_\mu$. С другой стороны, наличие такой нормали указывает на отсутствие вращения физического тела. Следовательно, приведение метрики (1.1) к виду

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - b_{ij}dx^i dx^j \tag{1.4}$$

возможно только в системе координат, сопутствующей системе отсчета при отсутствии вращения 3-мерной гиперповерхности.

Если наложить теперь на пространственную часть метрики (1.2) условие центральной симметрии, то все расстояния от центра симметрии должны быть одинаковыми, то есть смешанные компоненты пространственной части метрического тензора g_{ij} должны быть равны нулю, $g_{ij} = 0$; $i \neq j$. В этом случае $b_{ii} = -g_{ii}$ (суммирования по повторяющимся индексам здесь нет!) и $b_{11}(dx^1)^2 = b_{11}(dx^2)^2 = b_{11}(dx^3)^2$ или $b_{11} = b_{22} = b_{33} = H^2$, так как координатные величины $(dx^i)^2$ всегда можно выбрать одинаковыми.

С другой стороны, локальное задание ортогональности координатных 2-поверхностей в общей точке в 3-пространстве эквивалентно выполнению условия равенства нулю дифференциального оператора Бельтрами 1-го рода ([6], с. 57) для $i \neq j$:

$$\Delta(x^i, x^j) = g^{kl}x^i_{,k}x^j_{,l} = g^{kl}\delta^i_k\delta^i_l = g^{ij} = 0, \tag{1.5}$$

так как косинус угла между нормалями к 2-поверхностям пропорционален $\Delta(x^i, x^j)$.

Условие (1.5) является необходимым и достаточным, чтобы две координатные 2-поверхности $x^i = const$ и $x^j = const$ были в каждой точке ортогональны (см. [6], с.58).

В силу тождеств

$$g^{i\beta}g_{\beta j} = g^{i0}g_{0j} + g^{ik}g_{kj} + g^{ii}g_{ij} = \delta^i_j \tag{1.6}$$

и учета равенства нулю смешанных компонент метрического тензора $g_{0i} = 0$ и $g^{kl} = 0$ $(k \neq l)$ получаем отсутствие и смешанных ковариантных пространственных компонент метрического тензора $g_{ij} = 0,\ i \neq j$.

Таким образом, мы вернулись к тому, что $dl^2 = b_{ij}\,dx^i\,dx^j = b_{ii}\,(dx^i)^2 = -g_{ii}\,(dx^i)^2$, а требование сферической симметрии позволяет переписать как

$$dl^2 = H^2\,dl_0^2 = H^2\,\delta^i_{\ j}\,dx^i\,dx^j, \tag{1.7}$$

где $dl_0^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ в декартовых координатах или $dl_0^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$ в сферических координатах с радиальной переменной r и угловыми переменными θ, φ.

Здесь небезынтересно было бы упомянуть об утверждении Вейля ([6], с. 46, 116), касающегося записи метрического элемента в 3-мерном пространстве. Суть этого утверждения состоит в следующем. Если в каком-нибудь 3-мерном пространстве может быть так выбрана система координат, что смешанные компоненты метрического тензора равны нулю (метрический тензор приводится к диагональному виду), то рассматриваемое 3-пространство – конформно плоское, то есть квадрат расстояния между бесконечно близкими точками пропорционален квадрату расстояния в плоском пространстве.

Следовательно, построенная выше локально ортогональная система координат, в которой отсутствуют смешанные компоненты пространственной части метрического тензора, позволяет в силу утверждения Вейля сразу записать выражение (1.7).

Окончательно метрика (1.1) для сферически симметричного гравитационного поля в сопутствующей системе отсчета может быть записана как

$$ds^2 = G^2(t,r)dt^2 - H^2(t,r)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)), \tag{1.8}$$

где $x^0 \equiv t$.

2. Введение тетрад и уравнений структуры Картана

Перейдем теперь в касательное пространство-время, введя ортонормированный 4-базис — тетрады, $g^{(\alpha)}_{\ \mu} : g^{(\alpha)}_{\ \mu}\,g_{(\beta)}^{\ \ \mu} = \delta^\alpha_\beta$, где тетрадные индексы (нумерующие базисные векторы) записываются в круглых скобках. Физически такой переход в касательное пространство эквивалентен выбору свободно падающей системы отсчета.

Исходя из метрики в виде (1.8), определим тетрады следующим образом:

$$g^{(0)}_{\ \mu} = G(t,r)\,\delta^0_\mu; \quad g^{(1)}_{\ \mu} = H(t,r)\,\delta^1_\mu; \quad g^{(2)}_{\ \mu} = H(t,r)\,r\,\delta^2_\mu; \quad g^{(3)}_{\ \mu} = H(t,r)\,r\,sin\theta\,\delta^3_\mu, \tag{2.1}$$

что эквивалентно записи тетрадной метрики $g_{(\alpha)(\beta)}$ в виде

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g_{(\alpha)\mu}\,g_{(\beta)}^{\ \ \mu} = diag(1,-1,-1,-1), \tag{2.2}$$

а квадрата интервала в касательном пространстве как

$$ds^2 = g_{(\alpha)(\beta)}\Theta^{(\alpha)}\Theta^{(\beta)}, \tag{2.3}$$

где введены базисные дифференциальные 1-формы $\Theta^{(\alpha)}$ с помощью тетрад (2.1) как проекции координатных дифференциалов на касательное пространство-время

$$\Theta^{(\alpha)} = g^{(\alpha)}_\mu\,dx^\mu. \tag{2.4}$$

Первые уравнения структуры Картана

$$\mathbf{d}\Theta^{(\alpha)} = -\omega^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)} \wedge \Theta^{(\beta)}, \tag{2.5}$$

где $\mathbf{d}$ — внешний дифференциал, а операция $\wedge$ обозначает внешнее произведение, позволяют находить отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности $\omega_{(\alpha)\,(\beta)}$, которые, в свою очередь, связаны с коэффициентами вращения Риччи $\Gamma^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)(\eta)}$:

$$\omega^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)} = \Gamma^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)(\eta)}\Theta^{(\eta)} = \Gamma^{(\alpha)}_{\ \ (\beta)\,\lambda}\,dx^\lambda, \tag{2.6}$$

где $\Gamma_{(\alpha)(\beta)(\eta)} = -\Gamma_{(\beta)(\alpha)(\eta)}$.

С учетом этого свойства получаем ненулевые компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\Gamma_{(0)(1)(0)} = \frac{1}{H}(\ln G)'; \quad \Gamma_{(0)(1)(1)} = \Gamma_{(0)(2)(2)} = \Gamma_{(0)(3)(3)} = -\frac{1}{G}(\ln H)^{\bullet}; \tag{2.7}$$

$$\Gamma_{(1)(2)(2)} = \Gamma_{(1)(3)(3)} = \frac{1}{H}(\ln H)' + \frac{1}{Hr}; \quad \Gamma_{(2)(3)(3)} = \frac{1}{Hr}\operatorname{ctg}\theta; \tag{2.8}$$

где штрихом обозначена частная производная по r, а точкой — частная производная по t.

Пользуясь определением (2.6), легко найти ненулевые компоненты 1-форм связности $\omega_{(\alpha)(\beta)}$:

$$\omega_{(0)(1)} = \Gamma_{(0)(1)(0)}\,\Theta^{(0)} + \Gamma_{(0)(1)(1)}\,\Theta^{(1)}; \quad \omega_{(0)(2)} = \Gamma_{(0)(2)(2)}\,\Theta^{(2)}; \quad \omega_{(0)(3)} = \Gamma_{(0)(3)(3)}\,\Theta^{(3)}; \tag{2.9}$$

$$\omega_{(1)(2)} = \Gamma_{(1)(2)(2)}\,\Theta^{(2)}; \quad \omega_{(1)(3)} = \Gamma_{(1)(3)(3)}\,\Theta^{(3)}; \quad \omega_{(2)(3)} = \Gamma_{(2)(3)(3)}\,\Theta^{(3)}. \tag{2.10}$$

Вообще говоря, для произвольной тетрадной метрики справедливо соотношение $\mathbf{d}\,g_{(\alpha)(\beta)} = \omega_{(\alpha)(\beta)} + \omega_{(\beta)(\alpha)}$, левая часть которого в рассматриваемом случае из-за постоянства тетрадной метрики (2.2) равна нулю, то есть 1-формы связности обладают свойством антисимметричности при удобном выборе тетрадной метрики

$$\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}, \tag{2.11}$$

позволяющим уменьшить число независимых 1-форм связности. Следует подчеркнуть, что специальный выбор тетрадной метрики не ограничивает общности подхода, но зато упрощает выкладки.

Далее воспользуемся вторыми уравнениями структуры Картана:

$$\Omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} = \frac{1}{2} R^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}\,\Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)} = \mathbf{d}\,\omega^{(\alpha)}{}_{(\beta)} + \omega^{(\alpha)}{}_{(\sigma)} \wedge \omega^{(\sigma)}{}_{(\beta)}, \tag{2.12}$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)} = -\Omega_{(\alpha)(\beta)}$ — 2-форма кривизны; $R^{(\alpha)}{}_{(\beta)(\gamma)(\delta)}$ — тензор кривизны Римана-Кристоффеля в тетрадных обозначениях, отличные от нуля компоненты которого находятся из (2.12) и равны:

$$R_{(1)(0)(1)(0)} = \frac{1}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet\bullet}}{H} - \frac{H^{\bullet}G^{\bullet}}{HG}\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{H'G'}{HG} - \frac{G''}{G}\right); \tag{2.13}$$

$$R_{(0)(2)(0)(2)} = R_{(0)(3)(0)(3)} = \frac{1}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet\bullet}}{H} - \frac{H^{\bullet}G^{\bullet}}{HG}\right) - \frac{1}{H^2}\left(\frac{H'G'}{HG} + \frac{G'}{rG}\right); \tag{2.14}$$

$$R_{(0)(2)(1)(2)} = R_{(0)(3)(1)(3)} = \frac{1}{GH}\left(-\frac{H^{\bullet\prime}}{H} + \frac{H^{\bullet}H'}{HH} + \frac{H^{\bullet}G'}{HG}\right); \tag{2.15}$$

$$R_{(1)(2)(1)(2)} = R_{(1)(3)(1)(3)} = -\frac{1}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet}}{H}\right)^2 + \frac{1}{H^2}\left(\frac{H''}{H} + \frac{1}{r}\frac{H'}{H} + \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right); \tag{2.16}$$

$$R_{(2)(3)(2)(3)} = -\frac{1}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet}}{H}\right)^2 + \frac{1}{H^2}\left(\frac{2}{r}\frac{H'}{H} + \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right). \tag{2.17}$$

Согласно определению тензора Риччи $R_{(\alpha)(\beta)} = R^{(\gamma)}{}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)} = g^{(\gamma)(\sigma)}R_{(\sigma)(\alpha)(\beta)(\gamma)}$, запишем его ненулевые тетрадные компоненты:

$$R_{(0)(0)} = \frac{3}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet\bullet}}{H} - \frac{H^{\bullet}}{H}\frac{G^{\bullet}}{G}\right) - \frac{1}{H^2}\left(\frac{G''}{G} + \frac{G'}{G}\frac{H'}{H} + \frac{2}{r}\frac{G'}{G}\right); \tag{2.18}$$

$$R_{(0)(1)} = -\frac{1}{HG}\left(2\frac{H'^{\bullet}}{H} - \frac{H^{\bullet}}{H}\frac{H'}{H} + \frac{H^{\bullet}}{H}\frac{G'}{G}\right); \tag{2.19}$$

$$R_{(1)(1)} = -\frac{1}{G^2}\left(\frac{H''}{H} - \frac{H^\bullet}{H}\frac{G^\bullet}{G} + 2\left(\frac{H^\bullet}{H}\right)^2\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{G''}{G} - \frac{H'}{H}\frac{G'}{G} + 2\frac{H''}{H} + \frac{2}{r}\frac{H'}{H} - 2\left(\frac{H'}{H}\right)^2\right); \tag{2.20}$$

$$R_{(2)(2)} = R_{(3)(3)} = -\frac{1}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet\bullet}}{H} - \frac{H^\bullet}{H}\frac{G^\bullet}{G} + 2\left(\frac{H^\bullet}{H}\right)^2\right) + \frac{1}{H^2}\left(\frac{H''}{H} + \frac{1}{r}\frac{G'}{G} + \frac{G'}{G}\frac{H'}{H} + \frac{3}{r}\frac{H'}{H}\right). \tag{2.21}$$

В этом случае скалярная кривизна $R = g^{(\alpha)(\beta)}R_{(\alpha)(\beta)}$ принимает вид

$$R = \frac{6}{G^2}\left(\frac{H^{\bullet\bullet}}{H} - \frac{H^\bullet}{H}\frac{G^\bullet}{G} + \left(\frac{H^\bullet}{H}\right)^2\right) - \frac{2}{H^2}\left(\frac{G''}{G} + \frac{H'}{H}\frac{G'}{G} + \frac{2}{r}\frac{G'}{G} + 2\frac{H''}{H}\right). \tag{2.22}$$

3. Алгебраическая классификация сферически симметричного гравитационного поля

Для того, чтобы провести алгебраическую классификацию 4D пространства-времени, характеризуемого метрической квадратичной формой (1.8), согласно процедуре Петрова ([1] - [2]), необходимо построить стандартным путем в тетрадных компонентах тензор конформной кривизны Вейля $W_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)}$ на основе введенной метрики и найденных выше тензоров кривизны, Риччи и выражения для скалярной кривизны:

$$W_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} + R_{(\gamma)[(\alpha)}g_{(\beta)](\delta)} - R_{(\delta)[(\alpha)}g_{(\beta)](\gamma)} - \frac{R}{3}g_{(\gamma)[(\alpha)}g_{(\beta)](\delta)}, \tag{3.1}$$

где квадратными скобками обозначается антисимметризация по тетрадным индексам.

Схема подхода Петрова заключается в следующем. Спроектированный в заданной 4-точке с помощью ортонормированного тетрадного базиса на касательное плоское пространство-время тензор Вейля отображается затем на бивекторное метризованное пространство (каждой антисимметричной паре индексов ставится в соответствие один собирательный индекс в 6-мерном пространстве по правилу:

$$01 \to 1,\ 02 \to 2,\ 03 \to 3,\ 23 \to 4,\ 31 \to 5,\ 12 \to 6, \tag{3.2}$$

с последующим исследованием λ—матрицы $W(\lambda) = W_{AB} - \lambda g_{AB}$, где $A, B, C = 1,2,3,4,5,6$; $W_{AB} = W_{BA}, g_{AB} = g_{BA}$, $Spur(W_{AB}) = 0$ (бесследовость матрицы W_{AB}).

Алгебраический тип пространства определяется характеристикой данной λ-матрицы, при этом λ_C суть корни характеристического уравнения $\det W(\lambda) = 0$. Такая классификация оказывается инвариантной относительно любых координатных преобразований, так как ни собственные значения λ_C, ни элементарные делители λ-матрицы не зависят от подобных преобразований (см., например, [2]).

Замечательной особенностью этой 6×6 λ-матрицы является то, что она имеет следующую блочную структуру [1]:

$$W(\lambda) = \begin{pmatrix} W_E - \lambda I & W_B \\ W_B & -(W_E - \lambda I) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где W_E и W_B — бесследовые матрицы «электрического» и «магнитного» типов соответственно.

Эта матрица элементарными преобразованиями, не меняющими элементарных делителей и характеристики λ-матрицы, приводится к виду $W(\lambda) = diag(W - \lambda,\ W^* - \lambda)$ (см. [1]) с комплексной симметричной бесследовой 3×3 матрицей Вейля

$$W = W_E + iW_B; \tag{3.4}$$

$i^2 = -1$, а звездочкой обозначена операция комплексного сопряжения.

Поэтому особенно просто алгебраическая классификация по Петрову осуществляется с привлечением комплексного 3-мерного евклидова пространства с метрическим тензором, совпадающим с трехмерным символом Кронекера, и с постановкой задачи на собственные значения для матрицы W.

В нашем случае прямыми вычислениями с учетом выражений (2.13)-(2.22) и (3.1) можно показать, что 3×3 матрица Вейля «магнитного типа» W_B равна нулю. Следовательно, матрица $W = W_E$ принимает вид

$$W \equiv W_E = \eta \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$\eta = \frac{1}{6H^2}\left(-\frac{G''}{G} + 2\frac{G'}{G}\frac{H'}{H} + \frac{H''}{H} - \frac{1}{r}\frac{H'}{H} - 2\left(\frac{H'}{H}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{G'}{G}\right). \tag{3.6}$$

В итоге, матрица Вейля, отвечающая метрике (1.8), оказывается чисто вещественной («электрического» типа).

Из выражений (3.3) и (3.4) следует, что для $\eta \neq 0$ (то есть $G^2 \neq H^2$) матрица Вейля принадлежит каноническому алгебраическому типу **D**. Если же $G^2 = H^2$ $(\eta \equiv 0)$, то пространство-время оказывается конформно-плоским, то есть принадлежащим алгебраическому типу **0**.

Полученный результат может быть сформулирован как следующее утверждение [7].

Теорема. *Для случая сферической симметрии гравитационного поля вне зависимости от наличия или отсутствия источников в виде тензора энергии-импульса четырехмерное пространство-время принадлежит алгебраическому типу* **D** *либо* **0** *с чисто вещественной матрицей Вейля.*

4. О теореме Биркгофа

Со сферически симметричным гравитационным полем тесно связана теорема Биркгофа [3], замечания по которой можно найти в [1]. Суть этой теоремы заключается в следующем.

Сферически симметричное гравитационное поле, описываемое уравнениями Эйнштейна без источников (тензор энергии-импульса отсутствует), является с необходимостью статическим.

В [3] об этом написано следующее: «Всякое центрально-симметричное поле в пустоте – статическое». Другими словами, отсюда следует, что это поле описывается внешним решением Шварцшильда.

Здесь мы воспользуемся сформулированной выше теоремой, утверждающей об отсутствии 3×3 матрицы Вейля «магнитного» типа для случая сферической симметрии.

Остается теперь принять равным нулю источник гравитационного поля (тензор энергии-импульса), что эквивалентно равенству нулю всех компонент тензора Риччи и скалярной кривизны. Тогда тензор Вейля совпадет с тензором кривизны (см. (3.1)) и все свойства тензора Вейля должны соблюдаться, в том числе и равенство нулю следа тензора кривизны.

Для дальнейшего возьмем метрику для гравитационного поля с пространственноподобной сферической симметрией в излучательных координатах в виде

$$ds^2 = G^2(t,r)dt^2 + 2L(t,r)dtdr - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)). \tag{4.1}$$

Этой метрике отвечают базисные дифференциальные 1-формы, которые записываются как

$$\Theta^{(0)} = G(t,r)\,dt + \frac{L(t,r)}{G(t,r)}dr;\ \Theta^{(1)} = \frac{L(t,r)}{G(t,r)}dr;\ \Theta^{(2)} = r\,d\theta;\ \Theta^{(3)} = r sin(\theta)\,d\varphi. \tag{4.2}$$

Проводя всю процедуру вычислений, получаем следующие ненулевые компоненты тензора кривизны (в обозначениях (3.2)):

$$R_{11} = -R_{44},\ R_{22} = -R_{55},\ R_{33} = -R_{66},\ R_{26} = -R_{35}. \tag{4.3}$$

Ясно, что согласно сформулированной выше теореме «магнитные» компоненты должны исчезать, то есть $R_{26} = -R_{35} = 0$, что соответствует равенству

$$ln(L)^{\bullet} = ln(G)^{\bullet}. \tag{4.4}$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{L(t,r)}{G(t,r)} = f(r). \tag{4.5}$$

Этот результат приводит к 6 ненулевым компонентам тензора кривизны, связанных условием

$$R_{11}+R_{22}+R_{33}=-(R_{44}+R_{55}+R_{66})=0, \tag{4.6}$$

где

$$R_{44}=\frac{1-f^2}{r^2f^2};\ R_{55}=R_{66}=-\frac{f'}{rf^3}. \tag{4.7}$$

Записывая явно условие равенства нулю следа матрицы Вейля (4.6) для рассматриваемого случая, получим уравнение

$$\frac{1-f^2}{r^2f^2}-2\frac{f'}{rf^3}=0. \tag{4.8}$$

Решением этого уравнения будет

$$\frac{L(t,r)}{G(t,r)}=f(r)=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{C}{r}}}, \tag{4.9}$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя (4.9) в базисные 1-формы (4.2) и вычисляя снова компоненты тензора кривизны, приходим с учетом $R_{22}=-R_{55}$ к уравнению

$$\frac{(r+G(t,r))}{r^2G(t,r)}\,G'(t,r)=-\frac{1}{2}\,\frac{C}{r^3}, \tag{4.10}$$

решение которого можно записать как

$$G(t,r)=\varphi(t)\cdot\sqrt{1+\frac{C}{r}}, \tag{4.11}$$

где $\varphi(t)$ – некоторая произвольная функция времени.

Тогда сразу получаем (с учетом (4.9))

$$L(t,r)=\varphi(t). \tag{4.12}$$

Вводя новое координатное время $d\tau=\varphi(t)\,dt$, приходим к статической метрике

$$ds^2=(1+\frac{C}{r})\,d\tau^2+2\,d\tau dr-r^2(d\theta^2+sin^2\theta d\varphi^2)), \tag{4.13}$$

описывающей сферически симметричное гравитационное поле без источников и совпадающей со внешней метрикой Шварцшильда при выборе $C=-2\,m$ из требования совпадения с ньютоновским приближением на галилеевой бесконечности для изолированного источника с массой m.

Заключение

Проведенное выше исследование показывает, что с точки зрения алгебраической классификации Петрова оказывается, что сферически симметричное гравитационное поле при любых изменениях, не нарушающих сферической симметрии, всегда принадлежит алгебраическому типу либо **D**, либо **0**. В частности, когда тензор энергии-импульса отсутствует, то тип **D** соответствует внешнему полю Шварцшильда (теорема Биркгофа), а тип **0** – пространству Минковского.

Из полученной теоремы также следует известное утверждение об отсутствии гравитационного излучения при строго сферическом коллапсе, которое относится к алгебраическим типам **N** и **III**.

Другими словами, любые сферически симметричные движения (стационарные или нестационарные): коллапс, взрыв или колебания гравитирующей сферически симметричной системы (в том числе и электромагнитное высокочастотное радиальное излучение), не отражаются на алгебраическом типе четырехмерного пространства-времени, отвечающему сферически симметричному гравитационному полю.

Кроме того, доказанная теорема позволяет по иному взглянуть на известную теорему Биркгофа.

Если взять метрику для сферического гравитационного поля в излучательных координатах и учесть отсутствие тензора энергии-импульса и свойства тензора Вейля, совпадающего в данном случае с тензором кривизны, то можно показать, что этим требованиям удовлетворяет метрика для статического сферически симметричного гравитационного поля, которое, принимая во внимание ньютоновскую асимптотику на галилеевой бесконечности, фактически совпадает с внешним решение Шварцшильда. Это как раз и утверждает теорема Биркгофа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с.
2. Баранов А.М. Основы теории относительности и гравитации: математическое введение. Учебн. пособие. Красноярск: Красноярский государственный университет, 1987. 91 с.
3. Birkhoff G.D. Relativity and Modern Physics. Cambridge: Harvard University Press, 1923. 253 p.
4. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers Inc., 2006. 137 p.
5. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.
6. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ГИИНЛ, 1948. 316 с.
7. Баранов А.М., Чешель А.А. Алгебраический тип сферически симметричного поля // Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации: тез. докл.V Всесоюзн. конф. МГУ. Москва, 1981. С. 107.

Поступила в редакцию 20.12.2016

Баранов Александр Михайлович, д. ф.-м. н., профессор, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), 660049, Россия, г. Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89 ;
Сибирский государственный аэрокосмический университет им. акад. М.Ф. Решетнёва (СибГАУ), 660037, Россия, г. Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru

A. M. Baranov
Algebraic type of a spherical gravitational field and the Birkhoff theorem

Keywords: Petrov’s algebraic classification of gravitational fields, spheric gravitational fields, Birkhoff theorem.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv; 02.90.+p

Within the framework of General Relativity and algebraic classification of Petrov the theorem is proved that for spherical symmetry without dependence from presence or an absence of gravitational field’s material sources in the form of energy-momentum tensor the space-time belongs to the algebraic types **D** or **0** with purely real-valued Weyl matrix. The theorem of Birkhoff also is proved taking into account properties of Weyl tensor for spherical gravitational field without material sources.

REFERENCES

1. Petrov A.Z. *Novye metody v obshchej teorii otnositelnosti* (New Methods in the General Relativity), Moscow: Nauka, 1966, 495 p.
2. Baranov A.M. *Osnovy teorii otnositelnosti i gravitacii matematicheskoe vvedenie. Uchebn posobie* (Foundations of the theory relativity and gravitation: mathematical introduction. The manual), Krasnoyarsk: Krasnoyarsk State University, 1987, 91 p.
3. Birkhoff G.D. *Relativity and Modern Physics*, Cambridge: Harvard University Press, 1923, 253 p.

4. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers Inc., 2006, 137 p.

5. Vladimirov Yu.S. *Sistemy otscheta v teorii gravitacii* (Reference Frames in the Gravitation Theory), Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.

6. Eisenhart L.P. *Riemannian Geometry*, Princeton: Princeton University Press, 1949, 306 p.

7. Baranov A.M., Cheshel A.A. Algebraic type of spherical field, *Modern Theoretical and Experimental Problems of the Theory of Relativity and Gravitation: Abstracts of V All-Union Conf.*, Moscow State University, Moscow, 1981, p. 107.

Received 20.12.2016

Baranov Alexandre Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astaf'ev, Ada Lebedeva St., 89, Krasnoyarsk, 60049, Russia;
Siberian State Aerospace University named after acad. M.F. Reshenev(SibSAU), Av. named after newspaper "Krasnoyarsk worker", 31, Krasnoyarsk, 60037, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru; Baranov@stfi.ru