

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

\*\*\*

УДК 519.652, 515.164.85

Н. В. Осадченко<sup>1</sup>

## ЛОКАЛЬНАЯ МОНОТОННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В настоящей работе обсуждается использование однопараметрических групп диффеоморфизмов единичного отрезка  $[0, 1]$  для построения сплайн-интерполянтов, сохраняющих монотонность исходных данных. Задачи, где нарушение монотонности исходных данных неприемлемо, возникают во многих прикладных областях сплайн-интерполяции.

Показано, что предложенный выбор локальных эрмитовых интерполянтов в виде суперпозиций диффеоморфизмов, принадлежащих определенным однопараметрическим группам, гарантирует сохранение формы для строго монотонных данных. Для выбора подходящих групп и изучения их свойств удобно задавать их элементы неявно, используя в качестве отправной точки соответствующее уравнение Шредера или инфинитезимальный оператор группы. Эффективность предлагаемого подхода проверена в ряде вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** монотонная интерполяция, сплайны, однопараметрические группы, уравнение Шредера, мультипликативная производная.

**PACS:** 02.60.Ed

## 1. Введение

В статье обсуждается использование однопараметрических групп диффеоморфизмов отрезка  $[0, 1]$  в тех задачах одномерной интерполяции, в которых требуется обеспечить сохранение монотонности исходных данных.

Предположим, что на отрезке  $[a, b]$  числовой прямой  $\mathbb{R}$  задана *сетка* — набор  $\Delta$  из конечного числа точек (*узлов*)  $X_i$  вида  $a = X_0 < X_1 < \dots < X_n = b$ ; тем самым указанный отрезок разбивается на  $n$  отрезков разбиения  $[X_i, X_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$  [1, с. 390, 485]. На этом отрезке ставится задача *интерполяции*: для функции  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , значения которой  $Y_i = f(X_i)$  в узлах сетки известны, нужно найти *интерполянт* — функцию  $F$  из наперед заданного семейства, определяемого конечным числом параметров, которая принимает в узлах сетки те же значения [1, с. 347–350].

Широчайшее применение в практике интерполяции получило использование в качестве интерполянтов *сплайн-функций*. Это — функции, сужения которых на каждый отрезок разбиения (*звенья*) представляют собой функции одинакового строения (различающиеся лишь значениями параметров), причем во внутренних узлах сетки должны выполняться условия непрерывности низших производных сплайн-функции  $F$ , налагающие ограничения на выбор параметров звеньев [2, с. 8, 20–21]. В частном случае полиномиальных сплайнов степени  $m$  каждое звено есть алгебраический многочлен степени  $m$  (то есть определяется  $m+1$  параметром); если при этом  $F \in C^{m-r}[a, b]$ , где число  $r$  называют *дефектом* сплайна, то такие сплайны образуют векторное пространство  $\mathbb{P}_{m,r}^\Delta$  размерности  $m+1+r(n-1)$  [2, с. 20–21]; [3, с. 81–82].

Например, для кубических сплайнов дефекта 1  $i$ -е звено сплайна зависит от 4 параметров и имеет вид

$$F_i(x) = a_i + b_i(x - X_i) + c_i(x - X_i)^2 + d_i(x - X_i)^3; \quad (1)$$

<sup>1</sup>E-mail: osadchenkonv@mail.ru

размерность пространства  $\mathbb{P}_{3,1}^{\Delta}$  равна  $n + 3$ . Условия интерполяции функции  $f$  дают  $n + 1$  условие на коэффициенты искомого сплайна, а задание еще двух *граничных условий*, налагаемых на сплайн в точках  $a$  и  $b$ , позволяет однозначно найти искомым интерполянт (при этом, в частности,  $a_i = Y_i$ ). Процедура его получения хорошо известна, причем интерполяция здесь является нелокальной: значения коэффициентов сплайна зависят от всех значений  $Y_i$  [1, с. 392–393]; [2, с. 30–32].

## 2. Задачи изогеометрической интерполяции

Предположим, однако, что об интерполируемой функции имеется априорная информация (положительность, монотонность, выпуклость и другое), и требуется, чтобы интерполянт также обладал соответствующими свойствами. Задачи такого рода называют задачами изогеометрической интерполяции [4, с. 8] или интерполяции, сохраняющей форму [5]. Кубические сплайны дефекта 1 обеспечивают сохранение формы далеко не всегда [4, с. 141].

В частности, предметом настоящей работы является *строго монотонная* интерполяция, при которой интерполируемая функция  $f$  либо строго возрастает на отрезке  $[a, b]$ , либо строго убывает:

$$\forall i \ Y_{i+1} > Y_i \quad \text{либо} \quad \forall i \ Y_{i+1} < Y_i, \quad (2)$$

и надо обеспечить строгую монотонность интерполянта  $F$ .

Задачи с монотонными исходными данными возникают во многих прикладных областях: в сопротивлении материалов (при построении диаграмм деформирования), в измерительной технике (спецификации сенсоров, цифро-аналоговых и аналого-цифровых преобразователей), в финансовой математике (модели ценообразования опционов), в фармакологии и медицинской диагностике (при построении кривых «доза — эффект» и кривых скорости оседания эритроцитов) и других [5].

Первым к решению задач интерполяции с сохранением формы обратился Д. Швейкерт, который в 1966 году в статье [6] предложил для ее решения экспоненциальные сплайны с натяжением [3, с. 230]; [4, с. 170]. К. Де Бором был предложен альтернативный подход, в котором использовались обычные кубические сплайны дефекта 1, но к сетке добавлялись новые узлы, выбираемые специальным образом [3, с. 231–235]. В ряде работ применялись рациональные кубические сплайны, звенья которых — рациональные дроби с кубическим многочленом в числителе и многочленом 1-й [7] или 2-й [8] степени в знаменателе. Во всех перечисленных работах интерполянты принадлежали классу  $C^2$  и не были локальными.

В 1980 году Ф. Фрич и Р. Карлсон в статье [9] предложили локальную монотонную интерполяцию класса  $C^1$  кубическими сплайнами дефекта 2 и нашли те условия, при которых предложенный интерполянт действительно будет монотонным (данный алгоритм в 1984 году был существенно упрощен [10]). Размерность пространства  $\mathbb{P}_{3,2}^{\Delta}$  равна  $2n + 2$ , а звенья по-прежнему имеют вид (1) и зависят от 4 параметров; обычно такие сплайны используют для локальной эрмитовой интерполяции (когда в узлах заданы также значения  $Y_i' = f'(X_i)$ , а значения первой производной интерполянта в узлах, называемые *наклонами* сплайна, должны быть такими же:  $b_i = Y_i'$ ) [1, с. 391–392]; [2, с. 25–26]. Коэффициенты  $c_i$  и  $d_i$  в представлении (1) вычисляются так:

$$h = X_{i+1} - X_i, \quad D = \frac{a_{i+1} - a_i}{h}, \quad N = b_{i+1} - 2D + b_i, \quad c_i = \frac{D - b_i - N}{h}, \quad d_i = \frac{N}{h^2}.$$

Но Фрич и Карлсон отказались от требования интерполирования первой производной, и в их алгоритме  $b_i$  — свободные параметры, подбором которых можно во многих случаях добиться монотонности интерполянта.

Предложенный Фричем и Карлсоном подход был развит в ряде позднейших исследований, и его современный вариант известен как интерполяция весовыми кубическими сплайнами [11]. Были найдены необходимые и достаточные условия сохранения такими сплайнами монотонности исходных данных [4, с. 141]. Изучалась также изогеометрическая локальная интерполяция рациональными кубическими сплайнами; в данном случае удается сохранить эрмитов характер интерполяции и обеспечить монотонность интерполянта уже для произвольных монотонных исходных данных, но возникает достаточно сложная проблема управления дополнительными свободными параметрами, характерными для такой

интерполяции [12, 13]. Упомянем также монотонную интерполяцию рациональными тригонометрическими сплайнами (в ней каждое звено — это дробь, числитель и знаменатель которой — тригонометрические многочлены) [14].

На наш взгляд, проблемы, возникающими при монотонной интерполяции кубическими сплайнами, во многом вызваны тем, что на каждом отрезке разбиения звенья интерполянтов вида (1) образуют векторное пространство, но линейная комбинация монотонных функций из этого пространства не обязана быть монотонной функцией. Следовательно, используемая математическая структура не адекватна постановке задачи.

### 3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов

Представим, однако,  $i$ -е звено искомого монотонного интерполянта  $F$  в виде

$$F_i(x) = Y_i + (Y_{i+1} - Y_i) \tilde{F}_i(u), \quad (3)$$

где функция  $v = \tilde{F}_i(u)$  — строго возрастающая функция, отображающая отрезок  $\mathcal{J} \equiv [0, 1]$  на себя и являющаяся при этом сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом данного отрезка заданной степени гладкости  $r$ .

Такие диффеоморфизмы образуют бесконечномерную группу  $\text{Diff}_+^r(\mathcal{J})$  [15]; роль групповой операции выполняет суперпозиция функций.

В задаче эрмитовой интерполяции условия интерполирования значений самой функции  $f$  в узлах сетки и монотонности интерполянта  $F$  при этом удовлетворяются автоматически. Задача сводится к построению на каждом отрезке разбиения диффеоморфизма  $\tilde{F}_i$ , удовлетворяющего условиям  $\tilde{F}_i'(0) = Y_i'/\Delta_i$ ,  $\tilde{F}_i'(1) = Y_{i+1}'/\Delta_i$ , где  $\Delta_i = (Y_{i+1}' - Y_i')/(X_{i+1} - X_i)$ ; если это будет сделано, интерполянт будет принадлежать классу  $C^1$ .

Начиная с этого момента, можно забыть о других отрезках разбиения и решать задачу построения локального интерполянта — такого диффеоморфизма отрезка  $\mathcal{J}$ , первая производная которого принимает на концах этого отрезка заданные положительные значения  $p$  и  $q$ . Далее мы будем использовать букву  $F$  уже для обозначения искомого локального интерполянта, а вместо  $u$  и  $v$  писать  $x$  и  $y$ .

В группе  $\text{Diff}_+^r(\mathcal{J})$  можно выделить различные одномерные (*однопараметрические*) подгруппы. Каждую из них можно трактовать как образ гладкого гомоморфизма  $\Phi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \text{Diff}_+^r(\mathcal{J})$  мультипликативной группы положительных действительных чисел в группу  $\text{Diff}_+^r(\mathcal{J})$ , сопоставляющего положительному числу  $k$  функцию  $F_k$  так, что

$$F_{kk'} = F_k \circ F_{k'} \equiv F_{k'} \circ F_k, \quad F_1 = \text{id}, \quad F_{1/k} = F_k^{-1} \quad (4)$$

(здесь  $\text{id}$  — тождественное отображение отрезка  $\mathcal{J}$  на себя, то есть функция  $y = x$ , а  $F_k^{-1}$  — функция, обратная к  $F_k$ :  $F_k^{-1} \circ F_k = \text{id}$ ). Как будет видно из дальнейшего, нам удобнее будет работать с таким — мультипликативным — параметром (хотя в теории однопараметрических групп обычно пользуются аддитивным параметром  $\tau \equiv \ln k$  [16, с. 148–149]).

### 4. Уравнение Шредера

Различные однопараметрические группы диффеоморфизмов отрезка  $\mathcal{J}$  удобно задавать при помощи *уравнения Шредера*. Данное функциональное уравнение, впервые рассмотренное Э. Шредером в 1870 году в статье [17], имеет вид

$$\Psi(y) = k \Psi(x), \quad (5)$$

где  $\Psi$  — вспомогательная функция (*функция Шредера*). Элементы однопараметрической группы получаются как решения уравнения (5):  $y \equiv F_k(x) = \Psi^{-1}(k\Psi(x))$  [18, 19].

Заметим, что нули и полюсы функции Шредера соответствуют неподвижным точкам диффеоморфизмов  $F_k$ . Решения уравнения Шредера остаются теми же, если обе его части умножить на ненулевой

множитель, возвести в степень с действительным показателем, не равным нулю, или заменить их модулями (что изменит, вообще говоря, значение  $k$ ). Потребуем сейчас от функции  $\Psi$ , чтобы она имела точку  $x = 0$  своим нулем (причем  $\Psi'(0) = 1$ ), при  $x > 0$  нули и полюсы чередовались, причем точка  $x = 1$  попадала в их число, а между соседними нулем и полюсом функция  $\Psi$  изменялась монотонно. Эти требования налагают на уравнение Шредера условие нормировки и позволяют интерпретировать параметр  $k$  как значение производной функции  $F_k$  при  $x = 0$ .

Считая в соотношении  $y = F_k(x)$  правую часть функцией двух переменных ( $x$  и  $k$ ), рассмотрим ее мультипликативную производную по  $k$  (данное понятие известно из теории матриц [20, с. 408], а в нашем случае это — частная производная от  $y$  по  $k$ , за аргумент которой вместо  $x$  принята переменная  $y$ ):

$$\frac{Dy}{dk} = \frac{\partial y}{\partial k} \circ F_k^{-1}. \quad (6)$$

Для ее вычисления разрешим уравнение Шредера (5) относительно  $k$ :

$$k = \Psi(y)/\Psi(x) \equiv |\Psi(y)|/|\Psi(x)|$$

(вставка знаков модуля законна, так как у  $\Psi(x)$  и  $\Psi(y)$  знаки одинаковы), после чего возьмем логарифм от обеих частей равенства и продифференцируем полученное соотношение по  $k$ :

$$\frac{1}{k} = (\ln |\Psi(y)|)' \frac{\partial y}{\partial k},$$

откуда

$$\frac{Dy}{dk} = \frac{M(y)}{k}, \quad (7)$$

где функция  $M(y) = 1/(\ln |\Psi(y)|)'$  от  $k$  уже не зависит; ее можно трактовать как значение мультипликативной производной в единице группы  $\mathbb{R}_+^*$ , то есть при  $k = 1$ .

Если теперь, считая  $k$  мало отличающимся от 1, разложить  $F_k(x)$  по степеням параметра  $\tau \equiv \ln k$ , то коэффициент при первой степени  $\tau$  будет равен значению при  $\tau = 0$  производной

$$\frac{\partial F_k(x)}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial k} \frac{dk}{d\tau} \equiv \frac{\partial y}{\partial k} \cdot k;$$

приняв за аргумент переменную  $y$ , получаем, что данный коэффициент совпадает с  $M(y)$  (впрочем, при  $\tau = 0$   $y \equiv x$ ).

Отметим, что произведение данного коэффициента на оператор частной производной представляет собой инфинитезимальный оператор  $U$  однопараметрической группы [16, с. 143–144]. Таким образом,

$$U = M(x) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (8)$$

## 5. Случай дробно-линейной интерполяции

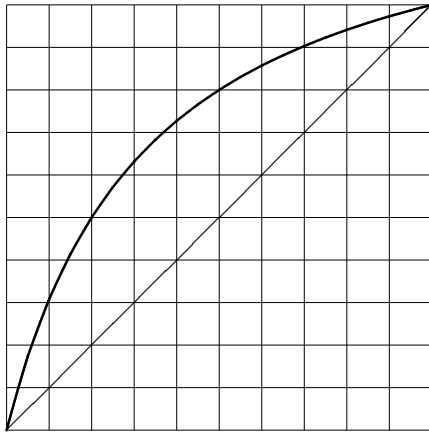
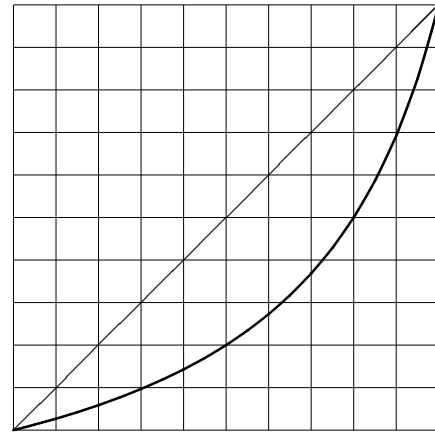
Переходим к рассмотрению частных случаев интерполяции диффеоморфизмами. Начнем с простейшего примера функции Шредера, соответствующей наложенным выше требованиям (в теории динамических систем данный пример хорошо известен [19]):

$$\Psi(x) = \frac{x}{1-x}, \quad \Psi^{-1}(z) = \frac{z}{1+z} \quad (9)$$

(здесь и далее  $z = \Psi(y) \equiv \beta \Psi(x)$ , параметр группы в данном частном примере мы обозначаем  $\beta$ , а не  $k$ ). Решение уравнения Шредера  $\Psi(y) = \beta \Psi(x)$  имеет вид

$$y \equiv F_\beta = \frac{\beta x}{1 + \beta x - x}. \quad (10)$$

Дробно-линейные функции вида (10) находят применение не только в задачах интерполяции (например, в [21, с. 33–34] при помощи таких функций задавался закон движения рабочей точки роботаманипулятора). При  $\beta \neq 1$  график такой функции на отрезке  $\mathcal{J}$  — дуга равнобочной гиперболы с асимптотами, параллельными координатным осям (Рис. 1,2).

Рис. 1. Функция (10),  $\beta = 4$ Рис. 2. Функция (10),  $\beta = 1/4$ 

Вычисление инфинитезимального оператора однопараметрической группы диффеоморфизмов вида (10) (которую обозначим  $\mathcal{G}^a$ ) дает:

$$U \equiv M(x) \frac{\partial}{\partial x} = x(1-x) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что диффеоморфизмы из группы  $\mathcal{G}^a$  не имеют на отрезке  $\mathcal{J}$  неподвижных точек, кроме 0 и 1. Первая производная функции  $F_\beta$  по  $x$  имеет вид

$$F'_\beta = \frac{\beta}{(1+\beta x-x)^2}; \quad (12)$$

на отрезке  $\mathcal{J}$  она при  $\beta \neq 1$  изменяется монотонно, принимая на его концах значения  $\beta$  и  $1/\beta$ .

Таким образом, функции вида (10) могут служить для эрмитовой интерполяции на отрезке  $\mathcal{J}$  при условиях  $p=\beta$  и  $q=1/\beta$ .

Отметим одно важное свойство локальных интерполянтов, являющихся элементами однопараметрической группы диффеоморфизмов. Если выполнить *обратную интерполяцию* (построить интерполянт для функции, обратной к задаваемой [1, с. 422]), а затем обратить полученный интерполянт, то — в силу последней из формул (4) — результат совпадет с интерполянтом, полученным непосредственно. Данное свойство будем называть *инверсной инвариантностью* процедуры интерполяции.

Логичность использования функций вида (10) в качестве локальных эрмитовых интерполянтов подкрепляется следующими соображениями. Известно, что на множестве заданных на отрезке  $[X_i, X_{i+1}]$  функций  $y = g(x)$  класса  $C^4$ , удовлетворяющих на концах отрезка условиям

$$g(X_i) = Y_i, \quad g(X_{i+1}) = Y_{i+1}, \quad g'(X_i) = Y'_i, \quad g'(X_{i+1}) = Y'_{i+1},$$

тот кубический многочлен вида (1), для которого эти условия выполнены, доставляет минимум функционалу

$$I(g) = \int_{X_i}^{X_{i+1}} L(x, y, y', y'') dx, \quad (13)$$

в котором  $L(x, y, y', y'') = (y'')^2$  [22, с. 25–26]. Необходимым условием экстремума функционала (13) является *уравнение Эйлера*

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

принимаящее в данном случае (после сокращения на множитель 2) вид

$$y'''' = 0;$$

многочлены вида (1) дают общее решение данного дифференциального уравнения.

Экспоненциальные сплайны с натяжением Швейкerta доставляют минимум функционалу с функцией Лагранжа  $L(x, y, y', y'') = (y'' - \lambda y')^2$ , а уравнение Эйлера принимает вид

$$y'''' - \lambda^2 y'' = 0,$$

где  $\lambda \geq 0$  — параметр натяжения [22, с. 19–20].

Учитывая, что при монотонной интерполяции на отрезке  $J$  первая производная интерполянта должна быть заведомо положительна, можно попробовать вместо минимизации квадрата второй производной минимизировать квадрат производной от логарифма первой производной искомого интерполянта  $y = g(x)$  при условиях

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 1, \quad g'(0) = p, \quad g'(1) = q.$$

При этом имеем:

$$L(x, y, y', y'') = (y'')^2 / (y')^2. \quad (14)$$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{y''''}{(y')^2} - \frac{4y''y'''}{(y')^3} + \frac{3(y'')^3}{(y')^4} = 0. \quad (15)$$

Поскольку переменная  $y$  явно в (15) не входит, переходом к переменной  $s = y'$  понижаем порядок уравнения; избавляясь от знаменателей, имеем:

$$s^2 s''' - 4 s s' s'' + 3 (s'')^3 = 0.$$

Переменная  $x$  в данное уравнение также явно не входит; поэтому можно еще понизить порядок, полагая  $u = s'/s$  (на минимизацию  $u^2$  как раз и направлены наши усилия). Получаем дифференциальное уравнение

$$u'' - u u' = 0.$$

Последнее допускает первый интеграл

$$u' - \frac{u^2}{2} = 2R. \quad (16)$$

Следовательно, переменная  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка (16); это — частный случай специального уравнения Риккати. Общее решение данного уравнения известно [23, с. 296]; вводя обозначение  $u(0) = 2S$ , его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } R=0 \quad u &= \frac{2S}{1-Sx}; \\ \text{при } R<0 \quad u &= \frac{2Sk - 2k^2 \operatorname{th} kx}{k - S \operatorname{th} kx}, \quad k \equiv \sqrt{-R}; \\ \text{при } R>0 \quad u &= \frac{2Sk + 2k^2 \operatorname{tg} kx}{k - S \operatorname{tg} kx}, \quad k \equiv \sqrt{R}. \end{aligned}$$

В случае  $R=0$  с учетом того, что переменная  $s$  всюду положительна на  $J$ , получаем для  $s$  выражение

$$s = \frac{B}{(1-Sx)^2},$$

где  $B$  — новая постоянная интегрирования. Сопоставляя это с (12), находим, что  $B = \beta$  и  $S = 1 - \beta$ .

Таким образом, дробно-линейные функции вида (10) являются частными решениями уравнения Эйлера (15) и доставляют минимум квадрату производной от логарифма первой производной интерполянта при условиях  $p = \beta$  и  $q = 1/\beta$ .

## 6. Симметричный случай

Рассмотрим теперь следующий, симметричный случай, когда  $p = q = \gamma$ . Здесь выбор однопараметрической группы  $\mathcal{G}^s$  не является столь очевидным. Попытка искать локальные интерполянты среди решений уравнения (15) при  $R \neq 0$  не приводит к успеху. Эти решения, правда, можно найти в явном виде; каждое из них представимо как дробь, в числителе которой фигурирует  $\operatorname{sh} kx$  (при  $R < 0$ ) или  $\sin kx$  (при  $R > 0$ ), а в знаменателе — линейная комбинация  $\operatorname{ch} kx$  и  $\operatorname{sh} kx$  (соответственно,  $\cos kx$  и  $\sin kx$ ).

Но попытка выразить коэффициенты этих дробей через данные из условий интерполяции приводит к необходимости решать трансцендентные уравнения. Кроме того, такие интерполянты не образуют однопараметрических групп и не обладают инверсной инвариантностью. Это означает, что выбор минимизируемого функционала (13) с функцией Лагранжа (14) в задачах монотонной интерполяции не является наилучшим.

Заметим, однако, что при рассматриваемом сейчас условии на параметры  $p$  и  $q$  при  $\gamma \neq 1$  график интерполянта обязательно должен пересекать главную диагональ единичного квадрата  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ , и естественно потребовать, чтобы искомые диффеоморфизмы имели неподвижную точку при  $x = 1/2$ . Забегая вперед, отметим: во всех рассмотренных ниже случаях график производной  $F'_\gamma(x)$  окажется при  $\gamma \neq 1$  симметричным относительно вертикальной оси симметрии упомянутого квадрата, имея экстремум при  $x = 1/2$  (график же самой функции  $F_\gamma(x)$  будет иметь при этом значении  $x$  точку перегиба).

Во-первых, рассмотрим такую функцию Шредера:

$$\Psi(x) = \frac{x(1-x)}{1-2x}. \quad (17)$$

Вычисляя инфинитезимальный оператор соответствующей однопараметрической группы  $\mathcal{G}_1^s$ , получаем:

$$U_1 \equiv M(x) \frac{\partial}{\partial x} = \frac{x(1-2x)(1-x)}{x^2 + (1-x)^2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (18)$$

а явный вид диффеоморфизмов из  $\mathcal{G}_1^s$  таков:

$$y \equiv F_\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x - 1/2}{\sqrt{(\gamma x(1-x))^2 + (x - 1/2)^2} + \gamma x(1-x)}. \quad (19)$$

Диффеоморфизмы отрезка  $[-1, 1]$ , получаемые из функций (19) линейной заменой переменных, использовались при решении некоторых задач управления движением механических систем: здесь управляющий момент периодически зависел от обобщенной координаты, и данные диффеоморфизмы обеспечивали нужную модификацию такой зависимости [24, 25].

При  $\gamma \neq 1$  график функции вида (19) на отрезке  $\mathcal{J}$  (Рис. 3) — дуга алгебраической кривой 3-го порядка (в рамках восходящей к Ньютону классификации кривых 3-го порядка — адиаметральной гиперболы [26, с. 7–9]). При  $x = 1/2$  имеем:  $F'_\gamma(x) = 1/\gamma$ .

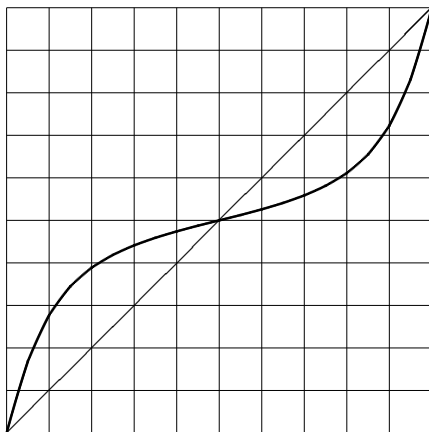


Рис. 3. Функция (19),  $\beta = 4$

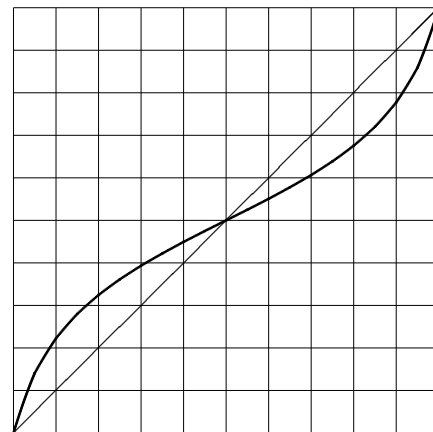


Рис. 4. Функция (22),  $\beta = 4$

Во-вторых, рассмотрим инфинитезимальный оператор более простого вида:

$$U_2 \equiv M(x) \frac{\partial}{\partial x} = x(1-2x)(1-x) \frac{\partial}{\partial x} \quad (20)$$

и найдем соответствующую функцию Шредера.

Для этого представим соотношение (7) в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dy}{y(1-2y)(1-y)},$$

после чего разложим рациональную дробь  $1/M(y)$  на элементарные дроби:

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \left( \frac{1}{y} + \frac{4}{1-2y} - \frac{1}{1-y} \right) dy$$

и проинтегрируем данное уравнение по  $\gamma$  в пределах от 1 (когда  $y=x$ ) до текущего значения  $\gamma$ :

$$\ln \gamma = \ln |y| - 2 \ln |1-2y| + \ln |1-y| - \ln |x| + 2 \ln |1-2x| - \ln |1-x|,$$

откуда

$$\gamma = \frac{y(1-2x)^2(1-y)}{x(1-2y)^2(1-x)}.$$

Таким образом,

$$\Psi(x) = \frac{x(1-x)}{(1-2x)^2}. \quad (21)$$

Разрешая уравнение Шредера  $\Psi(y) = \gamma \Psi(x)$  относительно  $y$ , получаем явный вид диффеоморфизмов из новой группы  $\mathcal{G}_2^s$ :

$$y \equiv F_\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x-1/2}{\sqrt{\gamma x(1-x) + (x-1/2)^2}}. \quad (22)$$

При  $\gamma \neq 1$  график такой функции на отрезке  $\mathcal{J}$  (Рис. 4) — дуга алгебраической кривой 4-го порядка. Внешне он весьма схож с графиком функции (19), однако при  $x = 1/2$  теперь имеем:  $F'_\gamma(x) = 1/\sqrt{\gamma}$ .

Наконец, выполним для функции (19) процедуру эрмитовой интерполяции сплайном со звеньями вида (3), приняв за узлы точки  $0, 1/2, 1$ . Полученный интерполянт оказывается диффеоморфизмом отрезка  $\mathcal{J}$  класса  $C^1$ , а график его при  $\gamma \neq 1$  есть кривая, составленная из двух дуг равнобочной гиперболы, стыкующихся при  $x = 1/2$ .

Нетрудно показать, что и такие диффеоморфизмы, образующие группу  $\mathcal{G}_3^s$ , вполне соответствуют рассматриваемой схеме. Здесь функция Шредера имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{\min(x, 1-x)}{(1-2x)}, \quad (23)$$

инфинитезимальный оператор группы — вид

$$U_3 \equiv M(x) \frac{\partial}{\partial x} = \min(x, 1-x) \cdot (1-2x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (24)$$

а явный вид диффеоморфизмов из  $\mathcal{G}_3^s$  таков:

$$y \equiv F_\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x-1/2}{\gamma(1/2 - |x-1/2|) + |x-1/2|}. \quad (25)$$

Далее мы предполагаем, что в качестве группы  $\mathcal{G}^s$  выбрана одна из групп  $\mathcal{G}_1^s, \mathcal{G}_2^s, \mathcal{G}_3^s$ .



## 7. Общий случай

Переходим к рассмотрению общего случая интерполяции диффеоморфизмами, когда  $p$  и  $q$  — произвольные положительные числа. Можно было бы искать локальный интерполянт как элемент новой однопараметрической группы диффеоморфизмов отрезка  $\mathcal{J}$ , инфинитезимальный оператор которой есть линейная комбинация одного из операторов (18), (20) или (24) и оператора (11) с коэффициентами  $\theta$  и  $1-\theta$ , подбирая надлежащим образом значения группового параметра и параметра  $\theta$ .

Однако выражения для получаемых на этом пути функций Шредера будут произведениями двучленов, возведенных в степени с произвольными (в общем случае) действительными показателями, и нахождение явной формулы для искомого интерполянта становится затруднительным.

Мы пойдем по другому пути: будем строить искомые интерполянты как суперпозиции диффеоморфизмов из уже рассмотренных групп  $\mathcal{G}^a$  и  $\mathcal{G}^s$ .

Для сохранения инверсной инвариантности будем строить интерполянт не в виде  $F_\gamma \circ F_\beta$  или  $F_\beta \circ F_\gamma$ , а в таком виде:

$$F = \widehat{F}_\beta \circ F_\gamma \circ \widehat{F}_\beta, \quad (26)$$

где  $\widehat{F}_\beta$  — функциональный квадратный корень из функции  $F_\beta$  (то есть такая функция, что  $F_\beta = \widehat{F}_\beta \circ \widehat{F}_\beta$  [18]). В нашем случае в силу (4)  $\widehat{F}_\beta = F_{\sqrt{\beta}}$ .

По теореме о дифференцировании сложной функции имеем:

$$p = \sqrt{\beta} \cdot \gamma \cdot \sqrt{\beta} \quad \text{и} \quad q = (1/\sqrt{\beta}) \cdot \gamma \cdot (1/\sqrt{\beta}),$$

откуда

$$\beta = \sqrt{p/q}, \quad \gamma = \sqrt{pq}. \quad (27)$$

Таким образом, интерполянт вида (26) является искомым диффеоморфизмом отрезка  $\mathcal{J}$ , первая производная которого принимает на концах отрезка заданные значения  $p$  и  $q$ . Возвращаясь к задаче интерполяции функции  $f$  на всем отрезке  $[a, b]$ , в соответствии с (3) получаем, что  $i$ -е звено искомого монотонного интерполянта имеет вид

$$F_i(x) = Y_i + (Y_{i+1} - Y_i) \widehat{F}_\beta (F_\gamma (\widehat{F}_\beta (u))), \quad \text{где} \quad u = (x - X_i)/(X_{i+1} - X_i). \quad (28)$$

Если  $\gamma \neq 1$ , а значение  $\beta$  мало отличается от 1, то график интерполянта (26) по-прежнему будет иметь точку перегиба, но она уйдет с главной диагонали единичного квадрата  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ . Если же  $\beta \gg 1$  или  $\beta \ll 1$ , то точки перегиба на отрезке  $\mathcal{J}$  уже не будет.

Заметим также, что функция  $F_\gamma$  (мы вновь предполагаем, что  $\gamma \neq 1$ ) под действием внутреннего автоморфизма отрезка  $\mathcal{J}$ , порожденного каким-либо элементом группы  $\mathcal{G}^a$ , переходит в новую функцию

$$\widetilde{F}_\gamma = F_{\widetilde{\beta}} \circ F_\gamma \circ F_{\widetilde{\beta}}^{-1}, \quad (29)$$

для которой по-прежнему выполняются условия  $p = q = \gamma$ , но точка перегиба смещается вдоль главной диагонали единичного квадрата  $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$  влево (при  $\widetilde{\beta} > 1$ ) или вправо (при  $\widetilde{\beta} < 1$ ); параметр  $\widetilde{\beta}$  здесь не связан с параметром  $\beta$ , определенным в соответствии с (27).

Заменяя в (26)  $F_\gamma$  на  $\widetilde{F}_\gamma$  (первый и последний функциональные множители в (29) при этом можно объединить с соответствующими множителями в (26)), мы получаем модификацию изложенной выше процедуры локальной эрмитовой интерполяции. В такой модификации фактически присутствует свободный параметр (которым можно распорядиться, стремясь точнее воспроизвести особенности интерполируемой функции). При этом вместо формулы (26) интерполянт задается формулой

$$F = F_{\beta_1} \circ F_\gamma \circ F_{\beta_2}, \quad (30)$$

где параметры  $\beta_1$  и  $\beta_2$  выбирают так, чтобы  $\beta_1 \beta_2 = \sqrt{p/q}$ .

Однако далее мы обсуждать эту модификацию не будем.

Упомянем также, что при эрмитовой интерполяции предложенным способом функции класса  $C^4$  при стремлении максимального шага  $h$  сетки  $\Delta$  к нулю погрешность интерполяции (то есть норма  $\|f - F\|$ , равная максимуму модуля разности  $f - F$  на отрезке  $[a, b]$  [2, с. 10]) ведет себя как  $O(h^4)$  (в самом деле, именно такую погрешность имеет эрмитова интерполяция кубическими сплайнами дефекта 2 [1, с. 392]; [3, с. 49]; а для  $f$  и ее интерполянта вида (28) интерполирующий кубический сплайн из  $\mathbb{P}_{3,2}^{\Delta}$  — один и тот же). К случаю  $\mathcal{G}^s = \mathcal{G}_3^s$  эти рассуждения, впрочем, не применимы.

Если же значения  $Y_i'$  первой производной в узлах  $X_i$  не заданы, то их можно найти приближенно. При локальной интерполяции кубическими сплайнами стандартный способ — построить для каждого  $i$  вспомогательный многочлен 2-й степени, интерполирующий  $f$  в узлах  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$  (его графиком служит парабола); значение  $\bar{Y}_i'$  его производной в узле  $X_i$  используют вместо  $Y_i'$ . После этого применяют обычную технику эрмитовой интерполяции; получаемый кусочный многочлен называют *кубическим многочленом Бесселя*, а погрешность такой интерполяции —  $O(h^3)$  [1, с. 422–423]; [3, с. 50].

Однако такая процедура не гарантирует положительности  $\bar{Y}_i'$  при возрастающих значениях  $Y_i$ . Вместо нее при монотонной интерполяции поэтому часто используют метод геометрического среднего [13]. В обсуждаемом же здесь случае интерполяции функциями вида (28) естественно применить другой прием: интерполировать для каждого  $i$  значения  $f$  в узлах  $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$  дугой равнобочной гиперболы.

Именно, преобразуем линейной заменой переменных прямоугольник  $[X_{i-1}, X_{i+1}] \times [Y_{i-1}, Y_{i+1}]$  в единичный квадрат  $J \times J$ ; точка с координатами  $(X_i, Y_i)$  перейдет при этом во внутреннюю точку данного квадрата с координатами  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Разрешая уравнение Шредера  $\Psi(y) = \beta \Psi(x)$  с функцией Шредера вида (9) относительно  $\beta$ , находим для интерполянта вида (10) следующее значение параметра:

$$\beta = \frac{\bar{y}(1-\bar{x})}{\bar{x}(1-\bar{y})}. \quad (31)$$

Теперь по формуле (12) вычисляем значение производной и возвращаемся к исходным переменным. Рассмотрим некоторые примеры эрмитовой интерполяции функциями вида (28).

## 8. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим на отрезке  $[0, 1]$  функцию  $y = e^{-Kx}$ ,  $K > 0$  (в последующих расчетах принято  $K = 4$ ).

На рисунках (Рис. 5–6) представлены результаты интерполирования данной функции соответственно эрмитовыми кубическими сплайнами и функциями вида (28) в простейшем случае, когда число  $n$  отрезков разбиения равно 1 (функциональный сомножитель в (26) был выбран из группы  $\mathcal{G}_1^s$ ).

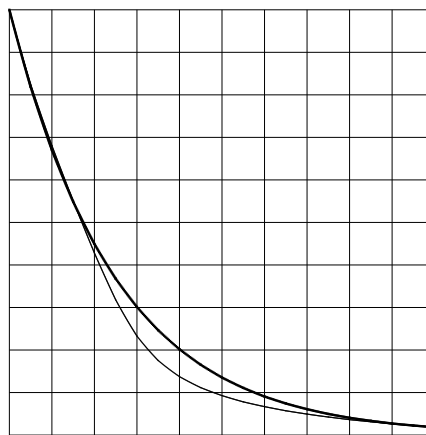
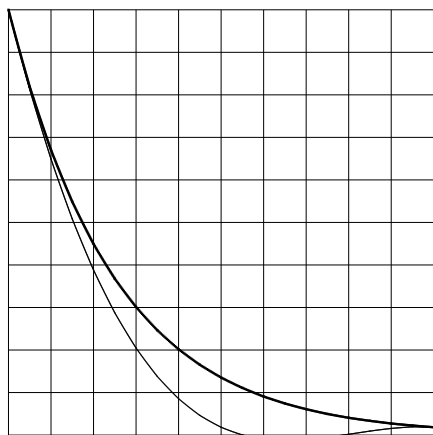


Рис. 5.  $y = e^{-Kx}$ : интерполянт из  $\mathbb{P}_{3,2}^{\Delta}$ ,  $n = 1$     Рис. 6.  $y = e^{-Kx}$ : интерполянт вида (28),  $n = 1$

Видно, что эрмитов кубический сплайн (который в данном случае сводится к кубическому многочлену) не сохраняет монотонность исходной функции (и даже принимает на некотором промежутке отрицательные значения), а предлагаемый здесь интерполянт монотонность сохраняет и в целом воспроизводит поведение интерполируемой функции.

Разумеется, шаг, равный 1, здесь слишком велик. Будем последовательно сгущать используемые сетки, каждый раз деля отрезки разбиения пополам. Уже при  $n = 2$  проблемы с монотонностью у эрмитова кубического сплайна исчезают (хотя они возникают вновь, если увеличить значение  $K$ ). Нормы погрешности с увеличением  $n$  ведут себя следующим образом:

$n$	1	2	4	8	16	32
$A$	0.119	0.0165	0.00161	0.000127	0.00000899	0.000000597
$B$	0.072	0.0133	0.00204	0.000283	0.00003741	0.000004786
$C$	0.059	0.0082	0.00080	0.000064	0.00000449	0.000000298
$D$	0.067	0.0113	0.00155	0.000197	0.00002448	0.000003025

(строка  $A$  отвечает интерполянтам из  $\mathbb{P}_{3,2}^{\Delta}$ , а строки  $B$ ,  $C$  и  $D$  — интерполянтам вида (28) при выборе в качестве реализации группы  $\mathcal{G}^s$  групп  $\mathcal{G}_1^s$ ,  $\mathcal{G}_2^s$  и  $\mathcal{G}_3^s$  соответственно). Видно, что при малых  $n$  интерполянты вида (28) обеспечивают по сравнению с эрмитовыми кубическими сплайнами лучшее приближение, а с ростом  $n$  все четыре интерполянта имеют примерно одинаковую точность.

**Пример 2.** Рассмотрим набор данных, предложенный в 1970 году Х. Акимой и часто используемый при тестировании алгоритмов монотонной интерполяции. Поскольку в настоящей работе обсуждается строго монотонная интерполяция, данные Акимы (взяты из [13]) были модифицированы: к значениям  $Y_i$  были добавлены значения функции  $0.1x$  в узлах сетки, а значения  $Y'_i$  — увеличены на 0.1. В результате был получен следующий набор данных:

$X_i$	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
$Y_i$	10.0	10.2	10.3	10.5	10.6	10.8	11.4	16.1	51.2	61.4	86.5
$Y'_i$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.450	14.121	18.397	14.720	36.696

На рисунке (Рис. 7) представлен результат интерполирования этих данных сплайном  $F$  со звеньями вида (28) (для определенности была выбрана группа  $\mathcal{G}_1^s$ ). Интерполянт сохраняет монотонность данных (в то время как при интерполяции данных Акимы эрмитовыми кубическими сплайнами, сплайнами с натяжением Де Бора и методом Акимы интерполянт теряет монотонность на предпоследнем отрезке разбиения [9, 13]).

Заметим также, что функция  $y = F(x) - 0.1x$  служит монотонным интерполянтом для исходных данных Акимы.

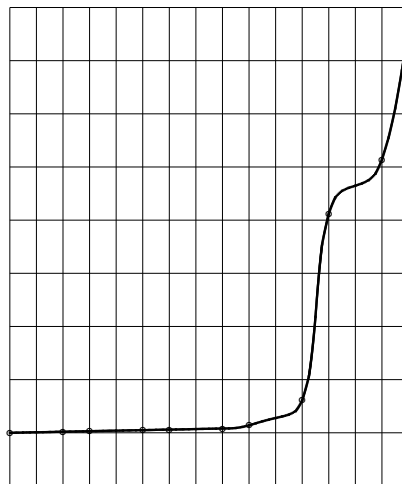


Рис. 7. Интерполянт вида (28) для модифицированных данных Акимы

## 9. Заключение

В данной работе предложена процедура локальной эрмитовой сплайн-интерполяции класса  $C^1$  для строго монотонных данных, в рамках которой локальные интерполянты представляются в виде суперпозиций диффеоморфизмов единичного отрезка  $[0, 1]$ , принадлежащих некоторым однопараметрическим группам таких диффеоморфизмов. Данная процедура приводит к достаточно простым расчетным формулам, а свойство строгой монотонности для получаемого интерполянта гарантировано. Обсуждаются свойства таких интерполянтов, приведены результаты вычислительных экспериментов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченкова Н. В. Вычислительные методы. 3-е изд. М.: Издат. дом МЭИ, 2008. 672 с.
2. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
3. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
4. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
5. Hussain M., Hussain M. Z., Sarfraz M. Shape-Preserving Rational Interpolation Scheme for Regular Surface Data // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2016. Vol. 2 (4). P. 713–747.
6. Schweikert D. G. An Interpolating Curve Using a Spline in Tension // Journal of Mathematics and Physics. 1966. Vol. 45. P. 312–317.
7. Duan Q., Djidjeli K., Price W. G., Twizell E. H. Constrained Control and Approximation Properties of Rational Interpolating Curve // Information Sciences. 2003. Vol. 152. P. 181–194.
8. Karim S., Pang K. Shape Preserving Interpolation Using  $C^2$  Rational Cubic Spline // Journal of Applied Mathematics. 2016. Vol. 2016. Article ID 4875358. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4875358>
9. Fritsch F. N., Carlson R. E. Monotone Piecewise Cubic Interpolation // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17 (2). P. 238–246.
10. Fritsch F. N., Butland J. A Method for Constructing Local Monotone Piecewise Cubic Interpolants // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1984. Vol. 5 (2). P. 300–304.
11. Квасов Б. И. Монотонная и выпуклая интерполяция весовыми кубическими сплайнами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 10. С. 1610–1621.
12. Merrien J.-L., Sablonnière P. Rational Splines for Hermite Interpolation with Shape Constraints // Computer Aided Geometric Design. 2013. Vol. 30 (3). P. 296–309.
13. Karim S., Pang K. Monotonicity-Preserving Using Rational Cubic Spline Interpolation // Research Journal of Applied Sciences. 2014. Vol. 9 (4). P. 214–223.
14. Ibraheem F., Hussain M., Hussain M. Z. Monotone Data Visualization Using Rational Trigonometric Spline Interpolation // The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014. Article ID 602453. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/602453>
15. Navas A. Growth of Groups and Diffeomorphisms of the Interval // Geometric and Functional Analysis. 2008. Vol. 18 (3). P. 988–1028.
16. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
17. Schröder E. Über iterirte Functionen // Mathematische Annalen. 1870. Bd. 3 (2). S. 296–322.
18. Curtright T., Zachos C. Evolution Profiles and Functional Equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2009. Vol. 42. Article ID 485208. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/48/485208>
19. Curtright T., Jin X., Zachos C. Approximate Solutions of Functional Equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2011. Vol. 44. Article ID 405205. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/40/405205>
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
21. Корецкий А. В., Осадченко Н. В. Решение задач кинематики на персональном компьютере. М.: Изд-во МЭИ, 2004. 48 с.
22. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск: Наука, 1988. 102 с.

23. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд. М.: Наука, 1971. 576 с.
24. Мартыненко Ю. Г., Осадченко Н. В. Движение шарнирного двухзвенника по гладкой кривой переменной кривизны // Вестник МЭИ. 2001. № 3. С. 14–18.
25. Осадченко Н. В., Абдельрахман А. М. З. Компьютерное моделирование движения мобильного ползающего робота // Вестник МЭИ. 2008. № 5. С. 131–136.
26. Смогоржевский А. С., Столова Е. С. Справочник по теории плоских кривых 3-го порядка. М.: Физматгиз, 1961. 263 с.

Поступила в редакцию 25.05.2017

**Осадченко Николай Владимирович**, к. ф.-м. н., доцент, кафедра робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, Национальный исследовательский университет “МЭИ”, 111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14.

E-mail: [osadchenkonv@mail.ru](mailto:osadchenkonv@mail.ru)

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Осадченко Н. В. Локальная монотонная интерполяция и однопараметрические группы // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 2. С. 60–73.

***N. V. Osadchenko***

**Local monotone interpolation and one-parameter groups**

*Keywords:* monotone interpolation, splines, one-parameter groups, Schröder’s equation, multiplicative derivative.

PACS: 02.60.Ed

This paper discusses the use of one-parameter groups consisting of the diffeomorphisms of the unit interval  $[0, 1]$  for constructing the spline interpolants preserving the monotonicity of the given data sets. The problems where the violation of the monotonicity of the original data is inappropriate, arise in many application areas of the spline interpolation.

We show that the proposed choice of local Hermite interpolants in the form of superpositions of the diffeomorphisms belonging to definite one-parameter groups guarantees the shape preserving for strictly monotone data. To select suitable groups and study their properties, it is convenient to define their elements implicitly, using as the starting point the corresponding Schröder’s equation or the infinitesimal operator of the group. The efficiency of the proposed approach is verified in a series of computational experiments.

**REFERENCES**

1. Amosov A. A., Dubinskii Yu. A., Kopchyonova N. V. *Vychislitel’nye metody. 3-e izd.* (Computational Methods. 3rd edition), Moscow: Publishing House of MPEI, 2008, 672 p.
2. Zav’yalov Yu. S., Leus V. A., Skorospelov V. A. *Splajny v inzhenernoj geometrii* (Splines in Engineering Geometry), Moscow: Mashinostroenie, 1985, 224 p.
3. De Boor C. *A Practical Guide to Splines*, New York: Springer-Verlag, 1978, 392 p.
4. Kvasov B. I. *Metody izogeometricheskoj approksimacii splajnami* (The Methods of Isogeometric Approximation by Splines), Moscow: Fizmatlit, 2006, 360 p.
5. Hussain M., Hussain M. Z., Sarfraz M. Shape-Preserving Rational Interpolation Scheme for Regular Surface Data, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2016, vol. 2 (4), pp. 713–747.
6. Schweikert D. G. An Interpolating Curve Using a Spline in Tension, *Journal of Mathematics and Physics*, 1966, vol. 45, pp. 312–317.
7. Duan Q., Djidjeli K., Price W. G., Twizell E. H. Constrained Control and Approximation Properties of Rational Interpolating Curve, *Information Sciences*, 2003, vol. 152, pp. 181–194.
8. Karim S., Pang K. Shape Preserving Interpolation Using  $C^2$  Rational Cubic Spline, *Journal of Applied Mathematics*, 2016, vol. 2016, article ID 4875358. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4875358>

9. Fritsch F. N., Carlson R. E. Monotone Piecewise Cubic Interpolation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, vol. 17 (2), pp. 238–246.
10. Fritsch F. N., Butland J. A Method for Constructing Local Monotone Piecewise Cubic Interpolants, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1984, vol. 5 (2), pp. 300–304.
11. Kvasov B. I. Monotone and Convex Interpolation by Weighted Cubic Splines, *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2013, vol. 53 (10), pp. 1610–1621.
12. Merrien J.-L., Sablonnière P. Rational Splines for Hermite Interpolation with Shape Constraints, *Computer Aided Geometric Design*, 2013, vol. 30 (3), pp. 296–309.
13. Karim S., Pang K. Monotonicity-Preserving Using Rational Cubic Spline Interpolation, *Research Journal of Applied Sciences*, 2014, vol. 9 (4), pp. 214–223.
14. Ibraheem F., Hussain M., Hussain M. Z. Monotone Data Visualization Using Rational Trigonometric Spline Interpolation, *The Scientific World Journal*, 2014, vol. 2014, article ID 602453.  
<http://dx.doi.org/10.1155/2014/602453>
15. Navas A. Growth of Groups and Diffeomorphisms of the Interval, *Geometric and Functional Analysis*, 2008, vol. 18 (3), pp. 988–1028.
16. Zhuravlyov V. F., Klimov D. M. *Prikladnye metody v teorii kolebaniy* (Applied Methods in the Oscillation Theory), Moscow: Nauka, 1988, 326 p.
17. Schröder E. Über iterirte Functionen, *Mathematische Annalen*, 1870, bd. 3 (2), s. 296–322.
18. Curtright T., Zachos C. Evolution Profiles and Functional Equations, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2009, vol. 42, article ID 485208. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/42/48/485208>
19. Curtright T., Jin X., Zachos C. Approximate Solutions of Functional Equations, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2011, vol. 44, article ID 405205. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/40/405205>
20. Gantmacher F. R. *Teoriya matric. 4-e izd.* (The Theory of Matrices. 4th edition), Moscow: Nauka, 1988, 552 p.
21. Koreckii A. V., Osadchenko N. V. *Reshenie zadach kinematiki na personal'nom komp'yutere* (Solving the Problems of Kinematics on a Personal Computer), Moscow: MPEI Publishers, 2004, 48 p.
22. Vershinin V. V., Zav'yalov Yu. S., Pavlov N. N. *Ehkestremal'nye svoystva splajnov i zadacha sglazhivaniya* (Extremal Properties of Splines and the Smoothing Problem), Novosibirsk: Nauka, 1988, 102 p.
23. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam. 4-e izd.* (A Handbook on Ordinary Differential Equations. 4th edition), Moscow: Nauka, 1971, 576 p.
24. Martynenko Yu. G., Osadchenko N. V. The Motion of a Hinged Two-Linked Chain along a Smooth Curve of Variable Curvature, *MPEI Vestnik*, 2001, no. 3, pp. 14–18.
25. Osadchenko N. V., Abdel'rakhman A. M. Z. Computer Simulation of Controlled Motion of a Mobile Crawling Robot, *MPEI Vestnik*, 2008, no. 5, pp. 131–136.
26. Smogorzhevskii A. S., Stolova E. S. *Spravochnik po teorii ploskikh krivyykh 3-go poryadka* (A Handbook on the Theory of Plane Curves of the 3rd Order), Moscow: Fizmatgiz, 1961, 263 p.

Received 25.05.2017

**Osadchenko Nikolaj Vladimirovich**, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, National Research University “MPEI”, ul. Krasnokazarmennaya, 14, Moscow, 111250, Russia.

E-mail: [osadchenkonv@mail.ru](mailto:osadchenkonv@mail.ru)

**Please cite this article in English as:**

Osadchenko N. V. Local monotone interpolation and one-parameter groups, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 2, pp. 60–73.