## ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

***

УДК 530.12; 530.51

***А. М. Баранов***[1]

# ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ОТКРЫТОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФРИДМАНА ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОСТИ

Решается проблема обобщения ранее полученной открытой космологической модели Фридмана при учете излучения и объемной вязкости. Используется метод, позволяющий свести моделирование открытой Вселенной, описываемой конформно-плоской метрикой, к задаче о механическом движении частицы в заданном силовом поле. Найдено новое точное космологическое решение уравнений тяготения простого вида, соответствующего эквивалентному осциллятору с переменными частотой и коэффициентом затухания. Вводится функция состояния, являющаяся обобщением ранее рассмотренного случая. На асимптотике, близкой к фридмановской, давление обусловлено только излучением и удовлетворяет ультрарелятивистскому уравнению состояния.

**Ключевые слова**: открытые космологические модели, точные космологические решения с вязкостью, функция состояния, эволюция Вселенной.

**PACS**: 04.20.-q; 04.20.Cv

## 1. Введение

В последние десятилетия значительное внимание уделяется построению и уточнению космологических сценариев эволюции Вселенной. В этой связи точные космологические решения уравнений тяготения представляют интерес как возможность введения в теорию математического описания новых физических свойств Вселенной, так и возможность нахождения новых точных решений уравнений Эйнштейна, обобщающих решение Фридмана для открытой Вселенной [1]. В [2] и [3] приводится один из таких примеров, обобщающий результаты [1] на случай наличия равновесного излучения. В работах [4] и [5] обобщаются не только результаты работы [1], но и ( [2] − [3]) при дополнительном учете объемной вязкости. В кратком сообщении [6] была сделана попытка обобщить и результаты [4] и [5]. Более полно получение этих результатов будет рассмотрено в настоящей статье.

Прежде всего воспользуемся модельным подходом, основанном на введения эквивалентной задачи о движении частицы единичной массы в некотором силовом поле [7]. Этот подход уже был применен для конструирования точных космологических решений для открытой Вселенной в работах ( [8] − [10]). Здесь в этом подходе ставится задача получения класса точных решений для изотропной открытой конформно-плоской модели Вселенной, соответствующей эквивалентному осциллятору с переменной частотой и рэлеевской диссипацией, когда коэффициент затухания уже не является линейной функцией как это было в ( [4] - [5]). Таким образом, целью настоящей работы является нахождение точного решения уравнений тяготения для открытой Вселенной с объемной вязкостью и функции состояния материи, в каждый момент являющейся уравнением состояния.

## 2. Описание модели

Суть используемого здесь подхода заключается прежде всего в том, чтобы записать уравнения Эйнштейна в виде, пригодным для дальнейшего решения. Для этого возьмем $4D$ метрику, конформную

[1] E-mail: alex_m_bar@mail.ru

метрике Минковского (как это сделано для открытой модели Фридмана в [11], [12] и в наших работах, упомянутых выше)

$$ds^2 = \exp(2\sigma)\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{1}$$

с конформным множителем $\exp(2\sigma)$, зависящим от переменной $S$, квадрат которой представляет равен $S^2 = \delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ а $\sigma = \sigma(S)$ и $\delta_{\mu\nu} = diag(1; -1; -1; -1)$ – метрический тензор Минковского; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; скорость света и гравитационная постоянная Ньютона равны единице, поэтому эйнштейновская гравитационная постоянная здесь равна $\varkappa = 8\pi$.

В качестве источника гравитационного поля возьмем тензор энергии-импульса (ТЭИ) вязкой жидкости ( [13], с.220-221)

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon\, u_\mu u_\nu + p^*\, b_{\mu\nu} \qquad \text{с} \qquad p^* = p - \zeta \cdot u^\alpha{}_{;\alpha}\,, \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(S)$ – плотность энерги; $p = p(S)$ – давление; $\zeta = \zeta(S)$ – коэффициент объемной вязкости; $p^* = p^*(S)$ – эффективное давление с учетом вязкости; $u_\mu = \exp(\sigma)S_{,\mu}$ – 4-скорость, удовлетворяющая условию нормировки $u_\mu u^\mu = 1$; точка с запятой обозначает ковариантную производную; $b_{\mu\nu} = u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}$ – метрика 3-пространства, ортогонального временноподобному направлению, задаваемого 4-скоростью, $b_{\mu\nu}u^\nu = 0$ (проектор на 3-пространство).

Далее произведем (1+3)–расщепление уравнений Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi T_{\mu\nu} \tag{3}$$

без космологического члена для метрики (1) путем проецирования этих уравнений на временноподобное направление ($G_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$), задаваемое 4-скоростью $u^\mu$, и 3-площадку ($G_{\mu\nu}b^{\mu\rho}b^{\nu\lambda}$), определяемую 3-проектором $b_{\mu\nu}$. Это так называемый монадный подход, известный благодаря работам ( [14] – [16]). Здесь $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна; $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи; $R$ – скалярная кривизна.

В результате (1+3)–расщепления приходим к системе дифференциальных уравнений, которая при заменах $y = \exp(\sigma/2)$ и $S = 1/x$ приводится к виду

$$y'(xy' - y) = (1/12) \cdot 8\pi\varepsilon \cdot y^6/x^3; \tag{4}$$

$$y'' = -(1/4) \cdot 8\pi p^* \cdot y^5/x^4, \tag{5}$$

где штрихом обозначена производная по $x$.

В дальнейшем уравнение (4) будем рассматривать как определение плотности энергии $\varepsilon$, а правую часть уравнения (5) определим как некоторую функцию $F^*(x)$, считая ее в дальнейшем аналогом силы, что позволяет рассматривать уравнение (5) в качестве аналога уравнения второго закона Ньютона для частицы единичной массы, если переменную $x$ считать новой временной переменной,

$$y'' = F^*(x). \tag{6}$$

Это означает, что основное внимание будет уделено решению этого уравнения, позволяющему заменить основную проблему о нахождении функции $\sigma(S)$ (или $y(S)$) задачей об одномерном движении частицы в некотором силовом поле. Таким образом, удается перейти к решению эквивалентной задачи из механики для нахождения космологической модели для открытой Вселенной.

Такой подход уже был ранее использован для получения точных открытых космологических моделей в работах ( [4] – [10]).

## 3. Нахождение точного космологического решения

Ограничим теперь наше рассмотрение потенциальным подходом в такой эквивалентной задаче, предположив, что

$$F^*(x) = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y'_x}; \qquad U = \left(\frac{B_0}{f(x)}\right)^2 \cdot \frac{y^2}{2}; \qquad V = \lambda(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \tag{7}$$

где $U$ — аналог потенциальной энергии упругой силы с переменным коэффициентом жесткости $k(x) = (B/f(x))^2$ (закон Гука здесь не выполняется); $B_0$ — некоторая постоянная; $V$ — аналог рэлеевской диссипативной функции, а $y'_x = dy/dx$ — аналог скорости; $\lambda = \lambda(x)$ — коэффициент затухания как функция «времени» $x$.

В итоге уравнение (7) переписывается в виде уравнения для осциллятора с переменными коэффициентом затухания и частотой

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\lambda(x)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{B_0}{f(x)}\right)^2 y = 0. \tag{8}$$

В отличие от [4] и [5], где $\lambda(x)$ взята в виде линейной функции по $x$ ($\lambda(x) = \gamma_0 \cdot x$), потребуем теперь, чтобы

$$2\lambda(x) = 2\frac{\Lambda_0}{f(x)} + \frac{d}{dx}\,\ln f(x), \tag{9}$$

где $\Lambda_0 = const$.

Такой выбор позволяет уравнение (8) преобразовать к виду

$$f(x)\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dy}{dx}\right) + 2\Lambda_0 f(x)\frac{dy}{dx} + B_0^2 y = 0. \tag{10}$$

При переходе к новой «временной» переменной $\xi$,

$$d\xi(x) = \frac{dx}{f(x)}, \tag{11}$$

уравнение (10) трансформируется в уравнение для свободного осциллятора с затуханием

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\Lambda_0\frac{dy}{d\xi} + B_0^2 y = 0 \tag{12}$$

в отличие от ( [4] — [5]), где было получено уравнение для свободного осциллятора без диссипации с постоянной собственной частотой ($\Lambda_0 = 0$).

При этом вопрос о выборе функции $f(x)$ остается открытым. Поэтому сначала запишем решение уравнения (12) в общем виде, а затем снова вернемся к выбору функции $f(x)$. Дело в том, что в отсутствии вязкости ($\lambda = 0$ или $\zeta = 0$) и при постоянном коэффициенте жесткости, то есть $f = const$, необходимо потребовать от решения уравнения (12) галилеевости и асимптотического ( $S \to \infty$, то есть $x \to 0$) прохождения через фридмановское решение для открытой Вселенной (в записи Фока [11])

$$y(x)_F = 1 - A_0 x, \tag{13}$$

где постоянная $A_0$ связана с плотность некогерентной пыли ( [11], с. 477).

Более того, следует потребовать асимптотического исчезновения как вязкости, так и непостоянства коэффициента жесткости осциллятора, чтобы на асимптотике обеспечить наличие негорентной пыли (модель Фридмана).

Так как уравнение (12) хорошо известно, то общее решение запишем сразу, используя обозначения и параметры, используемые в работе,

$$y(\xi) = Y_0 \cdot \exp(-\Lambda_0\xi) \cdot \cos(B\xi + \alpha), \tag{14}$$

где $Y_0$ — амплитуда, которую еще предстоит определить; $B^2 = B_0^2 - \Lambda_0^2$; $\alpha$ — «начальная фаза».

Выбор функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \exp(\gamma x^2), \tag{15}$$

позволяет удовлетворить выше изложенные требованиям ($\gamma$ — некоторая постоянная). В самом деле, в этом случае «временная» переменная $\xi$ может быть записана как

$$\xi(x) = \int_0^x \exp(-\gamma x^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} \cdot \mathrm{erf}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x}), \tag{16}$$

где $\mathrm{erf}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x})$ — функция ошибок, определяемая здесь как

$$\mathrm{erf}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\gamma}\mathrm{x}} \exp(-\chi^2)\,\mathrm{d}\chi. \tag{17}$$

Воспользуемся тем, что для очень малых $x$ ($S \to \infty$)

$$f(x) = \exp(\gamma x) \approx 1 + \gamma x \approx 1; \quad \mathrm{erf}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x}) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x} - \frac{1}{3}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x})^3) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{\gamma}\mathrm{x}); \quad \xi(\mathrm{x}) \approx \mathrm{x}, \tag{18}$$

тогда решение (14) в приближении малости $x$ записывается как

$$y(x) \approx Y_0 \cos\alpha(1 - (B\tan\alpha + \Lambda_0)x). \tag{19}$$

Требования галилеевости и асимптотической фридмановости (см. (13)) с учетом ранее выписанных определений параметров позволяют записать

$$Y_0 = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\tan^2\alpha}; \quad \tan\alpha = \frac{\tan\alpha_0 - \Lambda_0/B_0}{\sqrt{1 - {\Lambda_0}^2/B_0^2}}; \quad \tan\alpha_0 = \frac{A_0}{B_0}, \tag{20}$$

где параметр $B_0$ отвечает за наличие равновесного излучения в открытой космологической модели без диссипации [2], [3], [7], а $A_0$ — за наличие вещества.

В итоге запишем окончательное решение рассматриваемой космологической задачи

$$y(\xi(x)) = \sqrt{1+\tan^2\alpha} \cdot \exp(-\Lambda_0\xi(x)) \cdot \cos(B\xi(x) + \alpha), \tag{21}$$

с параметрами, определенными выше и связанными с предыдущими работами. При этом конформный множитель в метрике (1) связан с функцией $y$ как $\exp(2\sigma) = y^4$.

Отметим, что при $\Lambda_0 = 0$ и $\gamma = 0$ решение (21) совпадает с решением, приведенным в [7], которое описывает открытую космологическую модель с веществом и излучением. Подробное исследование эволюционного поведения этой модели было проведено в [17].

## 4. Давление, плотность энергии и функция состояния модели

Используя полученное решение (21) не представляет большого труда на основе уравнений (4) и (5) записать выражения для давления, коэффициента объемной вязкости, плотности энергии и функции состояния [2], $\beta = p^*/\varepsilon$.

Подставляя (21) в (5), получим общее выражение для эффективного давления (гидростатическое и обусловленное объемной вязкостью)

$$\varkappa p^*(x) = 4\left(\frac{B_0^2 - 2(\gamma x f(x) + \Lambda_0)L(\xi(x))}{f^2(x)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)^2}\right)\left(\frac{x}{Y(\xi(x))}\right)^4, \tag{22}$$

где

$$Y(\xi(x)) = \exp(-\Lambda_0\xi(x))\cos(B\xi(x) + \alpha); \tag{23}$$

$$L(\xi(x)) = B\,\mathrm{tg}(B\xi(x) + \alpha) + \Lambda_0; \tag{24}$$

переменная $\xi(x)$ определена в (16); функция $f(x)$ задана выражением (15); параметры $B$, $B_0$, $\gamma$, $\Lambda_0$, $\alpha$ введены выше.

Что касается той части эффективного давления, которая определяется объемной вязкостью, то она равна

$$\varkappa\zeta(x)u^{\nu}_{;\nu} = 8\left(\frac{(\gamma x f(x) + \Lambda_0)L(\xi(x))}{f^2(x)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)^2}\right)\left(\frac{x}{Y(\xi(x))}\right)^4. \tag{25}$$

[2] О введении функции состояния см. работы [18]- [21].

Отсюда легко находится коэффициент объемной вязкости $\varkappa\zeta(x)$ при учете

$$u^{\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\, u^{\nu})_{,\nu}\ , \tag{26}$$

где $g$ — определитель метрического тензора из (1), а запятая обозначает частную производную по координатам $x^{\nu}$.

Общее выражение для плотности энергии получим из (6)

$$\varkappa\varepsilon(x) = 12\left(\frac{L(\xi(x))(xL(\xi(x)) + f(x))}{f^2(x)(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)^2 Y(\xi(x))}\right)\left(\frac{x}{Y(\xi(x))}\right)^3. \tag{27}$$

Асимптотически (при $S\ \to\ \infty$ или $x\ \to\ 0$) до фридмановской стадии некогерентной пыли, когда равновесное излучение еще учитывается, выражение для плотности энергии можно представить как

$$\varkappa\varepsilon \approx \varkappa\varepsilon_{rad} + \varkappa\varepsilon_{dust}, \tag{28}$$

где $\varkappa\varepsilon_{rad}$ — плотность энергии равновесного излучения,

$$\varkappa\varepsilon_{rad} \approx 12B_0^2\left(1 - 2\frac{A_0\Lambda_0}{B_0^2})\right)x^4, \tag{29}$$

а $\varkappa\varepsilon_{dust}$ — плотность энергии некогерентной пыли,

$$\varkappa\varepsilon_{dust} \approx 12A_0x^3(1 + A_0x). \tag{30}$$

При этом это выражение совпадает с асимптотикой для плотности энергии пыли в работах [2] – [3] и [7].

Аналогичная асимптотика поведения давления определяется только равновесным излучением и связана с асимптотической плотностью энергии излучения как

$$\varkappa p^* = \frac{1}{3}\varkappa\varepsilon_{rad} \approx 4B_0^2\left(1 - 2\frac{A_0\Lambda_0}{B_0^2})\right)x^4. \tag{31}$$

Другими словами, в рассмотренном приближении имеем ультрарелятивистское уравнение состояния.

При $\Lambda_0\ =\ 0$ выражение (30) совпадает с асимптотикой для давления равновесного излучения в работах [2] – [3] и [7].

Зная теперь функциональные зависимости эффективного давления и плотности энергии, нетрудно записать функцию состояния полученной открытой космологической модели:

$$\beta(x) = \frac{p^*}{\varepsilon} = \frac{1}{3}\left(\frac{(B_0^2 - 2(\gamma x f(x)) + \Lambda_0)L(\xi(x))}{L(\xi(x))(xL(\xi(x)) + f(x))}\right)x. \tag{32}$$

Подчеркнем, что при $\Lambda_0 = 0$ и $\gamma = 0$ функция состояния (32) совпадает с приведенной в [7] функцией состояния

$$\beta_0(x) = \frac{1}{3}\frac{B_0 x\,\mathrm{ctg}\,\varphi(x)}{(1 + B_0 x\tan\varphi(x))}, \tag{33}$$

где $\varphi(x) = B_0x + \alpha_0$.

## 5. Заключение

Использование модельного подхода, основанного на рассмотрении эквивалентной задачи о движении частицы единичной массы в некотором силовом поле [7], позволяет получить новое точное решение для открытой космологической модели с излучением и объемной вязкостью. При этом корень четвертой степени из конформного множителя есть решение уравнения для осциллятора с затуханием.

Асимптотически (при больших временах) это решение связано как с решением для открытой Вселенной с излучением (без вязкости), так и с решением Фридмана.

Следует отметить, что рассмотрение эволюционного поведение такой модели требует дополнительного тщательного исследования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А.А. О возможности мира с постоянной отрицательной кривизной // УФН. 1963. Т. 80. Вып. 3. С. 447–452.

2. Баранов А.М., Савельев Е.В. Сферически-симметричное светоподобное излучение и конформно-плоские пространства-времена // Изв. вузов. Физика. 1984. № 7. С. 32–35.

3. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times // Russ. Phys. J. 1984. Vol. 27. № 7. P. 569–572.

4. Баранов А.М., Жабрун И.В., Савельев Е.В. Точное решение для открытой Вселенной с вязкостью // Изв.вузов. Физика. 1995. № 1. С. 79–83.

5. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity // Russian Physics Journal. 1995. Vol. 38. № 1. P. 68–71.

6. Baranov A.M. Generalization of open universe solution with viscosity // Теоретич. и эксперимент. проблемы гравитации: тез. докл. IX Российской конфер. (Новгород-96). М., 1996. Ч. 2. С. 93.

7. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. I. Эволюция модели как задача о движении частицы в силовом поле // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 1. С. 37–46.

8. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. II. Линейное уравнение состояния и многомерные пространства-времена // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 2. С. 19–30.

9. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. III. «Внутреннее» решение // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 4. С. 59–70.

10. Баранов А.М., Савельев Е.В. Точные решения для конформно-плоской Вселенной. IV. Космологическая модель для «бутылочного» потенциала // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 3. С. 61–66.

11. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 563 с.

12. Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.

13. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 2. 525 с.

14. Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в общей теории относительности // ДАН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 815–818.

15. Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. 256 с.

16. Mitskievich N.V. Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

17. Baranov A.M. Эволюция открытой космологической модели с излучением // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 1. С. 20–29.

18. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модель открытой Вселенной с переменным уравнением состояния // Изв.вузов. Физика. 1994. № 1. С. 89–94.

19. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state // Russ. Phys. J. 1994. Vol. 37. № 1. P. 80–84.

20. Баранов А.М., Савельев Е.В. Модели открытых Вселенных с переменным уравнением состояния вблизи сингулярности // Изв.вузов. Физика. 1994. № 7. С. 51–55.

21. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity // Russ. Phys. J. 1994. Vol. 37. № 7. P. 640–644.

Поступила в редакцию 17.10.2017

**Баранов Александр Михайлович**, д. ф.-м. н., профессор, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева (КГПУ), 660049, Россия, г. Красноярск, ул. Ады Лебедевой, 89 ; Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева (СибГУ), 660037, Россия, г. Красноярск, пр. имени газеты «Красноярский рабочий», 31.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**
Баранов А. М. Одно обобщение открытой космологической модели Фридмана при наличии вязкости // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 3. С. 4–11.

***A. M. Baranov***

**An extension of the Friedman open cosmological model in the presence of viscosity**

*Keywords*: open cosmological models, exact cosmological solutions with viscosity, function of state, evolution of the open Universe.

PACS: 04.20.-q; 04.20.Cv

The problem of generalization of the previously obtained open cosmological model when accounting for radiation, and bulk viscosity is considered. The method that reduces the open Universe simulation to a problem of mechanical motion of the particle in a given force field is used. Cosmological model is described by the conformally-flat metric. New exact cosmological solution of the simple type gravitational equations is found. This solution corresponds to the equivalent oscillator with variable frequency and damping factor. Function of state is introduced as generalization of the previously considered case. For the asymptotic behavior of cosmological model close to the Friedman asymptotic, the pressure satisfies only for the ultrarelativistic equation of state.

## REFERENCES

1. Friedman A.A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes, *Z. Phys.*, 1924, vol. 21, no. 1, pp. 326–333.

2. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Izv. vuzov. Fizika*, 1984, no. 7, pp. 32–35.

3. Baranov A.M., Saveljev E.V. Spherically symmetric lightlike radiation and conformally flat space-times, *Russ. Phys. J.*, 1984, vol. 27, no. 7, pp. 569–572.

4. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Izv. vuzov. Fizika*, 1985, no. 1, pp. 79–83.

5. Baranov A.M., Zhabrun I.V., Saveljev E.V. Exact solution for an open universe with viscosity, *Russ. Phys. J.*, 1995, vol. 38, no. 1, pp. 68–71.

6. Baranov A.M. Generalization of open universe solution with viscosity, *Theoretical and experimental problems of gravitation: Abstracts of 9-th Russian conference (Novgorod-96)*, Moscow, 1996, part 2, p. 93.

7. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. I. The evolution of model as the problem about a particle movement in a force field, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no. 1, pp. 37–46.

8. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. II. The linear equation of state and multidimensional space-times, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no. 2, pp. 19–30.

9. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. III. The “interior” solution, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2014, no. 4, pp. 59–70.

10. Baranov A.M., Saveljev E.V. Exact solutions of the conformally flat Universe. IV. Cosmological model with the ”bottle” potential, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2015, no. 3, pp. 61–66.

11. Fock V.A. *The Theory of Space, Time and Gravitation*, New York: Pergamon, U.S.A., 1964.

12. Mitskievich N.V. *Fizicheskie polya v obshchej teorii otnositelnosti* (Physical fields and general relativity), Moscow: Nauka, 1969, 326 p.

13. Misner Ch., Thorne K., Wheeler J. *Gravitation*, San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1973.

14. Zelmanov A.L. Chronometric Invariants and co-moving coordinates in general relativity, *DAN USSR*, 1956, vol. 107, no. 6, pp. 815–818.

15. Vladimirov Yu.S. *Sistemy otscheta v teorii gravitacii* (Reference Frames in the Gravitation Theory), Moscow: Energoizdat, 1982, 256 p.

16. Mitskievich N.V. *Relativistic Physics in Arbitrary Reference Frames*, New York: Nova Science Publishers, Inc., 2006.

17. Baranov A.M. Evolution of the open cosmological model with radiation, *Space, Time and Fundamental Interactions (STFI)*, 2017, no. 1, pp. 20–29.

18. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Izv. vuz.(Fizika)*, 1994, no. 1, pp. 89-94.

19. Baranov A.M., Saveljev E.V. A model of an open universe with a variable equation of state, *Russ. Phys. J.*, 1994, vol. 37, no. 1, pp. 80–84.

20. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Izv. vuzov. Fizika*, 1994, no. 7, pp. 51–55.

21. Baranov A.M., Saveljev E.V. Models of an open universe with a variable equation of state near a singularity, *Russ. Phys. J.*, 1994, vol. 37, no. 7, pp. 640–644.

Received 17.10.2017

**Baranov Alexandre Mikhailovich**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Krasnoyarsk State Pedagogical University named after V.P. Astaf'ev, Ada Lebedeva St., 89, Krasnoyarsk, 660049, Russia ;
Siberian State University of Science and Technologies named after acad. M.F. Reshetnev (SibSAU), Av. named after newspaper "Krasnoyarsk worker", 31, Krasnoyarsk, 660037, Russia.
E-mail: alex_m_bar@mail.ru

**Please cite this article in English as:**
Baranov A. M. An extension of the Friedman open cosmological model in the presence of viscosity, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 3, pp. 4–11.