УДК 517.917

УНИФИЦИРОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ СПИНОВ В МЕТРИКАХ ТИПА N*

Кулицкий А. В. [a, 1]

[a] Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, 119991, г. Москва, Россия.

На основе анализа уравнений для полей различных спинов на фоне невакуумных метрик типа pp-wave, относящихся к типу N по Петрову, произведено разделение переменных спинорного, векторного и тензорного полей, построено решение для полевых компонент в терминах потенциалов Дебая. Продемонстрировано, что универсальное уравнение типа Теукольского может быть построено не только для случая метрик типа D с нулевым тензором энергии-импульса, но также и для невакуумных метрик типа N.

Ключевые слова: разделение переменных, метрика плоской волны, формализм Ньюмена-Пенроуза, потенциалы Дебая, универсальное уравнение.

UNIFIED TREATMENT OF FIELDS OF DIFFERENT SPINS IN TYPE N METRICS

Kulitskii A. V. [a, 1]

[a] Lomonosov Moscow State University, 119991, Moscow, Russia

Based on a qualitative analysis of the field equations of different spins on the curved nonvacuum background pp-wave metrics of Petrov type N, the separation of the variables of the spinor, vector and tensor fields was made, the solution for the field components in terms of the Debye potentials was constructed. It is demonstrated that a universal equation of the Teukolsky type can be constructed not only for the case of metrics of type D with zero energy-momentum tensor, but also for non-vacuum metrics of type N.

Keywords: separation of variables, plane wave metric, Newman-Penrose formalism, Debye potentials, universal equation.

PACS: 34D08, 93C15
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.1.13-20

Введение

Волновые уравнения для безмассовых полей в искривленном пространстве были широко изучены с начала 1970-х годов. Решения, описывающие распространение полей на кривом фоне являются востребованными в контексте различных теорий, включая задачи об излучении в процессе рассеяния либо поглощения тестовых полей, также они нашли своё применение в теории супергравитации. В аналитическом подходе необходимо добиться разделения переменных, чтобы система могла сводиться к совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений одной переменной. В этом контексте удобным инструментом анализа волновых уравнений является формализм Ньюмена-Пенроуза [1]. Большой прогресс в этой области в начале 1970 гг. привнесли работы [2], [3] and [4], в которых было произведено разделение переменных поля Максвелла и линеаризованных уравнений Эйнштейна с использованием формализма Ньюмена-Пенроуза для метрик типа D по

*Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС»
[1] E-mail: `av.kulitsky@yandex.ru`

Петрову, а также разработан метод построения решения свободных уравнений на основе потенциалов Дебая [5]. Эта процедура нашла применение в теории возмущений черной дыр [8]. В 1973 г. Теукольским было получено универсальное мастер уравнение [6] для скалярного, электромагнитного, гравитационного полей и поля Вейля в метрике Керра. В работе [7] было построено решение уравнения для гравитационных возмущений, а в [9] решение уравнения Рариты-Швингера терминах потенциалов Дебая в вакуумных метриках типа D.

Еще одним важным классом решений уравнений Эйнштейна являются метрики типа N. К ним относятся метрики pp-wave, принадлежащие к классу решений, допускающих изотропные не расширяющиеся конгруэнции без сдвигов и кручения, а также существование изотропного вектора Киллинга. Данные решения находят применение в теории супергравитации [10] и теории струн [11]. В 1976 году Пенроузом было показано, что каждого пространства-времени имеется предел, известный, как предел Пенроуза [12], который в окрестности изотропной геодезической становится пространством типа pp-wave. Важным подклассом pp-wave является метрика ударной гравитационной волны Айхельбурга-Сексля [13], в которой появляется возможность описать рассеяние ультрарелятивистских частиц с большими углами отклонения в отличие от результатов пертурбативных методов.

В данной статье мы применим формализм Ньюмена-Пенроуза к метрикам типа N и построим решение свободных уравнений с использованием потенциалов Дебая.

1. Метрика pp-wave

Метрики плоской волны (pp-wave) впервые обсуждались в 1925 г. в работе Бринкмана [14]. Они являются точными решениями уравнений Эйнштейна, относятся к типу N по Петрову и, как было показано в работе [15], представляют собой плоские гравитационные волны и определяются требованием наличия ковариантно постоянного изотропного вектора $k = \partial_v$. В терминах комплексных координат $\zeta = x + iy$ линейный элемент может быть записан в следующей форме

$$ds^2 = dudv - H(u,\zeta,\bar{\zeta})dudu - d\zeta d\bar{\zeta}, \tag{1}$$

где H произвольная нелинейная функция аргументов ζ, $\bar{\zeta}$. Определитель $g = 1/8$ не зависит от координат. Символы Кристоффеля записываются в виде:

$$\Gamma^v{}_{uu} = -H_{,u}, \qquad \Gamma^v{}_{u\zeta} = -H_{,\zeta}, \qquad \Gamma^v{}_{u\bar{\zeta}} = -H_{,\bar{\zeta}}, \qquad \Gamma^\zeta{}_{uu} = -H_{,\bar{\zeta}}, \qquad \Gamma^{\bar{\zeta}}{}_{uu} = -H_{,\zeta}. \tag{2}$$

Тензоры Римана и Риччи имеют три и одну независимых компоненты соответственно.

$$R_{u,\zeta,u,\zeta} = \frac{1}{2}H_{,\zeta\zeta}, \qquad R_{u,\zeta,u,\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}H_{,\zeta\bar{\zeta}}, \qquad R_{u,\bar{\zeta},u,\bar{\zeta}} = \frac{1}{2}H_{,\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \qquad R_{uu} = -2H_{,\zeta\bar{\zeta}}. \tag{3}$$

Для того, чтобы метрика типа pp-wave была вакуумной необходимо наложить дополнительное условие $H_{,\zeta\bar{\zeta}} = 0$.

Выберем вектора изотропной тетрады в следующей форме

$$\mathbf{l} = \sqrt{2}\partial_v, \qquad \mathbf{n} = \sqrt{2}(\partial_u + H\partial_v), \qquad \mathbf{m} = \sqrt{2}\partial_\zeta, \qquad \bar{\mathbf{m}} = \sqrt{2}\partial_{\bar{\zeta}}, \tag{4}$$

тогда мы получим одну ненулевую проекцию девиатора тензора Риччи, нулевой скаляр кривизны. В формализме Ньюмена-Пенроуза тензор Вейля, имеющий десять независимых компонент, описывается пятью комплексными скалярами, из которых в отсутствии возмущений отличен от нуля лишь Ψ_4, который и определяет тип N по Петрову. Кроме того, в данной метрике из двенадцати спиновых коэффициентов будет только коэффициент ν ненулевой

$$\Psi_4 = -H_{,\bar{\zeta}\bar{\zeta}}, \qquad \Phi_{22} = -H_{,\zeta\bar{\zeta}}, \qquad \Lambda = 0 \qquad \nu = -H_{,\bar{\zeta}}. \tag{5}$$

В дальнейшем будут нам постоянно встречаться коммутационные соотношения для NP операторов (производных по направлениям векторов тетрады), в случае pp-wave имеющие довольно простой вид

$$[\Delta, D] = 0, \qquad [\delta, D] = 0, \qquad [\delta, \Delta] = -\bar{\nu} D, \qquad [\bar{\delta}, \delta] = 0. \tag{6}$$

Оператор Клейна-Гордона для скалярного поля, являющийся обобщением д'Аламбертиана на случай кривого пространства, в терминах NP операторов записывается в следующей форме:

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) = 2(D\Delta - \delta\bar{\delta}). \tag{7}$$

2. Разделение переменных в уравнениях Максвелла

Первую и вторую группу неоднородных уравнений Максвелла можно записать в терминах самодуального тензора электромагнитного поля

$$\mathscr{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -2\pi j^\mu, \tag{8}$$

который может быть разложен по бивекторам изотропной тетрады

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \star F_{\mu\nu}) = 2\Phi_0 \bar{m}_{[\mu} n_{\nu]} + 2\Phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]}) + 2\Phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]}. \tag{9}$$

Электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ в формализме Ньюмена-Пенроуза описывается совокупностью трех комплекснозначных скалярных функций, являющихся коэффициентами разложения самодуального бивектора

$$\Phi_0 = \mathscr{F}_{lm}, \qquad 2\Phi_1 = (\mathscr{F}_{ln} + \mathscr{F}_{m\bar{m}}), \qquad \Phi_2 = \mathscr{F}_{\bar{m}n}. \tag{10}$$

С их помощью система уравнений (8) посредством домножения на вектора изотропной тетрады с учётом (10) и определения спиновых коэффициентов и NP операторов может быть переписана в эквивалентной форме [1]. В частности для случая pp-wave, отбрасывая равные нулю спиновые коэффициенты, получим

$$D\Phi_1 - \bar{\delta}\Phi_0 = -2\pi J_l; \tag{11}$$

$$\delta\Phi_1 - \Delta\Phi_0 = -2\pi J_m; \tag{12}$$

$$D\Phi_2 - \bar{\delta}\Phi_1 = -2\pi J_{\bar{m}}; \tag{13}$$

$$\delta\Phi_2 - \Delta\Phi_1 + \nu\Phi_0 = -2\pi J_n. \tag{14}$$

Количество разделённых уравнений, которые можно получить из системы в NP формализме определяется числом главных изотропных направлений (ГИН). В частности для метрик типа D их два, в метриках типа N одно ГИН, поэтому свойством данной системы является возможность получения разделённого уравнения для величины Φ_0. Разделённое уравнение для скаляра Φ_0 уравнений Максвелла без источников pp-waves было независимо получено в работе [16].

Подействуем оператором δ на уравнение (11) и оператором D на (12), затем вычтем одно из другого, с учётом коммутационных соотношений (6) получим:

$$\Box\Phi_0 = -4\pi J_0, \qquad J_0 = \delta J_l - D J_m, \tag{15}$$

где оператор $\Box$ определён в (7).

Для того, чтобы восстановить выражение для вектор-потенциала A^μ в случае уравнений Максвелла с калибровочным условием Лоренца, которое эквивалентно (8) без источников в правой части

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha A^\mu - R^\mu{}_\nu A^\nu = 0, \qquad \nabla_\mu A^\mu = 0, \tag{16}$$

мы воспользуемся стандартной процедурой построения решения в терминах потенциалов Дебая, подробно описанную в работах [2], [3], [4] и [7]. Сопрягая оператор в левой части уравнения (15) и учитавая коммутационные соотношения (6), получим уравнение на потенциал Дебая ψ_E, который содержит всю информацию о поле Максвелла

$$\Box\psi_E = 0. \tag{17}$$

Сопряжённые операторы Ньюмена-Пенроуза в общем случае строятся посредством интегрирования по частям. Для них в метриках типа N справедливо следующее правило

$$D^\dagger = -D, \qquad \Delta^\dagger = -\Delta, \qquad \delta^\dagger = -\delta, \qquad \bar{\delta}^\dagger = -\bar{\delta}. \tag{18}$$

Вектор-потенциал A^μ, как функция комплексного ψ_E, записывается как оператор действующий на потенциал Дебая, который можно получить, сопрягая соответствующий оператор в правой части (15). Для обеспечения вещественности A^μ добавим к нему также комплексно сопряжённое выражение

$$A^\mu = \left[\bar{m}^\mu D - l^\mu\bar{\delta}\right]\psi_E + c.c. \tag{19}$$

Легко убедиться прямой подстановкой, что (19) является решением уравнения (16) и удовлетворяет условию Лоренца. Важно отметить, что это решение справедливо не только в случае вакуумных pp-wave, поскольку свертка тензора Риччи, имеющего только одну ненулевую компоненту R_{uu} с A^μ с учётом (4) обращается в нуль. Это свойство является отличительной чертой метрик типа N.

Для того, чтобы получить выражение для NP скаляров поля Максвелла необходимо спроектировать (10) на вектора изотропной тетрады

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= DA_m - \delta A_l, \\ 2\Phi_1 &= DA_n - \Delta A_l + \bar{\delta}A_m - \delta A_{\bar{m}}, \\ \Phi_2 &= \bar{\delta}A_n - \Delta A_{\bar{m}} + \nu A_l. \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (19) в данные соотношения, окончательно получим выражение для скаляров через потенциалы Дебая

$$\Phi_0 = -2D^2\psi_E, \qquad \Phi_1 = -2D\bar{\delta}\psi_E, \qquad \Phi_2 = -2\bar{\delta}^2\psi_E. \tag{21}$$

3. Разделение переменных в уравнениях гравитационных возмущений

Рассмотрим малые возмущения фоновой метрики, которые либо создаются внешними источниками, описываемыми тензором энергии импульса $T_{\mu\nu}$ либо имеют чисто волновую природу. Полный метрический тензор представим в виде суммы фоновой и возмущённой части

$$g_{\mu\nu} = g^A_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{22}$$

Контравариантный метрический тензор определяется как $g^{\mu\nu} = g^{A\mu\nu} - h^{\mu\nu}$. В NP формализме гравитационное поле описывается набором величин, в которые входят векторы изотропной тетрады, а также тетрадные проекции девиаторов тензора Риччи и тензора Вейля. Они также представимы в форме суммы фоновой и возмущенной частей

$$l_\mu = l^A_\mu + l^B_\mu, \qquad n_\mu = n^A_\mu + n^B_\mu, \qquad m_\mu = m^A_\mu + m^B_\mu, \qquad \bar{m}_\mu = \bar{m}^A_\mu + \bar{m}^B_\mu, \tag{23}$$

$$l^\mu = l^{A\mu} - l^{B\mu}, \qquad n^\mu = n^{A\mu} - n^{B\mu}, \qquad m^\mu = m^{A\mu} - m^{B\mu}, \qquad \bar{m}^\mu = \bar{m}^{A\mu} - \bar{m}^{B\mu}. \tag{24}$$

$$D = D^A + D^B, \quad \Delta = \Delta^A + \Delta^B, \quad \varepsilon = \varepsilon^A + \varepsilon^B, \quad \kappa = \kappa^A + \kappa^B, \quad \Psi_0 = \Psi_0^A + \Psi_0^B, \quad \Phi_{12} = \Phi_{12}^A + \Phi_{12}^B. \tag{25}$$

В метриках типа N отличными от нуля фоновыми величинами являются ν^A, Ψ_4^A and Φ_{22}^A. Рассмотрим систему уравнений Ньюмена-Пенроуза, в частности тождества Бианки, в формулировке Пирани [17]. Разложим их до первого порядка по возмущённым параметрам, во всех формулах ниже для удобства обозначений будем опускать индекс A у фоновых величин. Возмущённые компоненты девиаторов заменим на проекции тензора энергии импульса на векторы изотропной тетрады, используя уравнения Эйнштейна. После этого первая пара возмущённых тождеств Бианки может быть записана в виде:

$$\bar{\delta}\Psi_0{}^B - D\Psi_1{}^B = 4\pi\big[\delta T^B_{ll} - DT^B_{lm}\big]; \tag{26}$$

$$\Delta\Psi^B_0 - \delta\,\Psi^B_1 \;\; = 4\pi\big[\delta T^B_{lm} - DT^B_{mm}\big]. \tag{27}$$

Произведём разделение переменных подобно случаю поля Максвелла. Подействуем опертором δ на уравнение (26), оператором D на (27), и после вычитания первого из второго получим

$$\Box\Psi^B_0 = 8\pi T^B_0, \qquad\qquad T^B_0 = 2D\delta T^B_{lm} - D^2 T^B_{mm} - \delta^2 T^B_{ll}. \tag{28}$$

Сопрягая оператор в левой части уравнения, получим уравнение на потенциал Дебая. После сопряжения оператора, стоящего в правой части (28) в соответствии с правилами (18), может быть получено выражение для потенциала $\psi^{\mu\nu}$

$$\Box\psi_G = 0, \tag{29}$$

$$\psi^{\mu\nu} = 2\left(2l^{(\mu}\bar{m}^{\nu)}\bar{\delta}D - \bar{m}^\mu\bar{m}^\nu D^2 - l^\mu l^\nu\bar{\delta}^2\right)\psi_G + c.c, \tag{30}$$

которое удовлетворяет обобщенному уравнению Фирца-Паули на случай кривого фона Лихеровицем [18] вместе с калибровочным условием

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\psi_{\mu\nu} + 2R^\sigma{}_\mu{}^\tau{}_\nu{}^{(0)}\psi_{\sigma\tau} - 2R^\sigma{}_{(\nu}{}^{(0)}\psi_{\mu)\sigma} = 0; \qquad \nabla_\mu\psi^{\mu\nu} = 0, \tag{31}$$

где $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}h$, $h = g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$, $\psi = g^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$. В случае невакуумного фона должно быть введено дополнительное калибровочное условие $\psi = 0$, которое автоматически выполняется для (30). Свёртка $\psi_{\mu\sigma}$ с тензором Риччи как и в случае поля Максвелла обращается в нуль.

Для получения возмущенных скаляров Вейля, необходимо построить оператор перехода от $h_{\mu\nu}$ к величинам Ψ^B_i. Решение (30) подразумевает, что источники T^B_{ij} и скаляр кривизны Λ^B равны нулю. Следуя работе [7], обратимся к отысканию возмущенных тетрадных проекций тензора Вейля, для возмущения которого справедливо следующее равенство

$$C^B_{\mu\nu\rho\sigma} = R^B_{\mu\nu\rho\sigma} - (\Phi_{\mu\rho}h_{\nu\sigma} - \Phi_{\mu\sigma}h_{\nu\rho} + \Phi_{\nu\sigma}h_{\mu\rho} - \Phi_{\nu\rho}h_{\mu\sigma}). \tag{32}$$

Возмущение тензора Римана можно найти в [19]

$$R^B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(h_{\beta\gamma;\alpha\delta} + h_{\alpha\delta;\beta\gamma} - h_{\alpha\gamma;\beta\delta} - h_{\beta\delta;\alpha\gamma} + R^B_{\alpha\lambda\gamma\delta}h^\lambda{}_\beta - R^B_{\beta\lambda\gamma\delta}h^\lambda{}_\alpha). \tag{33}$$

Необходимо отметить, что проекции тензора Вейля на векторы изотропной тетрады также содержат в себе свертки невозмущенного тензора Вейля с возмущенной тетрадой, которую в соответствии с (30) и определением

$$h_{\mu\nu} = 2\left[l^B_{(\mu}n_{\nu)} + l_{(\mu}n^B_{\nu)} - m^B_{(\mu}\bar{m}_{\nu)} - m_{(\mu}\bar{m}^B_{\nu)}\right] \tag{34}$$

можно записать в виде разложения по векторам фоновой тетрады

$$l^{B\mu} = 0, \qquad\qquad n^{B\mu} = (\bar{m}^\mu\bar{\delta}D - l^\mu\bar{\delta}^2)\psi_G + c.c., \tag{35}$$

$$m^{B\mu} = (\bar{m}^\mu D^2 - l^\mu\bar{\delta}D)\psi_G, \qquad\qquad \bar{m}^{B\mu} = (m^\mu D^2 - l^\mu\delta D)\bar{\psi}_G. \tag{36}$$

В итоге выражение для возмущенных скаляров Вейля в метриках типа N может быть получено с применением компьютерной автоматизации вычислений

$$\Psi_0^B = -C^B_{lmlm} = -D^4\psi_G; \tag{37}$$
$$\Psi_1^B = -C^B_{lnlm} = -D^3\bar{\delta}\psi_G; \tag{38}$$
$$\Psi_2^B = -(C^B_{lnln} - C^B_{lnm\bar{m}}) = -D^2\bar{\delta}^2\psi_G; \tag{39}$$
$$\Psi_3^B = -C^B_{nln\bar{m}} = -D\bar{\delta}^3\psi_G; \tag{40}$$
$$\Psi_4^B = -C^B_{n\bar{m}n\bar{m}} = -\bar{\delta}^4\psi_G - \Phi_{22}D^2\bar{\psi}_G. \tag{41}$$

4. Безмассовое поле спина 1/2

В данном разделе мы продемонстрируем, что уравнения Вейля, описывающие безмассовое поле нейтирно на кривом фоне в формализме двухкомпонентных спиноров также приводит к разделённым волновым уравнениям.

Уравнения Вейля с источниками в двухкомопнентной форме записывается в виде

$$\nabla^A{}_{B'}\chi_A = j_{B'}, \tag{42}$$

где χ^A – двухкомпонентный спинор. Эквивалентно в формализме Ньюмена-Пенроуза его можно переписать [17] в следующем виде для случая pp-wave, опуская равные нулю спиновые коэффициенты

$$\bar{\delta}\chi_0 - D\chi_1 = j_{0'}, \tag{43}$$
$$\Delta\chi_0 - \delta\chi_1 = j_{1'}, \tag{44}$$

аналогично случаю векторного и тензороного полей произведем разделение переменных

$$\Box\chi_0 = N_0, \qquad N_0 = Dj_{1'} - \delta j_{0'}, \tag{45}$$

и запишем решение свободного уравнения спинорных компонент в терминах потенциалов Дебая

$$\chi_0 = -D\psi_W, \qquad \chi_1 = -\bar{\delta}\psi_W, \tag{46}$$

где ψ_W удовлетворяет уравнению

$$\Box\psi_W = 0. \tag{47}$$

5. Универсальное уравнение для произвольного спина в метриках типа N

Универсальное мастер-уравнение для полевых компонент произвольного спина для случая вакуумных метрик типа D по Перову, в частности для метрики Керра, было записано Теукольским [6] в 1973 году. Уравнение зависело от параметра s (спина). Изменяя значение параметра, можно было получить уравнение для любого конкретного спина. До недавнего времени считалось, что подобное универсальное уравнение справедливо только для вакуумных метрик типа D. Однако, мы продемонстрируем, что подобное уравнение существует также и для метрик типа N даже в невакуумном случае.

Как можно заметить, разделённые уравнения спинорного (45), векторного (15) и тензорного (28) полей похожи друг на друга. Нам следует записать их в универсальной форме

$$\Box\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{J}_0; \tag{48}$$

где полевые компоненты $\mathfrak{F}_0$ и источники $\mathfrak{J}_0$ для каждого конкретного спина определены в Таблице 1. Данное уравнение для метрик типа pp-wave не содержит спинового параметра в самих уравнениях.

Таблица 1. Полевые величины и соответствующие члены с источниками для полей различных спинов

Спин (s)	Полевые компоненты ($\mathfrak{F}$)	Источники ($\mathfrak{J}$)
0	φ	
$\frac{1}{2}$	χ_0	N_0
1	Φ_0	$4\pi J_0$
2	Ψ_0^B	$8\pi T_0$

6. Заключение

Таким образом, нами построено универсальное уравнение для полей произвольного спина. В отличии от метрик типа D, где два ГИН и соответственно, две компоненты поля, для которых можно осуществить разделение переменных, в метриках типа N, присутствует только одна компонента. Это φ для скалярного поля, χ_0 для поля Вейля, Φ_0 и Ψ_0 для векторного и тензорного полей соответственно. Обобщая (21), (37)–(41) and (46), решение для компонент свободного поля произвольного спина s в терминах потенциалов Дебая ψ, удовлетворяющих уравнению $\Box\psi = 0$ в случае вакуумных pp-wave можно записать в универсальной форме $\mathfrak{F}_i = -D^{(2s-i)}\bar{\delta}^i\psi$, $i = \overline{0, 2s-1}$. Таким образом, потенциалы Дебая позволяют построить решения свободных уравнений по моцью $2s$-кратного дифференцирования.

References

1. Newman E., Penrose R. An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 1962, no. 3, p. 566.

2. Cohen J.M., Kegeles L.S. Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure. *Phys. Rev. D*, 1974. Vol. 10, no. 4, pp. 1070-1084. doi: 10.1103/PhysRevD.10.1070

3. Kegeles L.S., Cohen J.M. Constructive procedure for perturbations of spacetimes. *Phys. Rev. D*, 1979. Vol. 19, no. 6, pp. 1641-1664. doi: 10.1103/PhysRevD.19.1641

4. Wald R.M. Construction of Solutions of Gravitational, Electromagnetic, Or Other Perturbation Equations from Solutions of Decoupled Equations. *Phys. Rev. Lett.*, 1978. Vol. 41, no. 4, pp. 203-206. doi: 10.1103/PhysRevLett.41.203

5. Debye P. Der lichtdruck auf Kugeln von beliegigem Material. *Ann. Phys.*, 1909. Vol. 30, pp. 57-136.

6. Teukolsky S.A. Perturbations of a rotating black hole. 1. Fundamental equations for gravitational electromagnetic and neutrino field perturbations. *Astrophys. J.*, 1973. Vol. 185, no. 2, pp. 635-647. doi: 10.1086/152444

7. Chrzanowski P.L. Vector Potential and Metric Perturbations of a Rotating Black Hole. *Phys. Rev. D*, 1975. Vol. 11, no. 8, pp. 2042-2062. doi: 10.1103/PhysRevD.11.2042

8. Dias O.J.C., Reall H.S., Santos J.E. Kerr-CFT and gravitational perturbations. *JHEP*, 2009. Vol. 2009, no. 08, p. 101. doi: 10.1088/1126-6708/2009/08/101

9. Torres Del Castillo G.F. Debye potentials for Rarita-Schwinger fields in curved space-times. *J. Math. Phys.*, 1989. Vol. 30, no. 6, p. 1323. doi: 10.1063/1.528312

10. Silva G.A. Plane waves and vacuum interpolation. hep-th/0212074.

11. Blau M., Figueroa-O'Farrill J.M., Hull C., Papadopoulos G. Penrose limits and maximal supersymmetry. *Class. Quant. Grav.*, 2002. Vol. 19, no. 10, L87.

12. Penrose R. Any space-time has a plane wave as a limit. *Differential geometry and relativity.* Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 271–275

13. Aichelburg P.C., Sexl R.U. On the Gravitational field of a massless particle. *Gen. Rel. Grav.*, 1971. Vol. 2, no. 4, pp. 303-312.

14. Brinkmann H.W. Einstein spaces which are mapped conformally on each other. *Math. Ann.*, 1925. Vol. 94, no. 1, pp. 119-145.

15. Peres A. Some Gravitational Waves. *Phys. Rev. Lett.*, 1959. Vol. 3, no. 12, pp. 571-572. doi: 10.1103/PhysRevLett.3.571

16. Duztas K., Semiz I. The decoupling problem of the Proca equation; and treatment of Dirac, Maxwell and Proca fields on the resulting pp-wave spacetimes. *Gen. Rel. Grav.*, 2016. Vol. 48, p. 99. doi: 10.1007/s10714-016-2097-3.

17. Pirani F.A.E. *Lectures on General Relativity.* Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics. Vol. 1. New Jersey: Prentice-Hall; 1964, pp. 249-373.

18. Lichnerowicz A. *Relativity, Groups and Topology.* New York: Gordon and Breach Science Publishers, Inc.; 1964, 827 p.

19. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. *Gravitation.* San Francisco, 1973, 1279 p.

Авторы

Кулицкий Александр Валерьевич, магистрант, кафедра теоретической физики, Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, ул. Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия.
E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Кулицкий А. В. Унифицированное описание полей различных спинов в метриках типа N // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 1. С. 13—20.

Authors

Kulitskii Aleksander Valer'evich, graduate student, Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia
E-mail: av.kulitsky@yandex.ru

Please cite this article in English as:

Kulitskii A. V. Unified treatment of fields of different spins in type N metrics. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 1, pp. 13–20.