

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ОПТИКА

\*\*\*

УДК 53.049:517.91

*М. Н. Кирсанов*<sup>1</sup>

## АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ РЕОЛОГИЧЕСКОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Приведены задачи о сферическом движении тела под действием различных внешних нагрузок, зависящих от угловых скоростей тела. Исследуется неустойчивость движения тела, проявляющаяся при вырождении связи между приращениями производных функций. Рассмотрены случаи линейного и квадратичного сопротивления, а также задача о вращении тела с жидкостью.

**Ключевые слова:** стабильность, начальная задача, дифференциальное уравнение, нелинейность.

**PACS:** 83.00.00

## 1. Введение

Динамические уравнения сферического движения твердого тела с одной закрепленной точкой, опубликованные Эйлером во втором томе трактата по аналитической механике в 1765 году, широко используются в практической и теоретической механике [1, 2]. Уравнения Эйлера составляют теоретическую основу для задач автоматизации, гироскопии, применяются в геофизике для описания вращения Земли и в машиностроении. Нелинейный характер уравнений Эйлера и необходимая точность решений задач на их основе требуют внимательного отношения не только к решениям этих уравнений, но и к присущим им особенностям, одна из которых исследуется ниже.

## Движение с учетом линейного сопротивления

Дифференциальное уравнение сферического движения тела с тензором инерции

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix},$$

в локальной системе координат, совпадающей с главными осями инерции тела, имеет вид [3]

$$\mathbf{J}\dot{\bar{X}} + \bar{K} = \bar{M} + \mathbf{M}_r\bar{X}, \quad (1)$$

где точкой обозначена производная по времени,  $\bar{X} = [p, q, r]^T$  – вектор проекции угловых скоростей на подвижные оси координат, связанные с телом,  $\bar{K} = [(C - B)qr, (A - C)rp, (B - A)pq]^T$  – нелинейная составляющая уравнения,  $\bar{M}$  – постоянный момент. Матрица коэффициентов вязкого линейного сопротивления в общем случае несимметричная

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

<sup>1</sup>E-mail: c216@ya.ru

С такими предположениями уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= M_1 - a_{11}p - a_{12}q - a_{13}r, \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= M_2 - a_{21}p - a_{22}q - a_{23}r, \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= M_3 - a_{31}p - a_{32}q - a_{33}r. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть в результате некоторого процесса, природа которого не рассматривается, угловые скорости и ускорения за малый промежуток времени получили некоторые малые приращения  $p + \Delta p$ ,  $q + \Delta q$ ,  $r + \Delta r$   $\dot{p} + \Delta\dot{p}$ ,  $\dot{q} + \Delta\dot{q}$ ,  $\dot{r} + \Delta\dot{r}$ . Вариация (2) дает систему дифференциальных уравнений для приращений  $\Delta p$ ,  $\Delta q$ ,  $\Delta r$

$$\begin{aligned} A\Delta\dot{p} + (C - B)(q\Delta r + r\Delta q) + a_{11}\Delta p + a_{12}\Delta q + a_{13}\Delta r &= 0, \\ B\Delta\dot{q} + (A - C)(p\Delta r + r\Delta p) + a_{21}\Delta p + a_{22}\Delta q + a_{23}\Delta r &= 0, \\ C\Delta\dot{r} + (B - A)(q\Delta p + p\Delta q) + a_{31}\Delta p + a_{32}\Delta q + a_{33}\Delta r &= 0. \end{aligned}$$

Исследуя стабильность процесса, поставим для него обобщенную задачу Коши. Принимая приращения ускорений  $\Delta\dot{p}$ ,  $\Delta\dot{q}$ ,  $\Delta\dot{r}$  за некоторые малые заданные величины, получаем, что приращения угловых скоростей можно определить из решения неоднородной системы, сведя таким образом обобщенную задачу Коши для приращений к классической

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + (C - B)r & a_{13} + (C - B)q \\ a_{21} + (A - C)r & a_{22} & a_{23} + (A - C)p \\ a_{31} + (B - A)q & a_{32} + (B - A)p & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A\Delta\dot{p} \\ B\Delta\dot{q} \\ C\Delta\dot{r} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В те моменты времени, когда определитель системы равен нулю, связь приращений угловых скоростей и их производных вырождается. Это означает, что в этот момент малые, или даже как угодно малые, возмущения  $\Delta\dot{p}$ ,  $\Delta\dot{q}$ ,  $\Delta\dot{r}$  вызывают неограниченно большие возмущения угловых скоростей. Такие моменты будем связывать с нестабильностью движения, а соответствующие условия — точками нестабильности первого порядка (в соответствии с порядком задаваемой производной).

Безусловно, особенность подобного рода что-то должна означать для основного невозмущенного процесса. Однако проявляется это не так явно, как в задачах устойчивости, так как здесь требуется возмущение совершенно определенного вида, приложенного в соответствующий момент. Ранее это явление наблюдалось в задачах выпучивания идеальных (без начальных несовершенств) реологических стержней, пластин и оболочек [4–9]. Явление нестабильности используется и в технологических расчетах [10–16].

Равенство нулю определителя дает следующее уравнение

$$\begin{aligned} a_{11}(A - C)(A - B)p^2 + a_{33}(B - C)(A - C)r^2 - a_{22}(B - C)(A - B)q^2 + \\ + 2pqr(B - C)(A - C)(A - B) + a_{11}a_{22}a_{33} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим случай сферического движения симметричного тела,  $A = B$ . Уравнение (4) упрощается

$$(A - C)r^2 + a_{11}a_{22} = 0. \quad (5)$$

Полученное соотношение определяет условие нестабильности. Критическое же время можно получить, если есть интеграл уравнения движения. В случае Ковалевской [3], при котором  $A = B = 2C$ , такой интеграл существует. Третье уравнение (2) при нулевом начальном условии имеет решение

$$r = (M_3/a_{33})(\exp(-2a_{33}t/A) - 1).$$

С учетом этой функции из (5) следует значение времени, при котором наступает критический случай. Введем относительные величины  $M'_3 = M_3/A$ ,  $a'_{ii} = a_{ii}/A$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

$$t = -\frac{1}{2a'_{33}} \ln \left( 1 - 2a'_{33} \sqrt{-a'_{11}a'_{22}/M'_3} \right).$$

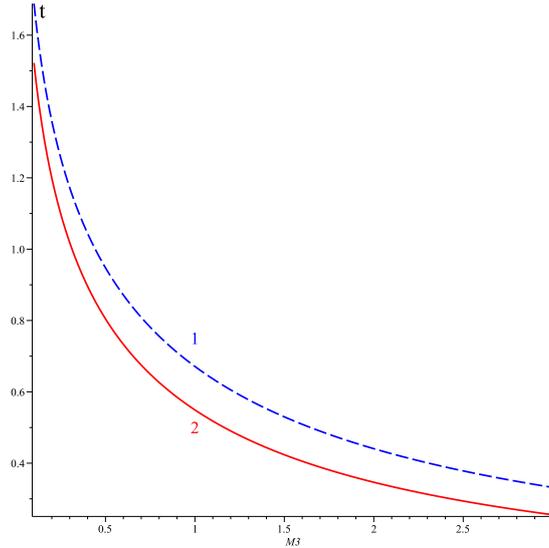


Рис. 1. Зависимость критического времени от постоянного момента. 1 —  $a'_{11} = -2$ ; 2 —  $a'_{11} = -1$

На рисунке (Рис. 1) представлены кривые этой зависимости, построенные при  $a'_{22} = 1, a'_{33} = -1$ . Разные знаки коэффициентов вязкости, взятые здесь для примера, означают, что по одной оси внешние моменты раскручивают тело и растут с увеличением угловой скорости, а по другой — уменьшаются. Очевидно, в других случаях решения для критического времени неустойчивости в такой задаче нет.

С увеличением момента  $M_3$  критическое время падает, в пределе  $t = \lim_{M_3 \rightarrow \infty} = 0$ . Это соответствует смыслу задачи — неустойчивость при больших моментах проявляется в первые секунды движения.

## 2. Нелинейное сопротивление

Учитывая квадратичный характер нелинейного сопротивления, проявляющегося в большом диапазоне скоростей, добавим в правую часть (1) слагаемое  $\mathbf{M}_n \bar{Y}$  и запишем уравнения движения в виде

$$\mathbf{J} \dot{\bar{X}} + \bar{K} = \bar{M} + \mathbf{M}_r \bar{X} + \mathbf{M}_n \bar{Y},$$

где  $\bar{Y} = [p^2, q^2, r^2]^T$ ,

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица системы уравнений, аналогичной (3), примет в этом случае вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} + 2b_{11}p & a_{12} + (C - B)r + 2b_{12}q & a_{13} + (C - B)q + 2b_{13}r \\ a_{21} + (A - C)r + 2b_{12}p & a_{22} + 2b_{22}q & a_{23} + (A - C)p + 2b_{23}r \\ a_{31} + (B - A)q + 2b_{13}p & a_{32} + (B - A)p + 2b_{23}q & a_{33} + 2b_{33}r \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Условие неустойчивости, следующее из равенства нулю определителя этой матрицы, в случае диагональных матриц сопротивления  $\mathbf{M}_r$  и  $\mathbf{M}_n$  при  $b_{ii} = \mu, i=1,2,3$ , имеет простой вид

$$(2p\mu + a_{11})(2q\mu + a_{22})(2r\mu + a_{33}) = 0. \quad (7)$$

Очевидно, в отсутствии нелинейного сопротивления ( $\mu = 0$ ) неустойчивость при такой постановке задачи не проявляется.

### Сферическое движение твердого тела с жидкостью

Рассмотрим свободное движение твердого тела с жидкостью относительно центра масс. Уравнения движения имеют вид [17]

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr &= hp(C(A - C)(A + C - B)r^2 + B(A - B)(A + B - C)q^2), \\ B\dot{q} + (A - C)rp &= hq(A(B - A)(B + A - C)p^2 + C(B - C)(B + C - A)r^2), \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= hr(B(C - B)(C + B - A)q^2 + A(C - A)(C + A - B)p^2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $h = \rho P / (\nu ABC)$  – коэффициент, зависящий от геометрии ( $P, A, B, C$ ) и реологических свойств материала тела  $\nu$ .

Вариация (8) дает систему дифференциальных уравнений для приращений  $\Delta p, \Delta q, \Delta r$

$$\begin{aligned} A\Delta\dot{p} + c_{11}\Delta p + c_{12}\Delta q + c_{13}\Delta r &= 0, \\ B\Delta\dot{q} + c_{21}\Delta p + c_{22}\Delta q + c_{23}\Delta r &= 0, \\ C\Delta\dot{r} + c_{31}\Delta p + c_{32}\Delta q + c_{33}\Delta r &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где переменные коэффициенты, зависящие от угловых скоростей основного невозмущенного процесса, обозначены как  $c_{ij} = c_{ij}(p, q, r)$ . Анализируя стабильность процесса по отношению к возмущениям производных первого порядка [18–20], поставим для системы (8)–(9) обобщенную задачу Коши. Зададим в начальных условиях значения производных  $\Delta\dot{p}, \Delta\dot{q}, \Delta\dot{r}$ . Для того, чтобы вычислить соответствующие значения функций и свести обобщенную задачу к классической, придется выразить величины  $\Delta p, \Delta q, \Delta r$  через их скорости, решив систему (9) как линейную алгебраическую. В тех случаях, когда определитель системы (9) обращается в ноль, появляются особые точки обобщенной задачи Коши [21, 22].

Для симметричного тела положим  $A = B$ . После некоторых преобразований определитель матрицы системы примет вид  $(C - B)k$ , где  $k$  – положительная величина, зависящая от угловых скоростей. Таким образом, нестабильность такого рода может возникнуть только при  $C = B$  при любых угловых скоростях и параметрах  $P$  и  $\nu$ .

Аналогично, можно поставить задачу о точке нестабильности второго порядка. Для этого продифференцируем систему уравнений (9) по времени

$$\begin{aligned} A\Delta\ddot{p} + f_{11}\Delta\dot{p} + f_{12}\Delta\dot{q} + f_{13}\Delta\dot{r} + g_{11}\Delta p + g_{12}\Delta q + g_{13}\Delta r &= 0, \\ B\Delta\ddot{q} + f_{21}\Delta\dot{p} + f_{22}\Delta\dot{q} + f_{23}\Delta\dot{r} + g_{21}\Delta p + g_{22}\Delta q + g_{23}\Delta r &= 0, \\ C\Delta\ddot{r} + f_{31}\Delta\dot{p} + f_{32}\Delta\dot{q} + f_{33}\Delta\dot{r} + g_{31}\Delta p + g_{32}\Delta q + g_{33}\Delta r &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где введены обозначения для коэффициентов  $f_{ij} = f_{ij}(p, q, r)$ ,  $g_{ij} = g_{ij}(p, q, r)$ , громоздкие выражения для которых получены в системе символьных преобразований Maple и здесь не приводятся.

Запишем систему (9)–(10) в матричном виде, отнеся в правую часть заданные ускорения

$$\mathbf{H}\bar{X} = \bar{U}.$$

Здесь  $\bar{X} = \{\Delta p, \Delta q, \Delta r, \Delta\dot{p}, \Delta\dot{q}, \Delta\dot{r}\}^T$ ,  $\bar{U} = \{0, 0, 0, A\Delta\ddot{p}, B\Delta\ddot{q}, C\Delta\ddot{r}\}^T$ . Приравняв определитель матрицы  $\mathbf{H}$  к нулю, получим условие возникновения нестабильной точки 2-го порядка. Перейдем к эйлеровым углам

$$Ap = L_0 \sin \theta \sin \varphi, \quad Bq = K \sin \theta \cos \varphi, \quad Cr = L_0 \cos \theta,$$

где  $\varphi$  — угол чистого вращения,  $\theta$  — угол нутации,  $L_0$  — модуль вектора кинетического момента относительно закрепленной точки. Для  $x = \cos^2 \theta$  получим уравнение для критического угла нутации

$$45x^4 + 3(7b^2 - 25)x^3 + 3(3b^4 + b^2 + 20)x^2 - (7b^4 + 11b^2 + 20)x - b^2 = 0, \quad (11)$$

где  $b = 1/(hL_0C)$ .

### 3. Заключение

Стабильность движения или состояния анализируют в тех случаях, когда известные критические состояния, например, потеря устойчивости, выпучивание, разрушение, резонанс и тому подобное в системе не обнаруживаются, но при этом на практике отмечаются некие «странные», необъяснимые на первый взгляд, отклонения системы от теоретически предсказуемого поведения. Анализ неустойчивости — достаточно тонкий и еще до конца не исследованный подход к описанию механических систем. Если математический алгоритм вполне очевиден и сводится к вариации уравнений движения или состояния, выделению задаваемых величин возмущений и приравниванию нулю определителя, то физический смысл явления еще скрыт в полной мере. Определенной надеждой на прорыв в этом направлении является возможность исследования послекритического поведения системы. Для этого предполагается отказаться от линеаризации возмущенного процесса, включив в уравнения как минимум квадраты приращений. Экспериментальные же данные, подтверждающие факт существования неустойчивости, получены на примере нахождения условия выпучивания стержней, пластин и оболочек при ползучести [6]. Явление неустойчивости, изученное здесь для процессов, протекающих во времени, может наблюдаться и в нелинейных задачах с функциями, зависящими только от координат, например, в задаче о распределении напряжений упругого тела [23].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bogoyavlenskii O.I. New integrable cases of euler's equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1985. Vol. 49. № 1. P. 6–10.
2. Panayotounakos D.E., Rizou I., Theotokoglou E. A new mathematical construction of the general nonlinear ODEs of motion in rigid body dynamics (Euler's equations) // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 217. № 21. P. 8534–8542.
3. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Издательство МГУ, 2000. 720 с.
4. Зубчанинов В. Г. Устойчивости и пластичность. Т.1. Устойчивость. М.: Физматлит, 2007. 448 с.
5. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column // Int. J. Eng. Sci. 1997. Vol. 5. № 3. P. 221–227.
6. Кирсанов М.Н. Стабильность элементов конструкций в условии ползучести. Часть I. Стержни: учебное пособие. М.: ИНФРА-М., 2015. 184 с.
7. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Издательство МГУ, 1986. 224 с.
8. Куршин Л. М. Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 125–160.
9. Vinet A., Gamby D. Prediction of long-term mechanical behaviour of fibre composites from the observation of micro-buckling appearing during creep compression tests // Science and Technology. 2008. Vol. 68. № 2. P. 526–536.
10. Сафронов В.М., Кирсанов М.Н. Оценка возможности заклинивания поршня в пневмоприводах // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2006. № 10. С. 37–40.
11. Ивахненко А.Г., Куц В.В., Еренков О.Ю., Олейник А.В., Сариллов М.Ю. Методология структурно-параметрического синтеза металлорежущих систем. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2015. 282 с.
12. Еренков О.Ю., Куц В.В., Сариллов М.Ю. Токарная обработка полимерных композиционных материалов. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2016. 278 с.
13. Ивахненко А.Г., Куц В.В. Структурно-параметрический синтез технологических систем. Курск: Курский государственный технический университет, 2010. 153 с.
14. Еренков О.Ю. Комбинированные способы токарной обработки полимерных композиционных материалов. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2015. 228 с.
15. Ивахненко А.Г. Стабильность динамических систем // Инновации, качество и сервис в технике и технологиях: материалы I Международной научно-практической конференции: в 2 частях. Курский государственный технический университет. Курск, 2009. С. 101–105.
16. Еренков, О.Ю., Ивахненко А.Г., Ивахненко Е.О. Стабильность технологической системы при точении полимерных материалов // Известия ОрёлГТУ. Серия «Фундаментальные проблемы техники и технологии». 2008. № 3-7/271(546). С. 14–23.

17. Черноушко Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 232 с.
18. Бойко О.О. Анализ стабильности нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6–2 (19). С. 202–204.
19. Евстигнеев Д.Е. Исследование стабильности и решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения в системе Maple // Научный альманах. 2016. № 6–2 (19). С. 218–220.
20. Тихонюк О.А. Введение в теорию неустойчивости на примере особых точек начальной задачи процесса деформирования сжатых стержней в условии ползучести // Журнал технических исследований. 2015. Т. 1. № 2. С. 3.
21. Кирсанов М. Н. Определение, свойства и приложения одного нелинейного дифференциального оператора // Вестник ТГГПУ. 2010. № 4(22). С. 43–48.
22. Kirsanov M.N. The analysis of the degenerate case of oscillations of a mechanical system // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. Vol. 39. P. 4545–4548.
23. Кирсанов М.Н. Неустойчивость распределения напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 3 (319). С. 166–169.

Поступила в редакцию 26.05.2017

**Кирсанов Михаил Николаевич**, д. ф.-м. н., профессор, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национального исследовательского университета “МЭИ”, 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14.  
E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Кирсанов М. Н. Анализ стабильности сферического движения при сложном реологическом сопротивлении // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 2. С. 53–59.

**M. N. Kirsanov**

**The analysis of the stability of motion of a point under the action of tracking force with delay**

*Keywords:* stability, initial value problem, differential equation, nonlinearity.

PACS: 83.00.00

The formulation and physical meaning of the problems in the theory of stability is discussed. Given the examples of nonlinear physical problems of different nature, partial differential equations of which admit the degeneration of the relationship between derivatives of functions, leading to instability.

**REFERENCES**

1. Bogoyavlenskii O.I. New integrable cases of Euler’s equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, vol. 49. no. 1, pp. 6–10.
2. Panayotounakos D.E., Rizou I., Theotokoglou E. A new mathematical construction of the general nonlinear ODEs of motion in rigid body dynamics (Euler’s equations), *Applied Mathematics and Computation*, 2011, vol. 217, no. 21, pp. 8534–8542.
3. Golubev Y. F. *Osnovy teoreticheskoy mekhaniki* (Basics of theoretical mechanics), Moscow: Izdatelstvo MGU, 2000, 720 p.
4. Zubchaninov V.G. *Ustojchivosti i plastichnost’. T.1. Ustojchivost’* (Stability and plasticity. Vol. 1. Stability), Moscow: Fizmatlit, 2007, 448 p.
5. Kirsanov M.N. Singular points of the creep deformation and buckling of a column, *Int. J. Eng. Sci.*, 1997, vol. 5, no. 3, pp. 221–227.
6. Kirsanov M.N. *Stabil’nost’ elementovkonstrukcij vuslovii polzuchesti.Chast’ 1. Sterzhni* (The constancy of structural elements in creep condition. Part 1. Rods: a tutorial), Moscow: INFRA-M, 2015, 184 p.

7. Klyushnikov V.D., *Lekcii po ustojchivosti deformiruemym sistem* (Lectures on stability of deformable systems), Moscow: Izdatelstvo MGU, 1986, 224 p.
8. Kurshin L. M. Stability during creep, *Izvestiya MTT*, 1978, no. 3, pp. 125–160.
9. Vinet A., Gamby D. Prediction of long-term mechanical behaviour of fibre composites from the observation of micro-buckling appearing during creep compression tests, *Science and Technology*, 2008, vol. 68, no. 2, pp. 526–536.
10. Safronov V.M., Kirsanov M.N. Evaluation of the possibility of jamming of the piston in the pneumatic actuators, *Devices and systems. Management, control, diagnostics*, 2006, no. 10, pp. 37–40.
11. Ivakhnenko A.G., Kuts V.V., Erenkov O.Yu., Oleynik A.V., Surilov M.Yu. *Metodologiya strukturno-parametricheskogo sinteza metallovezhushchih sistem* (Methodology of structural and parametric synthesis of metal-cutting systems), Komsomolsk-on-Amur: Komsomol'skij-na-Amure gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2015, 282 p.
12. Erenkov O.Yu., Kuts V.V., Kurilov M.Y. *Tokarnaya obrabotka polimernyh kompozicionnyh materialov* (The turning of composite materials), Komsomolsk-on-Amur: Komsomol'skij-na-Amure gosudarstvennyj tekhnicheskij universitet, 2016, 278 p.
13. Ivakhnenko A.G., Kuts V.V. *Strukturno-parametricheskij sintez tekhnologicheskikh sistem* (Structural-parametric synthesis of technological systems), Kursk: Kursk state technical university, 2010, 153 p.
14. Erenkov O.Y. *Kombinirovannye sposoby tokarnoj obrabotki polimernyh kompozicionnyh materialov* (Combined forms turning of composite materials), Khabarovsk: Pacific state university, 2015, 228 p.
15. Ivakhnenko A.G. Stability of dynamical systems, *Innovation, quality and service in engineering and technology: materials of the 1 International scientific-practical conference: in 2 parts*, Kursk state technical university, Kursk, 2009, pp. 101–105.
16. Erenkov O.Yu., Ivakhnenko A.G., Ivakhnenko E.O. The stability of a technological system in turning polymeric materials, *Izvestiya OryolGTU. Seriya "Fundamental'nye problemy tekhniki i tekhnologii"*, 2008, no. 3-7/271 (546), pp. 14–23.
17. Chernous'ko F.L. *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, sodержashchimi vyzkuyu zhidkost* (The motion of a rigid body with cavities containing viscous liquid), Moscow: VC AN USSR, 1968, 232 p.
18. Boiko O.O. The Analysis of the stability of nonlinear ordinary differential equations of second order in system Maple, *Science Almanac*, 2016, no. 6–2 (19), pp. 202–204.
19. Evstigneev D.E. *Study of the stability and the solution of the nonlinear ordinary differential equation in system Maple*, Science Almanac, 2016, no. 6–2 (19), pp. 218–220.
20. Tihonyuk O.A. Introduction to the theory of instability on the example of the singular points of the initial problem, the deformation of compressed rods with the creep, *Journal of technical research*, 2015, vol. 1, no. 2, p. 3.
21. Kirsanov M.N. Definition, properties and applications of a nonlinear differential operator, *Vestnik TGGPU*, 2010, no. 4 (22), pp. 43–48.
22. Kirsanov M.N. The analysis of the degenerate case of oscillations of a mechanical system, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, pp. 4545–4548.
23. Kirsanov M.N. The instability of the stress distribution in the plane problem of theory of elasticity of inhomogeneous bodies, *Journal of applied mechanics and technical physics*, 2013, vol. 54, no. 3 (319), pp. 166–169.

Received 26.05.2017

**Kirsanov Mikhail Nikolaevich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, National research University "MPEI", ul. Krasnokazarmennaya, 14, Moscow, 111250, Russia.

E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

**Please cite this article in English as:**

Kirsanov M. N. The analysis of the stability of motion of a point under the action of tracking force with delay, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 2, pp. 53–59.