УДК 530.12 + 531.51

С. В. Червон,[1] А. В. Николаев,[2] Т. И. Майорова[3]

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В $f(R)$ ГРАВИТАЦИИ С КИНЕТИЧЕСКИМ СКАЛЯРОМ КРИВИЗНЫ [4]

В данной работе приводится техника варьирования действия $f(R)$ теории гравитации в метрическом формализме; детально разобран метод Гиббонса – Йорка – Хоукинга для устранения граничного интеграла. Подробно приведен вывод полевых уравнений $f(R)$ теории гравитации. Получены ковариантные полевые уравнения $f(R)$ теории гравитации с кинетическим скаляром кривизны, то есть модели, основанной на интеграле действия: $S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{,j}R^{,j}X(R)+f(R)\right)+S_{matter}$.

Ключевые слова: модифицированные теории гравитации, $f(R)$ теория гравитации, вариационный принцип.

PACS: 04.50.Kd

Введение

Открытие ускорения в расширении Вселенной привело к активному поиску модифицированной теории гравитации, которая, сохраняя достижения эйнштейновской ОТО, объясняла ускоренное расширение Вселенной без привлечения темной энергии. Многие из таких теорий гравитации, которые можно считать кандидатами на решение проблемы описания ускорения Вселенной в современную эпоху, представлены в обширном обзоре [1]. Особую популярность приобретают теории скалярно-тензорной и $f(R)$ гравитации, которые являются эквивалентными на классическом уровне: $f(R)$ гравитация может быть представлена как скалярно-тензорная теория с потенциалом [2]. В последнее десятилетие особо привлекательными становятся теории в которые входят производные от скалярной кривизны [3, 4], которые, с одной стороны, могут привести к перенормируемой, в квантовом смысле, теории гравитации, а с другой – к нефизическим массивным духам (см., например, [5] и цитируемую там литературу). Кроме того активно изучаются нелокальные теории, теории гравитации с высшими производными, с неминимальным взаимодействием, гравитация Эйнштейна-Гаусса-Бонне и ее модификации [1].

В настоящей работе мы рассматриваем технические подробности вывода уравнений гравитационного поля в теории $f(R)$ гравитации [7], обращаем внимание на контроль за граничными членами теории [6]. В качестве нового результата мы представляем вывод полевых уравнений в $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны: теории, которая обобщает модель Эйнштейна-Гильберта-Подольского и Старобинского-Подольского [5].

1. Основы $f(R)$ теории гравитации

Теория $f(R)$ гравитации представляет собой обобщение ОТО, в котором модификации подвергается метрическая часть действия для гравитационного поля, порожденного материальным источником, записанным в виде

$$S=S'_{EH}+S_M,\quad S'_{EH}=\int d^4x\sqrt{-g}f(R), \tag{1.1}$$

где S'_{EH} – обобщенное действие Эйнштейна-Гильберта, $f(R)$ – некоторая функция скалярной кривизны, S_M – действие материи.

[1]E-mail: chervon.sergey@gmail.com
[2]E-mail: ilc@xhns.org
[3]E-mail: majorova.tatyana@mail.ru

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке госзадания МОН РФ № 2014/391 по проекту 1670.

Чтобы получить обобщенные уравнения Эйнштейна, выполняем варьирование по метрике g_{ik}. Вариация S'_{EH} имеет вид

$$\delta S'_{EH} = \int d^4x[\delta\sqrt{-g}f(R) + \sqrt{-g}f'(R)\delta R]. \tag{1.2}$$

Воспользуемся известными результатами [8] (см. также [7])

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}, \tag{1.3}$$

$$\delta g_{ik} = -g_{im}g_{kl}\delta g^{ml}, \tag{1.4}$$

$$\delta R = \delta(g^{ik}R_{ik}) = \delta g^{ik}R_{ik} + g^{ik}\delta R_{ik} = \delta g^{ik}R_{ik} + g_{mq}\Box\delta g^{mq} - \nabla_i\nabla_l\delta g^{il}, \ \Box := \nabla_s\nabla^s. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.3) и (1.5) в правую часть (1.2), получаем:

$$\delta S'_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}(-\frac{1}{2}g_{ik}f + f'R_{ik}) + I_1 - I_2, \tag{1.6}$$

где

$$I_1 = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}f'(R)g_{mq}\Box\delta g^{mq}, \ I_2 = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}f'(R)\nabla_i\nabla_l\delta g^{il}. \tag{1.7}$$

Подынтегральное выражение первого интеграла содержит, в определенном смысле, обобщение тензора Эйнштейна. Очевидно, что тензор Эйнштейна получается при подстановке $f(R) = R$. В интегралах I_1 и I_2 нужно выделить 4-дивергенцию для применения теоремы Гаусса-Стокса.

Для применения теоремы Гаусса-Стокса нам необходимо получить интеграл следующего вида: $\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^sN_s$. Используя в подынтегральном выражении I_1 определение оператора $\Box = \nabla_s\nabla^s = \nabla^s\nabla_s$, получаем $f'(R)g_{mq}\Box\delta g^{mq} = f'(R)g_{mq}\nabla_s\nabla^s\delta g^{mq}$.

Чтобы выделить в подынтегральном выражении 4-дивергенцию, применяем ковариантную производную ∇^s к выражению $(f'(R)g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq})$; в результате получаем

$$\begin{aligned}\nabla^s(f'(R)g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq}) = g_{mq}(\nabla^s f'(R))\nabla_s\delta g^{mq} + g_{mq}f'\nabla^s\nabla_s\delta g^{mq} = \\ = g_{mq}(\nabla^s f'(R))\nabla_s\delta g^{mq} + g_{mq}f'(R)\Box\delta g^{mq}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Если выбрать пробное $\tilde{N}_s = f'(R)g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq}$ и применить к нему оператор ∇^s, получим нужное слагаемое $\nabla^s\tilde{N}_s$ и слагаемое, содержащее $\nabla^s\delta g^{mq}$. Для устранения ненужного нам слагаемого, добавим к $\tilde{N}_s$ такое выражение, которое аннулирует мешающий нам член. Таким образом, истинное N_s должно включать слагаемое, которое после применения оператора ∇^s даст нам $-g_{mq}(\nabla^s f'(R))\nabla_s\delta g^{mq}$. Нужное нам слагаемое можно получить путем следующего преобразования: $g_{mq}(\nabla^s f'(R))\nabla_s\delta g^{mq} = g_{mq}(\nabla^s f'(R))g_{sn}\nabla^n\delta g^{mq} = g_{mq}(\nabla_n f'(R))\nabla^n\delta g^{mq}$. Меняем немой индекс n на s получаем $g_{mq}(\nabla_s f'(R))\nabla^s\delta g^{mq}$. Таким образом искомое N_s имеет вид

$$N_s = f'g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq} - g_{mq}(\nabla_s f')\delta g^{mq}. \tag{1.9}$$

Подынтегральное выражение будет иметь вид $\nabla^sN_s = f'g_{mq}\Box\delta g^{mq} - g_{mq}(\Box f')\delta g^{mq}$, а интеграл I_1 (1.7) можно записать следующим образом

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}f'(R)g_{mq}\Box\delta g^{mq} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^sN_s + \int d^4x\sqrt{-g}g_{mq}(\Box f')\delta g^{mq}. \tag{1.10}$$

Тем самым интеграл I_1 преобразован к 4-дивергенции от N_s и слагаемому, которое содержит вариацию δg^{mq}.

По аналогии избавляемся от производной $\nabla_l\delta g^{il}$ в интеграле I_2 (1.7).

Для того, чтобы получить $\int d^4x\sqrt{-g})\nabla_iM^i$, выбираем пробное $\tilde{M}^i = f'(R)\nabla_l\delta g^{il}$. Применяя к нему оператор ∇_i, получаем $\nabla_i\tilde{M}^i = f'(R)\nabla_i\nabla_l\delta g^{il} + \nabla_i f'(R)\nabla_l\delta g^{il}$.

Используя алгоритм, описанный для интеграла I_1, находим истинное M^i:

$$M^i = f'(R)\nabla_l\delta g^{il} + \nabla_l f'(R)\delta g^{il}.$$

Далее, аналогичным способом, как для интеграла I_1, находим 4-дивергенцию:

$$\nabla_i M^i = f'(R)\nabla_i \nabla_l \delta g^{il} - \nabla_i \nabla_l f'(R)\delta g^{il}.$$

Тогда интеграл I_2 преобразуется к виду

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik} f'(R)\nabla_i\nabla_l\delta g^{il} = \int d^4x\sqrt{-g})\nabla_i M^i + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_i\nabla_l f'(R)\delta g^{il}.$$

В результате варьирования обобщенного действия Эйнштейна-Гильберта (1.6)

$$\delta S'_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}(-\frac{1}{2}g_{ik}f + f'R_{ik} + g_{ik}\Box f' - \nabla_i\nabla_k f') + \\ + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^s N_s - \int d^4x\sqrt{-g})\nabla_i M^i, \quad (1.11)$$

здесь выделены интегралы, которые с помощью теоремы Гаусса – Стокса мы переводим в интегралы от 4-дивергенции к интегралам по гиперповерхности.

Рассматриваем процедуру корректного устранения интегралов по гиперповерхности. Для этого начнем с обозначений, стандартных для теории гиперповерхностей [8]. Ограничимся рассмотрением четырехмерного пространства-времени и трехмерными, ненулевыми гиперповерхностями. Гиперповерхность Σ может задаваться как уравнение зависимости между 4-координатами

$$\Phi(x^i) = 0. \quad (1.12)$$

В этом случае $\Phi_{,i}$, будет нормальным вектором к гиперповерхности Σ, так как на ней $\Phi_{,i} = 0$, а значит значение Φ меняется только в направлении перпендикулярном Σ. Ортонормальный вектор можно определить так

$$n_i = \frac{\varepsilon\Phi_{,i}}{\sqrt{g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k}}},$$

где $n_i n^i = \varepsilon = \mp 1$, где верхний знак соответствует пространственноподобной гиперповерхности Σ, нижний – времениподобной. При этом добавляется требование, чтобы n^i указывало направление возрастания $\Phi : n^i\Phi_{,i} > 0$.

Другой способ задания гиперповерхности заключается в указании явной зависимости 4-координат x^i от координат на гиперповерхности y^a, $(a, b, ... = 1, 2, 3)$

$$x^i = x^i(y^a).$$

Построим базис касательных векторов к гиперповерхности Σ

$$e^i_a := \frac{\partial x^i}{\partial y^a}.$$

Тогда для нормального вектора можно записать:

$$e^i_a n_i = 0.$$

Индуцированную метрику на поверхности находим, используя способ задания внутренней метрики и условие ортогональности,

$$dS^2_\Sigma = g_{ik}dx^i dx^k|_\Sigma = g_{ik}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\right)dy^a\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^b}\right)dy^b = h_{ab}dy^a dy^b,$$

где $h_{ab} = g_{ik}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a}\right)\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^b}\right) = g_{ik}e^i_a e^k_b$ – индуцированная метрика на Σ или ее первая фундаментальная форма.

Рассматриваем поверхностные интегралы более подробно. В координатах на гиперповерхности имеем:

$$\oint N_s d\Sigma^s = \oint \varepsilon N_s n^s\sqrt{|h|}d^3y,$$

где y – координаты на граничной гиперповерхности, $\varepsilon = n_i n^i = \pm 1$, h^{ik} – метрика на гиперповерхности, причем $g^{ik} = h^{ik} + \varepsilon n^i n^k$. Учитывая, что на границе $\delta g^{ik} = \delta g_{ik} = 0$, поэтому $n^s \varepsilon n^i n^k \nabla_s \delta g_{ik} = n^s \varepsilon n^i n^k \partial_s \delta g_{ik} = 0$. Здесь мы использовали тот факт, что частная производная от δg_{ik} принадлежит гиперповерхности и раскладывается по ее базисным векторам e_s, которые ортогональны вектору нормали n^s.

Теперь, учитывая правило поднятия индексов для вариации метрического тензора (1.4), выполняем свертку $N_s n^s$:

$$N_s n^s = n^s \left(f' g_{mq} \nabla s \delta g^{mq} - g_{mq} (\nabla s f') \delta g^{mq}\right) = -f' n^s (\varepsilon n^i n^k + h^{ik}) \nabla s \delta g_{ik} = -f' n^s h^{ik} \nabla s \delta g_{ik}.$$

В итоге имеем:

$$\oint N_s d\Sigma^s = -\oint \varepsilon f' n^s h^{ik} \nabla_s \delta g_{ik} \sqrt{|h|} d^3 y.$$

Воспользовавшись тем фактом, что $\delta g_{ik} = 0$ везде на границе, а значит и её касательные производные должны обращаться в ноль $\nabla_s \delta g_{ik} e^s_\alpha = 0$, мы получаем $\oint M^i d\Sigma_i = 0$. Следовательно $h^{is} \nabla_s \delta g_{ik} = 0$.

Учитывая, что $\delta g^{ik} = 0$ на границе и формулу (1.4), записываем

$$M_i = g_{ik} f' \nabla_l \delta g^{mp} = -g_{ik} f' g^{km} g^{lq} \nabla_l \delta g_{mq} = -\delta^m_i f' g^{lq} \nabla_l \delta g_{mq}.$$

Учитывая, что $h^{lq} \nabla_l \delta g_{mq}$ касательная производная от δg_{mq} обращается в 0, имеем

$$n^i M_i = -f' n^m \left(\varepsilon n^l n^q + h^{lq}\right) \nabla_l \delta g_{mq} = -n^m h^{lq} \nabla_l \delta g_{mq} = 0.$$

Таким образом, показано, что вариация действия Эйнштейна-Гильберта в теории $f(R)$ гравитации приводит к виду

$$\delta S_{EH} = \int d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{ik} \left(-\frac{1}{2} g_{ik} f + f' R_{ik} + g_{ik} \Box f' - \nabla_i \nabla_k f'\right) - \oint \varepsilon f' n^s h^{ik} \nabla_s \delta g_{ik} \sqrt{|h|} d^3 y. \quad (1.13)$$

Как мы видим условия $\delta g^{ik} = 0$ на границе не достаточно, для того, чтобы граничные члены обращались в ноль, следовательно действия Эйнштейна – Гильберта самого по себе не достаточно. Поэтому добавляем граничный член Гиббонса – Йорка – Хоукинга (S_{GYH}), чтобы избавиться от ненужного слагаемого в (1.13). Чтобы записать вариацию S_{GYH}, находим вариацию свёртки второй фундаментальной формы (гауссова кривизна) $K = \nabla_i n^i = n^i_{;i}$.

$$K = n^i_{;i} = g^{ik} n_{i;k} = (\varepsilon n^i n^k + h^{ik}) n_{i;k} = h^{ik} n_{i;k} = h^{ik} \left(n_{i,k} - \Gamma^r_{ik} n_r\right).$$

Теперь варьируем по метрике, учитывая, что на границе $\delta g^{ik} = 0$, имеем

$$\delta K = -h^{ik} \delta \Gamma^r_{ik} n_r = -\frac{1}{2} h^{ik} (\delta g_{il,k} + \delta g_{kl,i} - \delta g_{ik,l}) g^{rl} n_r = \frac{1}{2} h^{ik} \delta g_{ik,l} n^l. \quad (1.14)$$

Граничный член Гиббонса – Йорка – Хоукинга в $f(R)$ гравитации записывается следующим образом:

$$S_{GYH} = 2 \oint d^3 y \varepsilon \sqrt{|h|} f'(R) K.$$

Используя (1.14), записываем его вариацию

$$\delta S_{GYH} = 2 \oint d^3 y \varepsilon \sqrt{|h|} \left(f'' K \delta R + f \delta K\right) = 2 \oint d^3 y \varepsilon \sqrt{|h|} f'' \delta R + \oint d^3 y \varepsilon \sqrt{|h|} f' h^{ik} \delta g_{ik,l} n^l.$$

Как мы видим, второй интеграл “вылечивает” граничный член для действия Эйнштейна – Гильберта: для того, чтобы занулить первый, необходимо будет положить на границе $\delta R = 0$. Таким образом, полагая, что на границе $\delta R = 0$, получаем хорошо известное [1] уравнение гравитационного поля в теории $f(R)$ гравитации:

$$-\frac{1}{2} g_{ik} f + f' R_{ik} + g_{ik} \Box f' - \nabla_i \nabla_k f' = \kappa T_{ik}. \quad (1.15)$$

2. $f(R)$ гравитация с кинетическим скаляром кривизны

Рассматриваем модель $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны, действие которой имеет вид:

$$S_{KinR} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{,j}R^{,j}X(R) + f(R)\right) + S_{matter}. \tag{2.1}$$

Используя принцип наименьшего действия, находим вариацию для (2.1):

$$\delta S = \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{ik}\left[-\frac{1}{2}g_{ik}\left(R_{,j}R^{,j}X(R) + f(R)\right) + X'(R)R_{ik}R_{,j}R^{,j} + f'(R)R_{ik}\right] + I + \delta S_{matter}, \tag{2.2}$$

где

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R_{,j}R^{,j}X'(R)g^{ik}\delta R_{ik} + 2X(R)g^{ij}R_{,j}\nabla_i\delta R + f'(R)g^{ik}\delta R_{ik}\right]. \tag{2.3}$$

Перепишем (2.3) в более удобной для интегрирования форме (далее будем опускать аргументы функций):

$$\begin{aligned} I = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[&\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)\left(g_{mq}\Box\delta g^{mq} - \nabla_i\nabla_l\delta g^{il}\right) \\ &+2Xg^{sj}R_{,j}\nabla_s\left(R_{ik}\delta g^{ik} + g_{mq}\Box\delta g^{mq} - \nabla_i\nabla_l\delta g^{il}\right)\Big]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечаем, что слагаемое $2Xg^{sj}R_{,j}\nabla_s R_{ik}\delta g^{ik}$ в I можно внести в первое слагаемое (2.2), а оставшиеся слагаемые в (2.5) записываем в виде интегралов и интегрируем отдельно каждый. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)g_{mq}\Box\delta g^{mq} = &\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^s M_s \\ &+\int d^4x\sqrt{-g}\Box\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)g_{mq}\delta g^{mq}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} -\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)\nabla_i\nabla_l\delta g^{il} = &-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_i L^i \\ &-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_i\nabla_l\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)\delta g^{il}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} 2\int d^4x\sqrt{-g}Xg^{sj}R_{,j}R_{ik}\nabla_s\delta g^{ik} = 2\Big[&\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^j N_j - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^j X\nabla_j R R_{ik}\delta g^{ik} \\ &-\int d^4x\sqrt{-g}X\Box R R_{ik}\delta g^{ik} - \int d^4x\sqrt{-g}X\nabla_j R\nabla^j R_{ik}\delta g^{ik}\Big], \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 2\int d^4x\sqrt{-g}Xg^{sj}R_{,j}g_{mq}\nabla_s\Box\delta g^{mq} = 2\Big[&\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^j P_j - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^s V_s \\ &-\int d^4x\sqrt{-g}\Box\left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right)g_{mq}\delta g^{mq}\Big], \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} -2\int d^4x\sqrt{-g}Xg^{sj}R_{,j}\nabla_s\nabla_i\nabla_l\delta g^{il} = -2\Big[&\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^j W_j - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_i Z^i \\ &-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_i\nabla_l\left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right)\delta g^{il}\Big], \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$
\begin{aligned}
M_s &= \left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right) g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq} - \nabla_s\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right) g_{mq}\delta g^{mq}, && (2.10)\\
L^i &= \left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)\nabla_l\delta g^{il} - \nabla_l\left(R_{,j}R^{,j}X' + f'\right)\delta g^{il}, && (2.11)\\
N_j &= X\nabla_j R R_{ik}\delta g^{ik}, && (2.12)\\
P_j &= XR_{,j}g_{mq}\Box\delta g^{mq}, && (2.13)\\
V_s &= \left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right) g_{mq}\nabla_s\delta g^{mq} - \nabla_s\left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right) g_{mq}\delta g^{mq}, && (2.14)\\
W_j &= X\nabla_j R\nabla_i\nabla_l\delta g^{il}, && (2.15)\\
Z^i &= \left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right)\nabla_l\delta g^{il} - \nabla_l\left(\nabla^j X\nabla_j R + X\Box R\right)\delta g^{il}. && (2.16)
\end{aligned}
$$

Зануляем граничные члены и записываем полевые уравнения:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}g_{ik}f + R_{ik}f' + D_{ik}f' + \left(-\frac{1}{2}g_{ik}R_{,j}R^{,j} + R_{,k}R_{,i} - 2R_{ik}\Box R\right)X + \left(-R_{,j}R^{,j}R_{ik}\right)X' \\
-2D_{ik}(X\Box R) - D_{ik}\left(R_{,j}R^{,j}X'\right) = \kappa T_{ik}, \quad (2.17)
\end{aligned}
$$

где $D_{ik} = (g_{ik}\Box - \nabla_i\nabla_k)$.

Уравнения (2.17) можно переписать в более удобной форме

$$
A_{ik}X + B_{ik}X' + C_{ik}X'' + F_{ik}X''' - \frac{1}{2}g_{ik}f + f'R_{ik} + D_{ik}f' = \kappa T_{ik}, \quad (2.18)
$$

где

$$
A_{ik} = -\frac{1}{2}g_{ik}R_{,j}R^{,j} + R_{,i}R_{,k} - 2\Box R R_{ik} - 2D_{ik}\Box R, \quad (2.19)
$$

$$
B_{ik} = -R_{ik}R_{,j}R^{,j} - D_{ik}(R_{,j}R^{,j}) - 2\Box R D_{ik}R, \quad (2.20)
$$

$$
C_{ik} = -R_{,j}R^{,j}D_{ik}R - 2\Box R\left(g_{ik}R^{,j}R_{,j} - R_{,i}R_{,k}\right), \quad (2.21)
$$

$$
F_{ik} = -R_{,j}R^{,j}\left(g_{ik}R_{,l}R^{,l} - R_{,i}R_{,k}\right). \quad (2.22)
$$

Очевидно, если принять $X(R) = 0$, то (2.18) переходит в полевые уравнения $f(R)$ гравитации.

Заключение

В первом разделе данной работы мы представили основы теории $f(R)$ гравитации с подробным вывод вариации общего действия модели (1.2) и использовании граничного члена Гиббонса–Йорка–Хоукинга для устранения нежелательных слагаемых от граничных интегралов по гиперповерхности. Такой вывод нам представляется полезным, так как в отечественной литературе при выводе уравнений Эйнштейна в ОТО из вариационного принципа (Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Теоретическая физика» Т.II: Теория поля) используется переход к локальной-геодезической системе координат с последующим переходом от частной производной в ней к ковариантному обобщению на произвольную систему отсчёта. Такая методика является проблематичной для $f(R)$ теории гравитации.

Во втором разделе рассматривается модель $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны (2.1), которая обобщает модель Старобинского-Подольского [5]. В этом случае, зануляются граничные члены, мы записываем полевые уравнения модели в операторном виде. В дальнейшем мы планируем рассмотреть космологические следствия $f(R)$ гравитации с кинетическим скаляром кривизны.

Авторы признательны проф. С.Д. Одинцову за интерес к работе и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology // Physics Reports. 2012. Vol. 513. P. 1–189.
2. Barrow J., Cotsakis S. Inflation and the Conformal Structure of Higher Order Gravity Theories // Phyics Letters B. 1988. Vol. 214. P. 515–518.
3. Nojiri S., Odintsov S.D. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy // Phyics Letters B. 2008. Vol. 659. P. 821–826.
4. Jhingan S., Nojiri S., Odintsov S.D., Sami M., Thongkool I., Zerbini S. Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity // Phyics Letters B. 2008. Vol. 663. P. 424–428.
5. Cuzinatto R.R., de Melo C.A., Medeiros L.G., Pompeia P.J. Cosmic acceleration from second order gauge gravity // Phys. Rev. 2016. Vol. 93. P. 124034.
6. Guarnizo A., Castaneda L., Tejeiro J.M. Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism // General Relativity and Quantum Cosmology. 2010. Vol. 42. P. 2713–2728.
7. Кошелев Н.А., Николаев А.В., Червон С.В. Основы f(R) теории гравитации. Ульяновск: УлГПУ, 2015. 38 с.
8. Poisson E. A Relativist's Tolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics. UK: Cambridge University Press, 2004.

Поступила в редакцию 10.01.2017

Червон Сергей Викторович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра физики и технических дисциплин, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова; гл. научн. сотрудник, заведующий лабораторией гравитации, космологии, астрофизики УНИиИД, почетный профессор-исследователь Научно-исследовательского отдела астрофизики и космологии университета КваЗулу-Натал, ЮАР, 432071, Россия, г. Ульяновск, площадь 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, дом 4.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Николаев Алексей Васильевич, к. ф.-м. н., старший преподаватель, кафедра методик математического и информационно-технологического образования, Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова; научный сотрудник лаборатории гравитации, космологии, астрофизики УНИиИД, 432071, Россия, г. Ульяновск, площадь 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, дом 4.
E-mail: ilc@xhns.org

Майорова Татьяна Игорьевна, аспирант, кафедра физики и технических дисциплин,Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, 432071, Россия, г. Ульяновск, площадь 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, дом 4.
E-mail: majorova.tatyana@mail.ru

S. V. Chervon, A. V. Nikolaev, T. I. Mayorova
On the derivation of field equation of f(R) gravity with kinetic scalar curvature

Keywords: modified theories of gravity, $f(R)$ gravity, variational principle.

PACS: 04.50.Kd

In given work we show details of variation of the $f(R)$ gravity action in the metric formalism; we demonstrate Gibbons – York – Hawking method of a boundary integral removing. We present the derivation of fields equations of $f(R)$ gravity in details. We derive the covariant field equations of $f(R)$ gravity theory with the kinetic scalar curvature term, i.e. the model which based on the action integral: $S=\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{,j}R^{,j}X(R)+f(R)\right)+S_{matter}$.

REFERENCES

1. Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology, *Physics Reports*, 2012, vol. 513, pp. 1–189.
2. Barrow J., Cotsakis S. Inflation and the Conformal Structure of Higher Order Gravity Theories, *Phyics Letters B*, 1988, vol. 214, pp. 515–518.

3. Nojiri S., Odintsov S.D. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy, *Phyics Letters B*, 2008, vol. 659, pp. 821–826.

4. Jhingan S., Nojiri S., Odintsov S.D., Sami M., Thongkool I., Zerbini S. Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity, *Phyics Letters B*, 2008, vol. 663, pp. 424–428.

5. Cuzinatto R.R., de Melo C.A., Medeiros L.G., Pompeia P.J. Cosmic acceleration from second order gauge gravity, *Phys. Rev.*, 2016, vol. 93, pp. 124034.

6. Guarnizo A., Castaneda L., Tejeiro J.M. Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism, *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2010, vol. 42, pp. 2713–2728.

7. Koshelev N.A., Nikolaev A.V., Chervon S.V. *Fundamentals of the f(R) gravity*, Ulyanovsk: UlSPU, 2015, 38 p.

8. Poisson E. *A Relativist's Tolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, UK: Cambridge University Press, 2004.

Received 10.01.2017

Chervon Sergei Viktorovich, D.Sc., Professor, Professor of Physics and Technical Subjects Department, Principal Researcher, head of the research laboratory of gravitation, cosmology, astrophysics UNIiID, Ulyanovsk State Pedagogical University, 100-years V.I. Lenin's Birthday Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russia.
E-mail: chervon.sergey@gmail.com

Nikolaev Aleksei Vasilevich, Ph.D., Lecturer, Department of Methods for Education in Mathematic, Informatics and Technology, Ulyanovsk State Pedagogical University; Researcher of the laboratory of gravitation, cosmology, astrophysics UNIiID, 100-years V.I. Lenin's Birthday Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russia.
E-mail: ilc@xhns.org

Mayorova Tatyana Igorevna, Aspirant, Department of Physical and Technical Subjects, Ulyanovsk State Pedagogical University, 100-years V.I. Lenin's Birthday Square, 4, Ulyanovsk, 432071, Russia.
E-mail: majorova.tatyana@mail.ru