УДК 517.9

Л. Г. Салехов[1], ***Э. В. Чеботарева***[2]

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СВЕРТОК

В статье рассматривается класс уравнений сверток в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. Доказывается разрешимость уравнений сверток данного класса. Для исследования уравнений в статье предлагается использовать итерационный метод полиномиального дифференцирования, который также позволяет получить итерационные формулы для отыскания элементарного решения. Кроме того, в статье приводится программная реализации метода, а также пример решения уравнения сверток с помощью системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: сверточная алгебра, элементарное (фундаментальное) решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, характеристический полином дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, символическая степень оператора, символьная производная.

PACS: 02.30.Hq

1. Введение

Уравнения сверток играют важную роль при решении многих прикладных задач, которые сводятся к решению дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [1–4].

Рассмотрим уравнение

$$A * U = W, \tag{1}$$

где A и W — известные функции, U — неизвестная функция. При решении задач идентификации в роли A выступает аппаратная функция, под U подразумевается входной сигнал, под W — выходной сигнал.

Если рассматривать уравнение сверток (1) в смысле обобщенных функций, то хорошо известен метод решения таких уравнений в пространстве обобщенных функций медленного роста с применением преобразования Фурье.

В общем случае задача (1) не имеет решения, однако можно выделить классы, в которых уравнение вида (1) имеет единственное решение [5–8].

В данной работе будет рассмотрено уравнение сверток вида (1), в котором A, U, W — обобщенные функции, принадлежащие пространству $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ — пространству обобщенных функций с носителями из $[0, \infty]$, в котором метод преобразования Фурье не работает. Отметим, что пространство $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ является сверточной алгеброй [1, 2].

2. Постановка задачи

Пусть обобщенная функция $A \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ имеет вид

$$A = \mathcal{M}(t)T(t),$$

где

$$\mathcal{M}(t) = \sum_{i=0}^{q} \beta_i t^i, \forall \beta_i \in \mathbb{C} | \beta_q \neq 0, \forall q \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$T(t) \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ элементарное решение некоторого линейного дифференциального оператора

$$P(D) = \sum_{k=0}^{m} a_k D^k, \forall a_k \in \mathbb{C} | a_m = 1, \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

[1]E-mail: leonardsalehov@mail.ru
[2]E-mail: chebotareva.elv@gmail.com

здесь $D = \frac{d}{dt}$.

В сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ рассмотрим уравнение

$$A * U = W, \ \forall W \in \mathscr{D}'_+(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Известно [9], если существует элементарное решение уравнения сверток, принадлежащее сверточной алгебре, то оно единственно в этой алгебре. Отсюда следует существование и единственность решения самого уравнения.

Поэтому актуальным становится вопрос отыскания элементарного решения уравнения сверток (3), принадлежащего сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$.

3. Итерационные формулы для оператора $\mathbf{P(D)}$

Поскольку оператор $P\,(D)$ с постоянными коэффициентами, то его характеристический полином есть

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{m} a_k \xi^k, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Множество полиномов, снабженное мультипликативным произведением, является мультипликативным кольцом. Пусть $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i$ и $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i$. По правилу дискретной свертки

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right\} x^k.$$

В частности,

$$[f(x)]^q = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} \right\} x^k.$$

Очевидно, $[P(\xi)]^\ell$, $\forall \ell \in \mathbb{N}$ – есть характеристический полином дифференциального оператора $[P\,(D)]^{(\ell)}$, здесь ℓ – символическая степень оператора $P(D)$.

Производная порядка $\alpha \in \mathbb{N}$ от полного символа $P(\xi)$, то есть $\dfrac{d^\alpha P(\xi)}{d\xi^\alpha}$– характеристический полином оператора

$$P^{[\alpha]}(D) = \alpha! \sum_{k=\alpha}^{m} a_k \binom{k}{\alpha} (D)^{k-\alpha},$$

где $\alpha = 0, 1, ..., m$, $P^{[m]} = m!$, $P^{[0]}(D) \equiv P(D)$.

Пусть $[P(D)]^{(\ell)}$ есть ℓ-ая символическая степень опреатора $P(D)$, $\ell \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Обозначим через $P_\ell^{[\alpha]}(D)$ оператор, характеристический полином которого есть $\frac{d^\alpha}{d\xi^\alpha}\,[P(\xi)]^\ell$. Тогда

$$P_\ell(D) \equiv [P(D)]^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell m} b_k^\ell(a_k) D^k, \tag{4}$$

где $b_k^\ell(a_k)$ выражаются по правилу свертки через коэффициенты a_k оператора $P(D)$.

При $\alpha = 1, 2, ..., \ell$ имеем

$$P_\ell^{[\alpha]}(D) = l \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{k} P^{[k+1]}(D) P_{l-1}^{[\alpha-1-k]}(D). \tag{5}$$

4. Действие оператора $\boldsymbol{P_{q+1}(D)}$ на $\boldsymbol{M(t)T}$

Применим расширение теоремы Лейбница на случай, когда роль обычного оператора дифференцирования играет ℓ-ая итерация

$$P_\ell(D) := [P(D)]^{(\ell)}$$

дифференциального оператора $P(D)$. При этом получим

$$P_\ell(D)\left\{M(t)T\right\} = \sum_{\alpha=0}^{\ell-1} \frac{1}{\alpha!} M^{(\alpha)}(t) P_\ell^{[\alpha]}(D)(T). \tag{6}$$

Предположим сначала, что $1 < m < q$.

Поскольку T – элементарное решение оператора $P(D)$, то

$$P(D)(T) \equiv \delta, \tag{7}$$

где δ – мера Дирака. Отметим также, что

$$M^{(\alpha)}(t) = \alpha! \sum_{j=\alpha}^{q} \beta_j \binom{j}{\alpha} t^{j-\alpha}, \tag{8}$$

$$M^{(q)}(t) = \beta_q q!,$$

$$P^{[m]}(D) = m!,$$

$$P^{[\alpha]}(t) = 0, \forall \alpha > m, \alpha \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P(D)\left\{M(t)T\right\} &= \sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} M^{(\alpha)}(t) P^{[\alpha]}(D)(T) \\ &= M(t)P(D)(T) + \sum_{\alpha \geq 1} \frac{1}{\alpha!} M^{(\alpha)}(t) P^{[\alpha]}(D)(T) \\ &= M(t)\delta + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\alpha!} M^{(\alpha)}(t) P^{[\alpha]}(D)(T) \\ &= M(t)\delta + \sum_{\alpha=1}^{m} \left\{ \sum_{j=\alpha}^{q} \beta_j \binom{j}{\alpha} t^{j-\alpha} \right\} P^{[\alpha]}(D)(T) \\ &= M(t)\delta + \sum_{\alpha=1}^{m-1} \left\{ \sum_{j=\alpha}^{q} \beta_j \binom{j}{\alpha} t^{j-\alpha} \right\} P^{[\alpha]}(D)(T) \\ &\quad + \sum_{j=m}^{q} \beta_j \binom{j}{m} t^{j-m} m! T. \end{aligned} \tag{9}$$

В силу того, что

$$M(t)\delta = \left\{ \sum_{j=0}^{q} \beta_j t^j \right\} \delta = \beta_0 \delta,$$

получим

$$\begin{aligned} P(D)\left\{M(t)T\right\} = \beta_0\delta + m! &\left\{ \sum_{j=m}^{q} \beta_j \binom{j}{m} t^{j-m} \right\} T \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{m-1} \left\{ \sum_{j=\alpha}^{q} \beta_j \binom{j}{\alpha} t^{j-\alpha} \right\} P^{[\alpha]}(D)(T). \end{aligned} \tag{10}$$

С учетом (5), (6) и (8)

$$P_{q+1}(D)\left\{M(t)T\right\} =$$

$$= (q+1)\sum_{\alpha=0}^{q}\left\{\sum_{j=\alpha}^{q}\beta_j\binom{j}{\alpha}t^{j-\alpha}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{k}P_q^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)\right\}(T).$$

Используя (7), получим

$$P_{q+1}(D)\left\{M(t)T\right\} =$$
$$= (q+1)\sum_{\alpha=0}^{q}\left\{\sum_{j=\alpha}^{q}\beta_j\binom{j}{\alpha}t^{j-\alpha}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{k}P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)\right\}(\delta)$$

или

$$\begin{aligned} P_{q+1}(D)\left\{M(t)T\right\} = (q+1)\sum_{\alpha=0}^{q}\left\{\sum_{j=\alpha}^{q}\beta_j\binom{j}{\alpha}\right\} \\ \times\sum_{k=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{k}t^{j-\alpha}\left\{P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)\right\}(\delta). \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислим

$$t^{j-\alpha}\left\{P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)\right\}(\delta),$$

здесь оператор $P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)$ – опреатор порядка не выше чем

$$\{m(q-1)-[\alpha-1-k]\}+\{m-(k+1)\} = mq-\alpha.$$

Следовательно,

$$P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}P^{[k+1]}(D)(\delta) = \sum_{s=0}^{mq-\alpha}a_s^{(q-1)}\delta^{(s)}.$$

Отсюда

$$t^{j-\alpha}\left\{P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}P^{[k+1]}(D)\right\}(\delta) = \sum_{s=0}^{mq-\alpha}a_s^{(q-1)}t^{j-\alpha}\delta^{(s)},$$

где коэффициенты $a_s^{(q-1)}$ выражаются через коэффициенты оператора $P(D)$ с помощью правила дискретной свертки.

Вычислим $t^{j-\alpha}\delta^{(s)}$:

$$\begin{aligned} < t^{j-\alpha}\delta^{(s)},\varphi > &= (-1)^{(s)} < \delta,\left(t^{j-\alpha}\varphi\right)^{(s)} > \\ &= (-1)^{(s)} < \delta,\sum_{p=0}^{s}\binom{s}{p}\left(t^{j-\alpha}\right)^{(p)}\varphi^{(s-p)} > \\ &= (-1)^{(s)} < \delta,\binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!\varphi^{(s-(j-\alpha))} > \\ &= (-1)^{(s)}\binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!(-1)^{(s-(j-\alpha))} < \delta,\varphi > . \end{aligned} \tag{12}$$

Следовательно,

$$t^{j-\alpha}\delta^{(s)} = \binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!(-1)^{(j-\alpha)}\delta^{s-(j-\alpha)}$$

и

$$\begin{aligned} t^{j-\alpha}\left\{P_{q-1}^{[\alpha-1-k]}(D)P^{[k+1]}(D)\right\}(\delta) = \\ = \sum_{s=j-\alpha}^{mq-\alpha}a_s^{(q-1)}\binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!(-1)^{j-\alpha}\delta^{(s-(j-\alpha))}. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (6) в (11), получим

$$\begin{aligned} P_{q+1}(D)\left\{M(t)T\right\} = (q+1)\sum_{\alpha=0}^{q}(-1)^{\alpha}\sum_{j=\alpha}^{q}\beta_j(-1)^j\binom{j}{\alpha} \\ \times\sum_{k=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{k}\sum_{s=j-\alpha}^{mq-\alpha}a_s^{(q-1)}\binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!\delta^{(s-(j-\alpha))}. \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогичные рассуждения в случае когда $m \geq q > 1$ также приводят к формуле (14). Отметим, что в случае $m = 1$ используется классический метод предварительного дифференцирования.

Таким образом, без потери общности можно утверждать, что

$$P_{q+1}(D)\left\{M(t)T\right\} = L(D)(\delta), \tag{15}$$

где $L(D)$ — обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка не выше чем mq:

$$\begin{aligned} L(D) = (q+1)\sum_{\alpha=0}^{q}(-1)^{\alpha}\sum_{j=\alpha}^{q}\beta_j(-1)^j\binom{j}{\alpha} \\ \times\sum_{k=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{k}\sum_{s=j-\alpha}^{mq-\alpha}a_s^{(q-1)}\binom{s}{j-\alpha}(j-\alpha)!D^{s-(j-\alpha)}. \end{aligned} \tag{16}$$

5. Элементарное решение уравнения сверток

Пусть $\mathcal{E}(t)$ — элементарное решение уравнения (3), тогда

$$\mathcal{M}(t)T * \mathcal{E}(t) = \delta \tag{17}$$

в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$.

Применяя оператор $P_{q+1}(D)$ к уравнению (17), с учетом формулы (15), получим в $\mathcal{D}'_+$

$$L(D)\mathcal{E}(t) = P_{q+1}(D)(\delta). \tag{18}$$

Теорема Мальгранжа-Эренпрайса [10] или [11] утверждает существование элементарного (фундаментального) решения любого линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, а если оно принадлежит сверточной алгебре, то оно единственно [9].

Пусть $E(t)$ — элементарное решение оператора $L(D)$, принадлежащее $\mathscr{D}'_+$, тогда в $\mathscr{D}'_+$ имеем:

$$\mathcal{E}(t) = P_{q+1}(D)E(t). \tag{19}$$

Следовательно, у уравнения сверток (3) существует и притом единственное решение при любой обобщенной функции $W \in \mathcal{D}'_+$. Это решение имеет вид

$$U = \mathcal{E} * W = P_{q+1}(D)\left\{E * W\right\}. \tag{20}$$

6. Пример

В качестве примера уравнения, имеющего структуру (3), рассмотрим уравнение:

$$\left(t^2T\right) * U = W,\ \forall W \in \mathcal{D}'_+. \tag{21}$$

Здесь

$$\mathcal{M}(t) = t^2,$$

$$T = \frac{Y(t)}{\omega} e^{pt} \sin \omega t,$$

где $Y(t)$ — функция Хевисайда,

$$P(D)(T) = \left\{ (D-p)^{(2)} + \omega^2 \right\} (T), \quad p > 0.$$

Согласно формулам (15) и (16)

$$P_3(D)\left(t^2 T\right) = L(D)\delta,$$

где

$$L(D) = 6D^2 - 12pD - 2\omega^2 + 6p^2.$$

В данном случае элементарным решением оператора $L(D)$ является функция

$$E(t) = \frac{\sqrt{3}}{6\omega} Y(t) e^{pt} \sinh\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\omega t\right),$$

$$E(t) \in \mathcal{D}'_+.$$

Применяя (20), получим решение уравнения (21):

$$U = P_3(D)\left\{E(t) * W\right\}.$$

7. Программная реализация итерационного метода полиномиального дифференцирования с помощью системы компьютерной математики Maple

На практике поиск коэффициентов оператора $L(D)$, как правило, связан с громоздкими вычислениями. Однако, предложенный в данной работе метод решения уравнения сверток (3) поддается алгоритмизации и может быть автоматизирован с помощью систем компьютерной алгебры.

Продемонстрируем реализацию итерационного метода полиномиального дифференцирования с помощью системы компьютерной математики Maple на примере, рассмотренном выше.

Зададим полином $M(t)$ и дифференциальный оператор $P(D)$

```
M:=t->t^2:
q:=degree(M(t),t):
m:=2:
a[0]:=p^2+omega^2:  a[1]:=-2*p:  a[2]:=1:# a[3]:=1:
P:=D->sum(a[k]*D^k,k=0..m):
```

Вычисляем ℓ-ую итерацию $P(D)$ и оператор $P_{q+1}(D)$. Здесь $Pq1$ означает $P_{q+1}(D)$.

```
Pl:=l->P(D)^l:
Pq1:=expand(Pl(q+1),D):
n:=degree(Pl(q+1));
b:=seq(coeff(Pl(q+1),D,i-1),i=1..n+1);
```

Находим элементарное решение оператора $P_{q+1}(D)$.

```
eq:=sum(a[k]/a[m]*diff(T(t),t$k),k=0..m)=0:
init:=seq((D@@k)(T)(0)=piecewise(k<>m-1,0,1),k=0..m-1):
solution:=dsolve({eq,init}):
T:=Heaviside(t)*rhs(solution);
```

Вычисляем результат применения оператора $P_{q+1}(D)$ к $M(t)T(t)$.

```
R:=b[1]*M(t)*Tau(t):
for i from 2 to n+1 do
    R:=R+b[i]*diff(M(t)*Tau(t),t$(i-1)):
end do:
Sq1:=R:
for i from n by -1 to 1 do
Sq1:=subs(diff(Tau(t),t$i)=D^i*Tau(t),Sq1):
end do:
Pq1MT:=expand(simplify(factor(Sq1)/(P(D)*Tau(t))));
```

Вычисляем коэффициента оператора $L(D)$.

```
S:=Pq1MT:
nS:=degree(S,D);
C[1]:=coeff(S,D,0):
for i from 2 to nS+1 do
C[i]:=coeff(S,D,i-1):
end do:
R:=subs(t=0,C[1])*Dirac(t):
for i from 2 to nS+1 do
   R:=R+C[i]*Dirac(i-1,t):
end do:
R1:=simplify(R):
R1:=subs(Dirac(t)=delta,R1):
for i from 1 to m*(q+1) do
R1:=subs(Dirac(i,t)=D^i*delta,R1):
end do:
L:=expand(R1/delta);
```

$$L := 6D^2 - 12pD - 2\omega^2 + 6p^2$$

Находим элементарное решение оператора $L(D)$.

```
N:=degree(L,D):
A:=seq(coeff(L,D,i-1),i=1..N+1):
Eq:=sum(A[j+1]*diff(Epsilon(t),t$j),j=0..N)=0:
init:=seq((D@@j)(Epsilon)(0)=piecewise(j<>N-1,0,1/A[N+1]),j=0..N-1):
E:=Heaviside(t)*rhs(dsolve({Eq,init}));
```

$$E = \mathit{Heaviside}\,(t)\left(\frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\left(p+\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\omega\right)t}}{\omega} - \frac{1}{12}\,\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\left(p-\frac{1}{3}\,\sqrt{3}\omega\right)t}}{\omega}\right)$$

Полученные выражения для оператора $L(D)$ и его элементарного решения $E(t)$ тождественно равны выражениям, полученным ранее.

Рассмотрим также пример решения уравнения сверток с помощью системы Maple.

Пусть в уравнении

$$[M(t)T(t)] * U = W, \tag{22}$$

в качестве W выступает функция, график которой изображен на рисунке 1.

Функцию W будем называть «выходным сигналом».

Пусть также

$$M(t) = t^2,$$

$$T(t) = \frac{Y(t)}{\omega} e^{pt} \sin \omega t$$

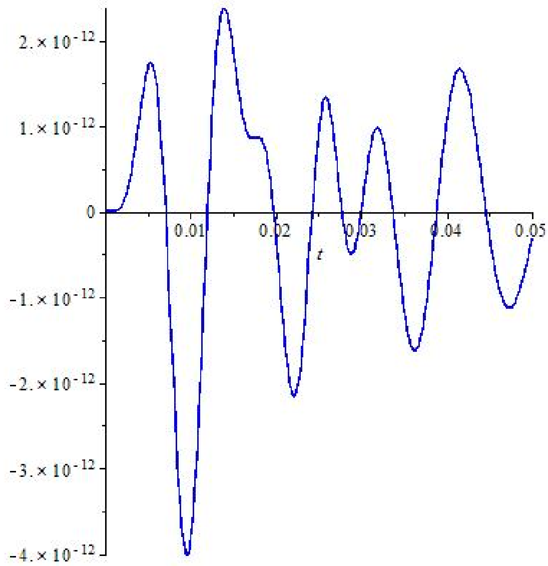

Рис. 1. График выходного сигнала

решение оператора

$$P(D) = \left\{(D-p)^{(2)} + \omega^2\right\},$$
$$p = -200, \omega = 300.$$

Функцию $A(t) = M(t)T(t)$ будем называть «аппаратной функцией».

С помощью описанного выше метода найдем решение уравнения (22), то есть неизвестную функцию $U(t)$, которую также будем называть «входным сигналом».

Задав значения $p = -200$ и $\omega = -300$, получим элементарное решение оператора $L(D)$:

```
omega:=500: p:=-200:
E;
```

$$\mathit{Heaviside}\,(t)\left(\frac{1}{6000}\,\sqrt{3}\mathrm{e}^{\left(-200+\frac{500}{3}\,\sqrt{3}\right)t} - \frac{1}{6000}\,\sqrt{3}\mathrm{e}^{\left(-200-\frac{500}{3}\,\sqrt{3}\right)t}\right)$$

В силу (20)

$$U = P_{q+1}(D)(E * W),$$

однако, используя свойства свертки, можно вычислить U как

$$U = P_{q+1}(D)(E) * W.$$

Найдем $P_{q+1}(D)(E)$:

```
Pq1E:=b[1]*E:
for i from 2 to n+1 do
    U1:=U1+b[i]*diff(E,t$(i-1));
end do:
Pq1E:=simplify(U1):
```

Здесь $Pq1E$ – результат действия оператора $P_{q+1}(D)$ на E.

Теперь найдем решение уравнения (22) $U = P_{q+1}(D)(E) * W$:

```
U:=simplify(int(subs(t=tau,Pq1E)*subs(t=t-tau,W),tau=-infinity..infinity));
```

График функции входного сигнала изображен на рисунке 2.

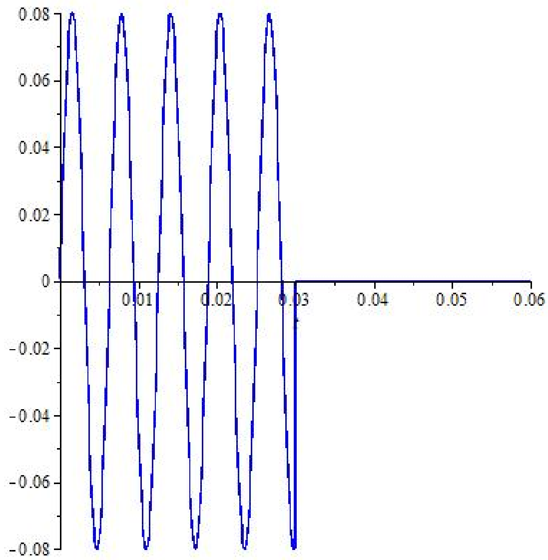

Рис. 2. График входного сигнала

8. Заключение

В данной работе был исследован класс уравнений сверток вида (3) в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. Для данного класса уравнений доказано существование и единственность решения, а также предложен метод получения решения. Кроме того, в работе приводится пример программной реализации метода решения уравнений класса (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

2. Kythe P.K. Fundamental solutions for differential operators and applications. Basel: Birkhäuser, 1996. 414 c.

3. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. 454 c.

4. Gindikin S.G., Volevich L.R. Distributions and convolution equations. Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992. 465 c.

5. Salekhova L., Chebotareva E. On a class of multiplicative-convolution equations // Int. Journal of Math. Analysis. 2014. Vol. 8. № 10. P. 495–501.

6. Salekhova L., Chebotareva E. Regular solutions of multiplicative-convolution equation in the Vladimirov algebra // Int. Journal of Math. Analysis. 2015. Vol. 9. № 54. P. 2681–2688.

7. Salekhov L.G., Salekhova L.L. The unique solvability of certain multiplicative-convolution equations // Russian Mathematics. 2012. Vol. 56. № 54. P. 57–60.

8. Salekhov L., Chebotareva E. On a class of convolution equations in D'+(R) // Int. Journal of Math. Analysis. 2014. Vol. 8. № 51. P. 2507–2512.

9. Khoan V.K. Distributions analyse de fourier opérateurs aux dérivées partielles. Paris:Vuibert, 1972. 296 p.

10. Friedlander F.G., Joshi M. Introduction to the theory of distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 188 p.

11. Malgrange B. Equations aux dérivées partielles á coefficients constants. Solution élementaire // C. R. Acad. Sci. 1953. Vol. 237. P. 1620–1622.

Поступила в редакцию 3.10.2017

Салехов Леонард Гарунович, к. ф.-м. н., доцент, кафедра теории функций и приближений, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия,

г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: leonardsalehov@mail.ru

Чеботарева Эльвира Валерьевна,, к. ф.-м. н., доцент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, 420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 35.
E-mail: chebotareva.elv@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Салехов Л. Г., Чеботарева Э. В. Итерационный метод полиномиального дифференцирования для одного класса уравнений сверток // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 3. С. 57—67.

L. G. Salekhov, E. V. Chebotareva
Iterative Method of Polynomial Differentiation for One Class of Convolution Equations

Keywords: convolution algebra, elementary (fundamental) solution of a operator with constant coefficients, characteristic polynomial of the differential operator with constant coefficients, symbolic power of operator, symbolic derivative.

PACS: 02.30.Hq

In this paper we consider a convolution equation in the space $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$. We prove existence and uniqueness of solution and describe a method of solving this convolution equation. Program implementation of the method and example of solving the convolution equation using the computer algebra system Maple is given.

REFERENCES

1. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravnenia matematicheskoi phisiki* (Equations of mathematical physics), Moscow: Fizmatlit, 2004, 400 p.

2. Kythe P.K. *Fundamental solutions for differential operators and applications*, Basel: Birkhäuser, 1996, 414 p.

3. Volchkov V.V. *Integral geometry and convolution equations*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003, 454 p.

4. Gindikin S.G., Volevich L.R. *Distributions and convolution equations*, Philadelphia: Gordon and Breach Sci. Publ., 1992, 465 p.

5. Salekhova L., Chebotareva E. On a class of multiplicative-convolution equations, *Int. Journal of Math. Analysis*, 2014, vol. 8, no. 10, pp. 495—501.

6. Salekhova L., Chebotareva E. Regular solutions of multiplicative-convolution equation in the Vladimirov algebra, *Int. Journal of Math. Analysis*, 2015, vol. 9, no. 54, pp. 2681—2688.

7. Salekhov L.G., Salekhova L.L. The unique solvability of certain multiplicative-convolution equations, *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 54, pp. 57—60.

8. Salekhov L., Chebotareva E. On a class of convolution equations in D'+(R), *Int. Journal of Math. Analysis*, 2014, vol. 8, no. 51, pp. 2507—2512.

9. Khoan V.K. *Distributions analyse de fourier opérateurs aux dérivées partielles*, Paris: Vuibert, 1972.

10. Friedlander F.G., Joshi M. *Introduction to the theory of distributions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 188 p.

11. Malgrange B. Equations aux dérivées partielles á coefficients constants. Solution élementaire, *C. R. Acad. Sci.*, 1953, vol. 237, pp. 1620—1622.

Received 3.10.2017

Salekhov Leonard Garunovich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: leonardsalehov@mail.ru

Chebotareva Elvira Valerevna, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, ul. Kremlyovskaya, 35, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: chebotareva.elv@gmail.com

Please cite this article in English as:
Salekhov L. G., Chebotareva E. V. Iterative Method of Polynomial Differentiation for One Class of Convolution Equations, *Space, Time and Fund. Interact.*, 2017, no. 3, pp. 57–67.