

УДК 530.12 + 531.51

© Фомин И. В., 2018

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В КОСМОЛОГИИ ФРИДМАНА СО СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ\***Фомин И. В. <sup>a, 1</sup><sup>a</sup> Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, 105005, г. Москва, Россия

В работе рассматривается метод точного анализа космологической динамики на ранней инфляционной стадии эволюции Вселенной Фридмана, которая определяется динамикой скалярного поля для случая минимального и неминимального взаимодействия поля и кривизны. Основу метода составляет приведение уравнений динамики к одинаковому виду для всех моделей. Предложенный подход позволяет сопоставлять модели, основанные на различных теориях гравитации.

*Ключевые слова:* скалярное поле, инфляция, модифицированные теории гравитации.

**EXACT SOLUTIONS IN FRIEDMANN COSMOLOGY WITH SCALAR FIELDS**Fomin I. V. <sup>a, 1</sup><sup>a</sup> Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russia

The method of exact analysis of cosmological dynamics at the early inflation stage of the evolution of the Friedman Universe, which is determined by the dynamics of the scalar field for the case of minimal and nonminimal interaction of the field and curvature is considered in this work. The basis of the method is to reduce the equations of dynamics to the same form for all models. The proposed approach allows us to compare models based on the different theories of gravity.

*Keywords:* scalar field, inflation, modified gravity theories.

PACS: 04.50.Kd

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.1.21-30

**Введение**

Несмотря на то, что стандартные инфляционные сценарии, основанные на теории гравитации Эйнштейна, успешно объясняют происхождение крупномасштабной структуры, анизотропию реликтового излучения и механизмы образования элементарных частиц [1–5], то есть дают последовательный метод объяснения происхождения Вселенной и ее дальнейшей эволюции, существуют проблемы, выходящие за рамки такого подхода, например, природа темной энергии [6, 7] на стадии повторного расширения Вселенной или построение теории квантовой гравитации. По этой причине, в настоящее время, рассматриваются космологические модели, основанные на модификациях гравитации Эйнштейна [7–9]. В рамках данного подхода, среди прочих, рассматриваются скалярно-тензорные теории гравитации и гравитация Эйнштейна-Гаусса-Бонне (см., например, [8, 9]).

Отметим, что скалярно-тензорные теории гравитации позволяют объяснить обе стадии ускоренного расширения без привлечения темной энергии. Также, скаляр Гаусса-Бонне возникает в

\*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 16-02-00488 А и 16-08-00618 А.

<sup>1</sup>E-mail: ingvor@inbox.ru

низкоэнергетическом пределе супергравитационного действия для суперструн [8], и гравитацию Эйнштейна-Гаусса-Бонне можно рассматривать как эффективную теорию квантовой гравитации.

Новые методы точных решений для космологических моделей со скалярно-тензорными теориями гравитации и с гравитацией Эйнштейна-Гаусса-Бонне были изложены ранее в работах [10–14], в которых, также, проводилось сопоставление со стандартными моделями как на уровне динамики, так и по параметрам космологических возмущений.

При анализе эволюции Вселенной на стадии космологической инфляции важную роль играет потенциал скалярного поля, который определяет характер инфляционных процессов и механизмы генерации элементарных частиц после завершения инфляции, таким образом, основной задачей данной работы является нахождение основных параметров, характеризующих модификации ОТО, для случая известных физических потенциалов, которые рассматривались в стандартной космологии. С этой целью предложен метод, позволяющий привести уравнения динамики в случае модифицированных теорий гравитации к стандартным уравнениям космологической инфляции с гравитацией Эйнштейна.

В первой части работы приводятся уравнения динамики в общем виде, включающие неминимальное взаимодействие скалярного поля и скаляров Риччи и Гаусса-Бонне, также функция, определяющая взаимодействие поля и его кинетической энергии. Во второй части рассматривается метод генерирования новых точных решений из известных для моделей с минимальным взаимодействием. В третьей части приводятся точные решения для моделей со скалярно-тензорной гравитацией для потенциала Хиггса и рассматривается общий метод получения точных решений. В четвертой части рассматриваются модели инфляции с гравитацией Эйнштейна-Гаусса-Бонне, показано влияние неминимального взаимодействия на потенциал скалярного поля и приводится расчет параметров, характеризующих такой тип гравитации, для потенциала  $V(\phi) \propto \cosh^2(A\phi)$ .

## 1. Уравнения космологической динамики во Вселенной Фридмана

Вначале запишем действие, которое определяет динамику скалярного поля на стадии космологической инфляции в системе единиц  $8\pi G = c = 1$

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} F(\phi) R - \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) - \frac{1}{2} \xi(\phi) R_{GB}^2 \right], \quad (1)$$

где  $R$  – скаляр Риччи,  $\phi$  – скалярное поле и  $V(\phi)$  – его потенциал, функция  $\omega(\phi)$  определяет взаимодействие поля и его кинетической энергии,  $\xi(\phi)$  определяет взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне  $R_{GB}^2 = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2$ .

Для случая однородной, изотропной, пространственно плоской вселенной Фридмана, геометрия которой определяется метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2)$$

получим уравнения динамики в следующем виде [15]

$$3FH^2 + 3H\dot{F} - \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - 12H^3\dot{\xi} = 0, \quad (3)$$

$$3FH^2 + 2H\dot{F} + 2F\dot{H} + \ddot{F} + \frac{\omega}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) - 8H^3\dot{\xi} - 8H\dot{H}\dot{\xi} - 4H^2\ddot{\xi} = 0, \quad (4)$$

$$\omega\ddot{\phi} + 3\omega H\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2\omega'_\phi + V'_\phi - 6H^2F'_\phi - 3\dot{H}F'_\phi + 12H^4\xi'_\phi + 12H^2\dot{H}\xi'_\phi = 0, \quad (5)$$

где точка означает производную по времени, параметр Хаббла  $H = \dot{a}/a$ ,  $V'_\phi = dV/d\phi$ .

Из трех уравнений (3)–(5) только два являются независимыми, поэтому динамику Вселенной на стадии инфляции можно рассматривать на основе системы из двух нелинейных дифференциальных уравнений для различных случаев взаимодействия скалярного поля и кривизны. Таким образом, для анализа космологической динамики на ранней стадии эволюции Вселенной будем использовать первые два уравнения (3)–(4).

## 2. Точные решения в моделях с минимальной связью

Рассмотрим случай  $\xi = 0$ ,  $F = 1$ , который соответствует минимальному взаимодействию скалярного поля и кривизны или теории гравитации Эйнштейна.

В таком случае, уравнения динамики (3)–(4) можно записать в следующем виде

$$3H^2 = \frac{\omega(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (6)$$

$$\dot{H} = -\frac{\omega(\phi)}{2} \dot{\phi}^2. \quad (7)$$

В контексте моделей с минимальным взаимодействием, как правило, рассматривается случай  $\omega = 1$ , однако, также можно рассматривать и модели с новым скалярным полем  $\varphi = \int \sqrt{\omega(\phi)} d\phi$ , таким образом, имеем аналогичные уравнения для скалярных полей  $\phi$  и  $\varphi$  с различными потенциалами и параметрами Хаббла.

Во многих работах ранее рассматривались различные способы решения системы уравнений (6)–(7), большое количество точных решений приведено в обзоре [16], классификация методов точных решений рассматривалась в работе [17]. В данном случае, воспользуемся методом, связанным с выбором параметра Хаббла (или масштабного фактора), что означает восстановление эволюции скалярного поля и его потенциала по заданной динамике.

Для этого запишем систему уравнений (6)–(7) для случая  $\omega = 1$  следующим образом

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (8)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}. \quad (9)$$

Таким образом, задавая параметр Хаббла, соответствующий ускоренному расширению Вселенной из системы уравнений (8)–(9) получим точные решения уравнений динамики. Некоторые точные решения, приведенные в работе [16], на основе которых предлагаются различные сценарии ранней Вселенной, представлены в таблице 1.

**Таблица 1**

Точные решения в космологических моделях с минимальным взаимодействием. Скалярное поле записывается с учетом его начального значения  $\phi - \phi_0 \rightarrow \phi$

Параметр Хаббла	Эволюция скалярного поля	Потенциал скалярного поля
$H(t) = -At + B$	$\phi(t) = \pm\sqrt{2A}t$	$V(\phi) = 3 \left( \mp\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B \right)^2 - A$
$H(t) = B \exp(-At)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{8B}{A}} \exp\left(-\frac{A}{2}t\right)$	$V(\phi) = \frac{3A}{8} \phi^2 \left( \frac{A}{8} \phi^2 - A \right)$
$H(t) = -\frac{AB}{3} \tan(At)$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln \sqrt{\frac{1+\sin(At)}{1-\sin(At)}}$	$V(\phi) = \frac{A^2 B(B-1)}{3} \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3}{2B}} \phi \right) - \frac{A^2 B^2}{3}$
$H(t) = \frac{AB}{3} \tanh(At)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{2B}{3}} \arcsin(\tanh(At))$	$V(\phi) = \frac{A^2 B}{3} \left( B \sin^2 \sqrt{-\frac{3}{2B}} \phi + \cos^2 \sqrt{-\frac{3}{2B}} \phi \right)$
$H(t) = A^2 B \coth(2Bt)$	$\phi(t) = A \ln(\tanh(Bt))$	$V(\phi) = A^2 B^2 \left[ (3A^2 - 2) \cosh^2 \left( \frac{\phi}{A} \right) + 2 \right]$
$H(t) = A^2 B \cot(2Bt)$	$\phi(t) = A \arctan(\cos(2Bt))$	$V(\phi) = A^2 B^2 \left[ (3A^2 - 2) \cosh^2 \left( \frac{\phi}{A} \right) - 3A^2 \right]$
$H(t) = \frac{B}{3t} - \frac{A}{3B}$	$\phi(t) = \sqrt{\frac{2B}{3}} \ln(t)$	$V(\phi) = \frac{B(B-1)}{3} \left( e^{-2\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi} - \frac{2Ae^{-\sqrt{\frac{3}{2B}}\phi}}{B(B-1)} \right) + \frac{A^2}{3B^2}$
$H(t) = A \left[ \frac{B+4}{6AB} t \right]^{-\frac{B}{B+4}}$	$\phi(t) = \left[ \frac{B+4}{6AB} t \right]^{\frac{2}{B+4}}$	$V(\phi) = 3A^2 \phi^{-B} \left( 1 - \frac{B^2}{6} \phi^{-2} \right)$
$H(t) = \frac{A^2 B}{6} \coth^3(Bt)$	$\phi(t) = \frac{A}{\sinh(Bt)}$	$V(\phi) = \frac{B^2}{12A^2} \phi^2 (\phi^2 + A) \left( \frac{\phi^4}{A^2} + 2\phi^2 + A^2 - 6 \right)$
$H(t) = C \ln(At + B)$	$\phi(t) = \sqrt{-\frac{8C}{A}} (At + B)$	$V(\phi) = 3C^2 \ln^2 \left( -\frac{A}{8C} \phi^2 \right) - \frac{8C^2}{\phi^2}$

Для генерирования новых точных решений из известных рассмотрим преобразования общего вида  $(H, V, \phi) \rightarrow (\bar{H}, U, \varphi)$  [17].

Далее, рассмотрим преобразование параметра Хаббла

$$\bar{H} = f(t)H, \quad (10)$$

где  $f(t)$  – произвольная функция времени.

С учетом уравнений (8)–(9), получим

$$U(\varphi) = 3H^2 f^2 + \frac{d}{dt}(fH), \quad (11)$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = -\frac{d}{dt}(fH) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \left( f + 2f\frac{\dot{H}}{H} \right) = \frac{\omega(\phi)}{2}\dot{\phi}^2. \quad (12)$$

Таким образом, переход от старых решений к новым осуществляется на основе выбора функции  $\omega(\phi) \equiv \omega(H(t))$  в уравнении

$$f + 2f\frac{\dot{H}}{H} = f(H) + f'_H H = \omega(H(t)). \quad (13)$$

Для случая постоянной функции  $\omega(H(t)) = n = const$ , из уравнения (13), получим

$$f(H(t)) = n + \frac{\lambda}{H}, \quad (14)$$

где  $\lambda$  – постоянная интегрирования.

Таким образом, с учетом уравнений (10)–(12), запишем соотношения между новыми и исходными точными решениями для функции (14)

$$\bar{H} = nH + \lambda, \quad (15)$$

$$\bar{a}(t) = Ca^n(t) \exp(\lambda t), \quad C = \bar{a}_0/a_0^n, \quad (16)$$

$$U(\varphi) = 3n^2 H^2 + 6\lambda n H + n\dot{H} + 3\lambda^2, \quad (17)$$

$$\varphi = \pm\sqrt{n}\phi, \quad (18)$$

где знак параметра  $n$  определяет связь между моделями с каноническими и фантомными полями.

Продемонстрируем данный метод на примере модели с потенциалом Хиггса и параметром Хаббла  $H(t) = B \exp(-At)$ , которому соответствует масштабный фактор  $a(t) = a_0 \exp(-\frac{B}{A}e^{-At})$ , подразумевающий двойное экспоненциальное расширение для случая  $A < 0$ .

На основе преобразований (15)–(18) запишем новые точные решения

$$\bar{H} = nB \exp(-At) + \lambda, \quad (19)$$

$$\bar{a}(t) = \bar{a}_0 \exp\left(\lambda t - \frac{nB}{A}e^{-At}\right), \quad (20)$$

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{8nB}{A}} \exp\left(-\frac{A}{2}t\right), \quad (21)$$

$$U(\varphi) = \frac{3A^2}{64}\varphi^4 + \left(\frac{3A\lambda}{4} - \frac{A^2}{8}\right)\varphi^2 + 3\lambda^2, \quad (22)$$

то есть получаем потенциал Хиггса с другой динамикой, также, для случая  $\lambda = A/6$  получим потенциал

$$U(\varphi) = \frac{3A^2}{64}\varphi^4 + 3\lambda^2, \quad (23)$$

соответствующий хаотической инфляции.

Отметим, что, записывая исходные уравнения (8)–(9) в контексте метода Иванова-Салопека-Бонда, описание которого приводится в обзоре [16],

$$V(\phi) = 3H^2 - 2H'^2, \quad (24)$$

$$\dot{\phi} = -2H'_\phi, \quad (25)$$

можно представить уравнение (17) в терминах скалярного поля

$$U(\varphi(\phi)) = 3n^2 H^2 + 6\lambda n H - 2nH'^2_\phi + 3\lambda^2. \quad (26)$$

Также, на основе уравнений (11)–(13) можно рассматривать более сложные преобразования точных космологических решений в моделях с минимальным взаимодействием посредством выбора функций  $\omega(H(t))$  или  $f(t)$ .

### 3. Космологические модели со скалярно-тензорной гравитацией

Скалярно-тензорные теории гравитации являются возможной альтернативой гравитации Эйнштейна для описания динамики Вселенной, в контексте которых, проблема интерпретации темной энергии на повторной стадии ускоренного расширения решается за счет модификации ОТО.

В данном случае, будем рассматривать материальные скалярные поля, такой подход основан на возможности конформного преобразования метрики  $\hat{g}^{\mu\nu} = F(\phi)g^{\mu\nu}$ , то есть перехода от представления Йордана (которому соответствуют геометрические скалярные поля) к представлению Эйнштейна [9].

В случае космологических моделей со скалярно-тензорной гравитацией  $\xi = 0$ ,  $\omega = \omega(\phi)$ ,  $F = F(\phi)$  запишем уравнения динамики (3)–(4) в виде

$$\frac{\omega(\phi)}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = 3FH^2 + 3H\dot{F}, \quad (27)$$

$$\omega(\phi)\dot{\phi}^2 = H\dot{F} - 2F\dot{H} - \ddot{F}. \quad (28)$$

Далее, на основе следующего представления функций  $F(\phi)$  и  $\omega(\phi)$

$$F(t) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(t)}, \quad F(\phi) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a^2(\phi)}, \quad (29)$$

$$\omega(t) = 1 - \beta_{ST} \left( \frac{3H^2}{\dot{H}a^2} \right), \quad \omega(\phi) = 1 + 3\beta_{ST} \left( \frac{H}{aH'} \right)^2, \quad (30)$$

где  $\beta_{ST}$  – постоянный параметр, определяющий неминимальное взаимодействие для случая скалярно-тензорных теорий гравитации, получим уравнения, аналогичные (8)–(9)

$$V(t) = 3H^2 + \dot{H}, \quad V(\phi) = 3H^2 - 2H'^2, \quad (31)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad \dot{\phi} = -2H'. \quad (32)$$

В качестве примера рассмотрим исходную модель с гравитацией Эйнштейна и потенциалом Хиггса (19)–(22).

Из уравнений (29)–(30) получим

$$F(\varphi) = 1 - \frac{\beta_{ST}}{a_0^2} \left( \frac{A\varphi^2}{8nB} \right)^{2\lambda/A} \exp\left(\frac{1}{4}\varphi^2\right), \quad (33)$$

$$\omega(\varphi) = 1 + \frac{3\beta_{ST}}{a_0^2 A^2} \left( A\varphi + \frac{8\lambda}{\varphi} \right)^2 \left( \frac{A\varphi^2}{8nB} \right)^{2\lambda/A} \exp\left(\frac{1}{4}\varphi^2\right). \quad (34)$$

Таким образом, на основе уравнений (29)–(32), можно транслировать точные решения из моделей с минимальным взаимодействием на случай скалярно-тензорных теорий гравитации и получать соответствующие параметры таких теорий.

### 4. Модели с неминимальной связью скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне

Для случая моделей с неминимальной связью скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне, которому соответствует  $F = 1$  в уравнениях (3)–(4), получим уравнения динамики в следующем виде

$$3H^2 = \frac{\omega(\phi)}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 12\xi H^3, \quad (35)$$

$$-2\dot{H} = \omega(\phi)\dot{\phi}^2 - 4\xi H^2 - 4\xi H(2\dot{H} - H^2). \quad (36)$$

Для поиска точных решений представим эту систему уравнений в терминах генерирующей функции  $g(t)$

$$V(\phi) = 3H^2 + 5Hg + \dot{H} + \dot{g}, \quad (37)$$

$$\frac{\omega(\phi)}{2}\dot{\phi}^2 = Hg - \dot{H} - \dot{g}, \quad (38)$$

$$g = -2\dot{\xi}H^2. \quad (39)$$

Отметим, что функция  $g$  определяет различие между параметрами Хаббла для случая гравитации Эйнштейна (или минимального взаимодействия) и Эйнштейна-Гаусса-Бонне  $g = H_E - H$ , в случае  $g = 0$  уравнения (37)–(38) переходят в (8)–(9) и  $\xi = const.$

Далее, рассмотрим, отдельно, два случая:

- Случай  $\omega(\phi) = 1.$

Для данного случая рассмотрим функцию  $g$ , которую определим из уравнения

$$Hg - \dot{g} = 0, \quad (40)$$

то есть  $g(t) = a(t)\alpha_{GB}$ , где  $\alpha_{GB}$  – постоянный параметр, определяющий взаимодействие поля и скаляра Гаусса-Бонне.

В данном случае, из (37)–(39), получим систему уравнений

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H} + 6\dot{a}\alpha_{GB}, \quad (41)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (42)$$

$$\dot{\xi} = -\left(\frac{\alpha_{GB}}{2}\right)\frac{a^3}{\dot{a}^2}. \quad (43)$$

Таким образом, потенциал, в данном случае, будет отличаться от потенциала скалярного поля в моделях с гравитацией Эйнштейна на слагаемое  $U_{GB} = 6\dot{a}\alpha_{GB}$ , которое появляется за счет взаимодействия поля и скаляра Гаусса-Бонне.

Для иллюстрации влияния неминимального взаимодействия скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне рассмотрим модель с квадратичным потенциалом и параметром Хаббла  $H(t) = -At + B$  из Таб. 1, которому соответствует масштабный фактор

$$a(t) = a_0 \exp\left(Bt - \frac{A}{2}t^2\right). \quad (44)$$

Из уравнений (41) и (43), для случая  $\phi(t) = \sqrt{2A}t$ , получим

$$V(\phi) = 3\left(-\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B\right)^2 + 6a_0\alpha_{GB}\left(-\sqrt{\frac{A}{2}}\phi + B\right)\exp\left(\frac{B\phi}{\sqrt{2A}} - \frac{1}{4}\phi^2\right) - A, \quad (45)$$

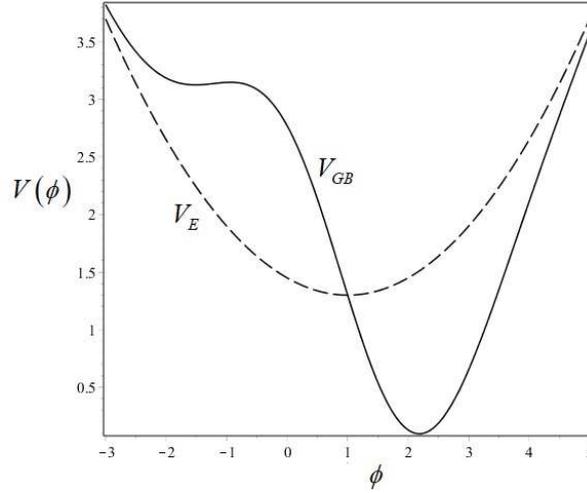
$$\xi(t) = \frac{a_0\alpha_{GB}}{2}\left[\frac{\exp\left(\frac{B^2 - (At - B)^2}{2A}\right)}{A(At - B)} + \sqrt{\frac{\pi}{2A^3}}e^{\frac{B^2}{2A}}\operatorname{erf}\left(\frac{At - B}{\sqrt{2A}}\right)\right] + const, \quad (46)$$

$$\xi(\phi) = \frac{a_0\alpha_{GB}}{2}\left[\frac{\exp\left(\frac{1}{2A}\left(B^2 - \left(\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B\right)^2\right)\right)}{A\left(\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B\right)} + \sqrt{\frac{\pi}{2A^3}}e^{\frac{B^2}{2A}}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\frac{A}{2}}\phi - B}{\sqrt{2A}}\right)\right] + const. \quad (47)$$

Потенциалы (45) для случая теории гравитации Эйнштейна и гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне приведены на Рис. 1, при построении графиков учитывалась ненулевая энергия вакуума, то есть  $V \rightarrow V + const.$

Таким образом, взаимодействие скалярного поля и скаляра Гаусса-Бонне создает дополнительное состояние фальшивого вакуума, из которого скалярное поле переходит в состояние истинного вакуума. Такой тип потенциалов часто рассматривается в контексте теории струн и супергравитации [8], что соответствует исходному утверждению о том, что скаляр Гаусса-Бонне возникает в низкоэнергетическом пределе действия для струн.

- Случай  $\omega(\phi) \neq 1.$



**Рис. 1.** Потенциал  $V_E$  для случая гравитации Эйнштейна с параметром  $\alpha_{GB} = 0$  и потенциал  $V_{GB}$ , соответствующий гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне с параметром  $\alpha_{GB} = 1$ .

Для данного случая рассмотрим функцию  $g$ , которую определим из уравнения

$$5Hg + \dot{g} = 0, \quad (48)$$

то есть  $g = a^{-5}\alpha_{GB}$ .

Таким образом, на основе следующего представления функций  $g(t)$  и  $\omega(t)$

$$g = a^{-5}\alpha_{GB}, \quad \omega(t) = 1 - \alpha_{GB} \left( \frac{6\dot{a}}{\dot{H}a^6} \right), \quad (49)$$

получим систему уравнений

$$V(\phi) = 3H^2 + \dot{H}, \quad (50)$$

$$\dot{\phi}^2 = -2\dot{H}, \quad (51)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\alpha_{GB}}{2a^3\dot{a}^2}, \quad (52)$$

что также позволяет использовать точные решения, приведенные ранее, для космологических моделей с гравитацией Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Для модели, определяемой параметром Хаббла  $H(t) = A^2B \coth(2Bt)$  с постоянной  $A = \sqrt{8/5}$ , получим

$$\xi(t) = \frac{25\alpha_{GB}}{128a_0^5B^3 \tanh(4Bt)} + const, \quad (53)$$

$$\omega(t) = 1 + \frac{3\alpha_{GB} \cosh(2Bt)}{a_0^5B \sinh^3(2Bt)}. \quad (54)$$

После подстановки обратной зависимости  $t = t(\phi)$  получим функции

$$\xi(\phi) = \frac{25\alpha_{GB}}{128a_0^5B^3} \left[ \frac{1}{4} \cosh\left(\frac{\phi}{A}\right) + \frac{1}{\cosh\left(\frac{\phi}{A}\right)} \right] + const, \quad (55)$$

$$\omega(\phi) = 1 + \frac{3\alpha_{GB}}{8a_0^5B} \left[ 2 \cosh^3\left(\frac{\phi}{A}\right) - 3 \cosh\left(\frac{\phi}{A}\right) \right], \quad (56)$$

которые соответствуют потенциалу  $V(\phi) = A^2B^2 \left[ (3A^2 - 2) \cosh^2\left(\frac{\phi}{A}\right) + 2 \right]$  в космологических моделях с гравитацией Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

## 5. Заключение

В данной работе рассматривались методы получения новых точных решений уравнений космологической динамики на ранней (инфляционной) стадии эволюции Вселенной из известных. Предложенный подход позволяет использовать решения, полученные для случая минимального взаимодействия скалярного поля и кривизны (гравитации Эйнштейна) для генерирования новых решений в такого же типа моделях с неминимальным взаимодействием, включающим скалярно-тензорные теории гравитации и гравитацию Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Поскольку физические механизмы реализации инфляционного сценария непосредственно связаны с потенциалом скалярного поля, предложенный подход направлен на использование точных решений для физических потенциалов, полученных в стандартных космологических моделях для обобщения на модели с модифицированной гравитацией.

Также отметим, что предложенный подход можно использовать в рамках приближенных методов, таких как приближение медленного скатывания [18], с нивелированием вклада кинетической энергии поля в динамику Вселенной на стадии инфляции, или кинетическое приближение, подразумевающее квазилинейную связь кинетической энергии скалярного поля и параметра состояния, рассмотренное в работах [19, 20].

Очевидно, что анализ космологической динамики может быть проведен и без связи со стандартными космологическими моделями, однако, наличие такой связи позволяет рассматривать модифицированные теории гравитации как некоторое параметризованное расширение ОТО, связанное со значением постоянных  $\beta_{ST}$  и  $\alpha_{GB}$ .

## 6. Благодарности

Эта работа была завершена во время визита автора в 2018 году в Университет Квазулу-Натал. Автор благодарен «Научному отделу астрофизики и космологии» и его директору профессору С.Д. Махараджу за теплый прием и «Фонду национальных исследований» ЮАР за финансовую поддержку. Также работа была частично поддержана грантами РФФИ 16-02-00488 А и 16-08-00618 А.

## Список литературы

1. Starobinsky A.A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B.* 1980. Vol. 91, pp. 99-102.
2. Guth A.H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D.* 1981. Vol. 23, pp. 347-356.
3. Linde A.D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B.* 1982. Vol. 108, pp. 389-393.
4. Linde A.D. Particle physics and inflationary cosmology. *Contemp. Concepts Phys.* 1990. Vol. 5, pp. 1-362.
5. Liddle A.R., Lyth D.H. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge.: Cambridge University Press, 2000. 414 p.
6. Frieman J., Turner M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 2008. Vol. 46, pp. 385-432.
7. Nojiri S., Odintsov S.D. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy. *Phys. Lett. B.* 2008. Vol. 659, pp. 821-826.
8. Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.* 2012. Vol. 513, pp. 1-189.
9. Faraoni V. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Dordrecht.: Cluwer Academic Publisher, 2004, 414 p.
10. Fomin I.V., Chervon S.V. The exact inflationary solutions in generalized scalar-tensor gravity theories // arXiv:1711.06870 [gr-qc]

11. Fomin I.V., Chervon S.V. On inflation with explicit parametric connection between GR and scalar-tensor gravity // arXiv:1802.10462 [gr-qc]
12. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact inflation in Einstein–Gauss–Bonnet gravity. *Grav. Cosmol.* 2017. Vol. 23, no. 4, pp. 367-374.
13. Fomin I.V., Chervon S.V. A new approach to exact solutions construction in scalar cosmology with a Gauss–Bonnet term. *Mod. Phys. Lett. A.* 2017. Vol. 32, no. 25, p. 1750129.
14. Fomin I.V., Morozov A.N. The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss–Bonnet term. *J. Phys. Conf. Ser.* 2017. Vol. 798, no. 1, p. 012088.
15. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J., Tavakol R. Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011. Vol. 1108, p. 021.
16. Chervon S.V., Fomin I.V. The method of generating functions in exact scalar field cosmology // arXiv:1704.08712 [gr-qc]
17. Фомин И.В., Червон С.В. О точных и приближенных решениях в космологии Фридмана // Известия Вузов (Физика). 2017. Т. 60. № 3. С. 46-56.
18. Liddle A.R., Parsons P., Barrow J.D. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev. D.* 1994. Vol. 50, pp. 7222-7232.
19. Fomin I.V. The models of cosmological inflation in the context of kinetic approximation. *J. Phys. Conf. Ser.* 2016. Vol.731, no. 1, p. 012004.
20. Фомин И.В. Модели космологической инфляции в кинетическом приближении // ТМФ. 2017. Т. 191. С. 354-365.

## References

1. Starobinsky A.A. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B.*, 1980, vol. 91, pp. 99-102.
2. Guth A.H. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D.*, 1981, vol. 23, pp. 347-356.
3. Linde A.D. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B.*, 1982, vol. 108, pp. 389-393.
4. Linde A.D. Particle physics and inflationary cosmology. *Contemp. Concepts Phys.*, 1990, vol. 5, pp. 1-362.
5. Liddle A.R., Lyth D.H. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge.: Cambridge University Press, 2000. 414 p.
6. Frieman J., Turner M., Huterer D. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 2008, vol. 46. pp. 385-432.
7. Nojiri S., Odintsov S.D. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy. *Phys. Lett. B.*, 2008, vol. 659, pp. 821-826.
8. Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 2012, vol. 513, pp.1-189.
9. Faraoni V. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Dordrecht.: Cluwer Academic Publisher, 2004. 414 p.
10. Fomin I.V., Chervon S.V. The exact inflationary solutions in generalized scalar-tensor gravity theories. arXiv:1711.06870 [gr-qc]
11. Fomin I.V., Chervon S.V. On inflation with explicit parametric connection between GR and scalar-tensor gravity. arXiv:1802.10462 [gr-qc]
12. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact inflation in Einstein–Gauss–Bonnet gravity, *Grav. Cosmol.*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 367-374.
13. Fomin I.V., Chervon S.V. A new approach to exact solutions construction in scalar cosmology with a Gauss–Bonnet term. *Mod. Phys. Lett. A.*, 2017, vol. 32, no. 25, p. 1750129.
14. Fomin I.V., Morozov A.N. The high-frequency gravitational waves in exact inflationary models with Gauss–Bonnet term. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2017, vol. 798, no. 1, p. 012088.
15. De Felice A., Tsujikawa S., Elliston J., Tavakol R. Chaotic inflation in modified gravitational theories. *JCAP*, 2011, vol. 1108, p. 021.

16. Chervon S.V., Fomin I.V. The method of generating functions in exact scalar field cosmology. arXiv:1704.08712 [gr-qc]
17. Fomin I.V., Chervon S.V. Exact and Approximate Solutions in the Friedmann Cosmology. *Russ. Phys. J.*, 2017, vol. 60, no. 3, pp. 427-440.
18. Liddle A.R., Parsons P., Barrow J.D. Formalizing the slow roll approximation in inflation. *Phys. Rev. D.*, 1994, vol. 50, pp. 7222-7232.
19. Fomin I.V. The models of cosmological inflation in the context of kinetic approximation. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 731, no. 1, p. 012004.
20. Fomin I.V. Cosmological inflation models in the kinetic approximation. *Theor. Math. Phys.*, 2017, vol. 191, no. 2, pp. 781-791.

#### Авторы

**Фомин Игорь Владимирович**, к. ф.-м. н., доцент кафедры физики; сотрудник лаборатории электродинамики движущихся сред, Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, 2-я Бауманская улица, д. 5, г. Москва, 105005, Россия.  
E-mail: [ingvor@inbox.ru](mailto:ingvor@inbox.ru)

#### Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Фомин И. В. Точные решения в космологии Фридмана со скалярными полями // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 21–30.

#### Authors

**Fomin Igor Vladimirovich**, Ph.D., Associate Professor of Physics Department, researcher in the Laboratory of Electrodynamics of Moving Media, Bauman Moscow State Technical University, 2-nd Baumanskaya str., 5, Moscow, 105005, Russia.  
E-mail: [ingvor@inbox.ru](mailto:ingvor@inbox.ru)

#### Please cite this article in English as:

Fomin I. V. Exact solutions in Friedmann cosmology with scalar fields. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 1, pp. 21–30.