УДК 531.37, 514.82

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Бабурова О. В.[a,b,1], Портнов Ю. А.[b,2], Фролов Б. Н.[a,3], Шамрова В. Е.[a,4]

[a] ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», г. Москва, 119992, Россия
[b] ФГБОУ ВПО Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), г. Москва, 125319, Россия

Доказано, что в пространстве параметров группы вращений реализуется принцип геодезических для свободного вращения твердого тела. А именно, показано, что свободное вращение твердого тела соответствует в римановом пространстве параметров группы вращений кривой, являющейся геодезической относительно метрики Киллинга–Картана группы вращений.

Ключевые слова: группа вращений как риманово пространство, углы Эйлера, метрика Киллинга–Картана, вращение твердого тела, принцип геодезических.

ON GEODESIC IN THE SPACE OF THE GROUP ROTATION PARAMETERS

Babouriva O. V.[a,b,1], Portnov Yu. A.[b,2], Frolov B. N.[a,3], Shamrova V. E.[a,4]

[a] Moscow Pedagogical State University, 119992, Moscow, Russia
[b] Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, 125319, Russia

It is proved that the geodesic principle for the free rotation of a rigid body is realized in the parameter space of the rotation group. Namely, it is shown that a free rotation of a rigid body corresponds, in the Riemannian space of the rotation group parameters, to a curve, which is a geodesic relative to the Killing–Cartan metrics of the rotation group.

Keywords: Rotation group as Riemannian space, Euler angles, Killing–Cartan metric, rigid body rotation, geodesic principle.

PACS: 04.50.Kd, 02.20.Hj
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.2.18-27

Введение

Общепринятым подходом к описанию динамики физических систем является исследование зависимости динамических переменных от координат пространства-времени. Мы обращаем внимание на то, что наряду с указанным подходам было открыто и развивается многими авторами [1–10] другое специальное направление в фундаментальной теоретической физике, которое заключается в том, что *описание динамики физических процессов происходит не только в координатном*

[1] E-mail: ov.baburova@mpgu.edu
[2] E-mail: portnovyura@yandex.ru
[3] E-mail: bn.frolov@mpgu.edu
[4] E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

пространстве (и не только в импульсном пространстве), а также в пространстве параметров симметрии той группы Ли, которая описывает данный физический процесс.

Если ограничиться только пространственно-временными симметриями, описываемыми группой Пуанкаре, то стандартное координатное описание эквивалентно описанию зависимости динамических переменных от координат пространства-времени (что эквивалентно зависимости от параметров подгруппы трансляций), в то время как при новом нестандартном описании учитывается также зависимость динамических переменных от параметров подгруппы 4-вращений, что увеличивает число динамических степеней свободы физической системы. Впервые данная идея, по-видимому, была высказана в работе [1], автор которой руководствовался целью уравнять динамические роли массы и спина. При объединенном учете пространственно-временных и внутренних степеней свободы системы следует учитывать возможную зависимость динамических переменных также от параметров соответствующих групп внутренних симметрий [2].

В данной работе мы приводим пример, связанный с анализом пространства параметров группы вращений, который говорит о том, что указанный выше нестандартный подход действительно может иметь отношение к адекватному описанию физической системы.

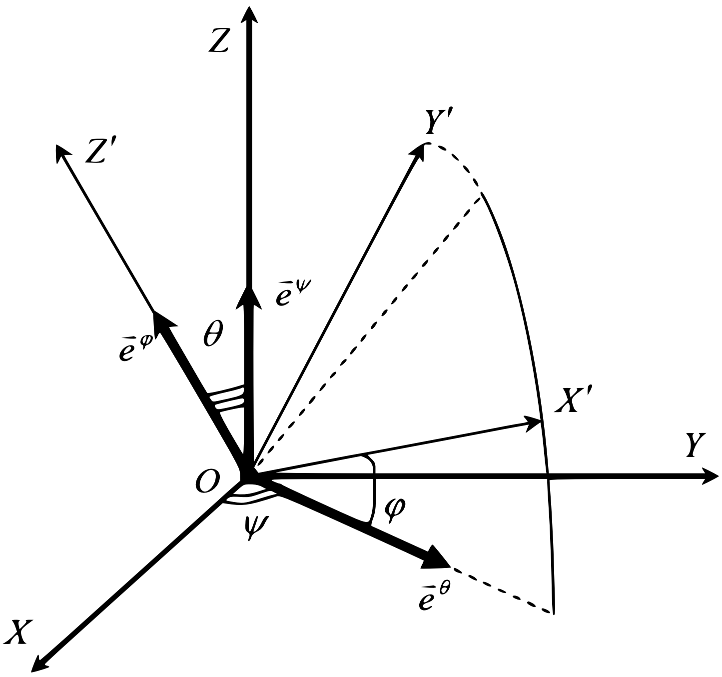

Рис. 1. Взаимное расположение углов

1. Пространство параметров группы вращений

Группа вращений $SO(3)$ как многообразие – это компактное топологическое пространство, образованное множеством точек, каждая из которых является вращением g в евклидовом пространстве R_3 [11]. Параметризируем пространство углами Эйлера, для этого возьмем неподвижную относительно далеких звезд систему координат K, и неподвижную относительно тела штрихованную систему координат K' (см. рис. 1). Тогда углом φ поворота тела вокруг оси OZ' (угол собственного вращения) является угол между осью OX' и линией пересечения плоскостей $X'OY'$ и XOY (линией узлов). Углом ψ поворота тела вокруг оси OZ (угол прецессии) является угол между осью OX и линией узлов. Углом θ поворота тела вокруг линии узлов (угол нутации) является угол между осями OZ и OZ'. При параметризации углами Эйлера вращение может быть представлено как композиция трех поворотов:

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кривая на многообразии группы вращений – это непрерывная совокупность поворотов $R(\lambda)$ вокруг одного и того же направления в пространстве. Например, матрицу поворота вокруг оси OX разложим в ряд по малому параметру θ:

$$R_x(\theta) = R_x(0) + \left.\frac{dR_x(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} \cdot \theta + ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \theta + ...,$$

$$\vec{e}_1 = \frac{dR_x(\theta)}{d\theta}.$$

Здесь по определению вектор $\vec{e}_1$ является касательным вектором (дифференциальным оператором) к данной кривой. Аналогично определяются векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, представляющие собой касательные векторы (дифференциальные операторы) к кривым, геометризующим вращения, соответственно, вокруг осей OY и OZ. Перенесенные в единицу группы вращений, эти векторы называются «генераторами вращений» вокруг, соответственно, осей OX, OY и OZ. Им соответствуют следующие матрицы:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Генераторы вращений позволяют получить соответствующие кривые вращений относительно осей OX, OY и OZ по формулам: $\exp(I_i\theta)$, $i = 1, 2, 3$.

Для дальнейшего важно получить выражения для генераторов вращений через определяемый углами Эйлера координатный голономный базис. Как следует из определение углов (см. рис. 1), связь между неголономным ортогональным базисом $\vec{e}^{\,i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и голономным координатным базисом $\vec{e}^{\,\alpha}$ $(\alpha = \varphi, \psi, \theta)$ имеет вид:

$$\vec{e}^{\,1} = \vec{e}^{\,\varphi} \sin\theta \sin\psi + \vec{e}^{\,\theta} \cos\psi,$$

$$\vec{e}^{\,2} = -\vec{e}^{\,\varphi} \sin\theta \cos\psi + \vec{e}^{\,\theta} \sin\psi,$$

$$\vec{e}^{\,3} = \vec{e}^{\,\varphi} \cos\theta + \vec{e}^{\,\psi}.$$

Эта связь стандартно представляется в виде

$$\vec{e}^{\,i} = h^i{}_\alpha \vec{e}^{\,\alpha}, \quad (\alpha = \varphi, \psi, \theta), \quad (i = 1, 2, 3),$$

где матрица тетрадных коэффициентов $h^i{}_\alpha$ равна

$$h^i{}_\alpha = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ -\sin\theta\cos\psi & 0 & \sin\psi \\ \cos\theta & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В касательном пространстве группы вращений вводится в качестве операции умножения оператор коммутации $[x, y] = xy - yx$, обладающий свойствами

$$[x, y] = -[y, x] \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Коммутатор генераторов вращений в касательном пространстве равен $[I_i, I_j] = \varepsilon_{ijk} I_k$, где ε_{ijk} – анти-симметричный тензор с компонентами

$$\varepsilon_{1jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{2jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{3jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для генераторов вращений $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ в координатном пространстве имеем

$$[\vec{e}_i, \vec{e}_j] = c_i{}^k{}_j \vec{e}_k \quad c_i{}^k{}_j = \varepsilon_{ikj}.$$

Коэффициенты $c_i{}^k{}_j$ носят название структурных констант группы.

2. Геометрия многообразия параметров группы вращений

На групповом многообразии компактной группы Ли существует метрика Киллинга–Картана

$$g_{kl} = \frac{1}{2} c_k{}^i{}_j c_i{}^j{}_l$$

Для группы вращений имеем

$$g_{kl} = \frac{1}{2} c_k{}^i{}_j c_i{}^j{}_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \varepsilon_{ijl} = \delta_{kl}.$$

Тем самым метрика приобретает вид евклидовой метрики, то есть многообразие группы вращений локально евклидово, а компоненты метрического тензора в касательном пространстве имеют вид

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вид метрики в координатном пространстве определяется по стандартной формуле

$$g_{\alpha\beta} = g_{kl} h^k{}_\alpha h^l{}_\beta.$$

Вычисления дают следующие значения для $g_{\alpha\beta}$ и обратной матрицы $g^{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sin^2\theta} & -\dfrac{\mathrm{ctg}\theta}{\sin\theta} & 0 \\ -\dfrac{\mathrm{ctg}\theta}{\sin\theta} & \dfrac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Опускание и поднимание индексов будем осуществлять с помощью тензора метрики касательного пространства $\vec{e}_i = g_{ik}\vec{e}^{\,k}$ и метрического тензора координатного пространства $\vec{e}_\alpha = g_{\alpha\beta}\vec{e}^{\,\beta}$. Ортогональные ковариантные неголономные базисные векторы $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ равны:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}^{\,1} \quad \vec{e}_2 = \vec{e}^{\,2} \quad \vec{e}_3 = \vec{e}^{\,3}.$$

Найдем ковариантные координатные базисные векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = \varphi, \psi, \theta)$:

$$\vec{e}_\varphi = \vec{e}^{\,\varphi} + \vec{e}^{\,\psi}\cos\theta,$$

$$\vec{e}_\psi = \vec{e}^{\,\varphi}\cos\theta + \vec{e}^{\,\psi},$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}^{\,\theta}.$$

Обратные преобразования будут иметь вид:

$$\vec{e}^{\,\varphi} = \frac{\vec{e}_\varphi - \vec{e}_\psi\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\vec{e}^{\,\psi} = \frac{\vec{e}_\psi - \vec{e}_\varphi\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$\vec{e}^{\,\theta} = \vec{e}_\theta.$$

В окончательном виде связь между неголономным ковариантным ортогональным базисом $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ и голономным ковариантным координатным базисом $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = \varphi, \psi, \theta)$ имеет вид:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\varphi\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - \vec{e}_\psi \mathrm{ctg}\theta\sin\psi + \vec{e}_\theta\cos\psi,$$

$$\vec{e}_2 = -\vec{e}_\varphi\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \vec{e}_\psi \mathrm{ctg}\theta\cos\psi + \vec{e}_\theta\sin\psi,$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_\psi.$$

Полученной метрике соответствует риманова связность Леви-Чивита, для которой коэффициенты аффинной связности вычисляются по формуле

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\left(\partial_\alpha g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}\right).$$

В результате вычислений получаем следующие значения:

$$\Gamma^\varphi{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sin\theta} \\ \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta & -\frac{1}{2\sin\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^\psi{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2\sin\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \\ -\frac{1}{2\sin\theta} & \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sin\theta & 0 \\ \frac{1}{2}\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Данным коэффициентам связности соответствует тензор кривизны:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\tau\alpha}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\tau\beta}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\alpha}.$$

Вычислив компоненты этого тензора, можно установить равенства:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R = g^{\nu\beta}R^{\mu}{}_{\nu\mu\beta} = \frac{3}{2}.$$

которые показывают, что *многообразие группы вращений – трехмерное многообразие постоянной кривизны.*

3. Свободное движение твердого тела и геодезические в пространстве параметров группы вращений

Теперь рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве свободное движение твердого тела, которое представляет собой движение по инерции со скоростью центра масс и свободное вращение вокруг оси, проходящей через центр масс.

Вследствие сохранения вектора момента импульса абсолютно твердое тело будет свободно вращаться с постоянным вектором угловой скорости $\vec{\omega} = const$, направленным вдоль вектора момента импульса. Этот вектор угловой скорости можно разложить на три составляющих вектора, соответствующих векторам угловых скоростей вращений, описываемых углами Эйлера.

Опишем теперь данную кинематику в терминах группового многообразия группы вращений. Указанному выше свободному вращению твердого тела соответствует на групповом многообразии кривая $l(\lambda) = \exp(\vec{u}\lambda)$, где $\vec{u}$ – касательный вектор к данной кривой на многообразии.

Одним из постулатов фундаментальной физики является вариационный принцип экстремального действия, согласно которому траектория движения физической системы реализует экстремум некоторого функционала, составленного из динамических переменных данной системы. В современной теории гравитации данная траектория движения бесструктурной частицы в гравитационном поле представляет собой геодезическую в римановом пространстве, моделирующем гравитационное взаимодействие. Это последнее утверждение получило название «принцип геодезических». Докажем следующую теорему, представляющую собой обобщение принципа геодезических на многообразие группы вращений.

Теорема. *Кривая $l(\lambda) = \exp(\vec{u}\lambda)$ в групповом многообразии группы вращений, соответствующая свободному вращению абсолютного твердого тела, является геодезической метрики Киллинга–Картана группы вращений, то есть выполняется равенство $\nabla_{\vec{u}}\vec{u} = 0$, где ∇ – связность Леви–Чивита данной метрики.*

Доказательство. Разложим вектор $\vec{u}$ по базису $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ касательного пространства: $\vec{u} = u^i\vec{e}_i$. Тогда, с учетом представления векторов $\vec{e}_i$ через координатные базисные векторы пространства $\vec{e}_{\varphi}$, $\vec{e}_{\psi}$, $\vec{e}_{\theta}$, получим

$$\vec{u} = u^1\left(\vec{e}_{\varphi}\frac{\sin\psi}{\sin\theta} - \vec{e}_{\psi}\mathrm{ctg}\theta\sin\psi + \vec{e}_{\theta}\cos\psi\right) +$$
$$+u^2\left(-\vec{e}_{\varphi}\frac{\cos\psi}{\sin\theta} + \vec{e}_{\psi}\mathrm{ctg}\theta\cos\psi + \vec{e}_{\theta}\sin\psi\right) + u^3\vec{e}_{\psi}.$$

Отсюда находим компоненты разложения вектора $\vec{u}$ по координатному базису:

$$u^{\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right),$$

$$u^{\psi} = \mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3.$$

$$u^{\theta} = u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi,$$

Уравнение геодезической $\nabla_{\vec{u}}\vec{u} = 0$ в координатном представлении пространства параметров группы вращений имеет вид:

$$u^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\alpha}u^{\gamma}\right) = 0.$$

Рассмотрим вращение, соответствующее углу Эйлера θ. Тогда, полагая в уравнении геодезической $\beta = \theta$ и подставляя в него вычисленные ранее выражения для коэффициентов связности Леви-Чивита, найдем (суммирование по φ, ψ, θ отсуствует, так как это обозначения координат, а не сумматационных индексов типа α, β, γ):

$$\begin{aligned}
u^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\theta}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\theta}{}_{\gamma\alpha}u^{\gamma}\right) &= u^{\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{\psi\varphi}u^{\psi} + u^{\psi}\partial_{\psi}u^{\theta} + u^{\psi}\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\psi}u^{\varphi} = \\
= \left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\frac{1}{2}&\left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right) + \\
+ \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)&\partial_{\psi}\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) + \\
+ \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)&\frac{1}{2}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right) = \\
= \left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)&\left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right) + \\
+ \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)&\left(-u^1 \sin\psi + u^2 \cos\psi\right) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично равенство $\nabla_{\vec{u}}\vec{u} = 0$ докажем для случая $\beta = \varphi$:

$$\begin{gathered}
u^{\alpha}\left(\frac{\partial u^{\varphi}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\varphi}{}_{\gamma\alpha}u^{\gamma}\right) = \\
= u^{\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}u^{\theta} + u^{\psi}\partial_{\psi}u^{\varphi} + u^{\psi}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\psi}u^{\theta} + u^{\theta}\partial_{\theta}u^{\varphi} + u^{\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}u^{\varphi} + u^{\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\psi\theta}u^{\psi} = \\
= \left(\frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\right)\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) + \\
+ \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)\partial_{\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\right) - \\
- \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)\frac{1}{2\sin\theta}\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) + \\
+ \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right)\partial_{\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\right) + \\
+ \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right)\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\right) - \\
- \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right)\frac{1}{2\sin\theta}\left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right) = \\
= \frac{\mathrm{ctg}\theta}{\sin\theta}\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) + \\
+ \left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)\frac{1}{\sin\theta}\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) - \\
- \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right)\left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi\right)\frac{\mathrm{ctg}\theta}{\sin\theta} - \\
- \frac{1}{\sin\theta}\left(\mathrm{ctg}\theta\left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi\right) + u^3\right)\left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi\right) = 0.
\end{gathered}$$

Для $\beta = \psi$ имеем:

$$u^\alpha \left(\frac{\partial u^\psi}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\psi{}_{\gamma\alpha} u^\gamma \right) =$$
$$= u^\varphi \Gamma^\psi{}_{\theta\varphi} u^\theta + u^\psi \partial_\psi u^\psi + u^\psi \Gamma^\psi{}_{\theta\psi} u^\theta + u^\theta \partial_\theta u^\psi + u^\theta \Gamma^\psi{}_{\varphi\theta} u^\varphi + u^\theta \Gamma^\psi{}_{\psi\theta} u^\psi =$$
$$= -\left(\frac{1}{\sin\theta} \left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi \right) \right) \frac{1}{2\sin\theta} \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) +$$
$$+ \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) \partial_\psi \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) +$$
$$+ \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) \frac{1}{2} \mathrm{ctg}\theta \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) +$$
$$+ \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) \partial_\theta \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) -$$
$$- \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) \frac{1}{2\sin\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi \right) \right) +$$
$$+ \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) \frac{1}{2} \mathrm{ctg}\theta \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) =$$
$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} \left(u^1 \sin\psi - u^2 \cos\psi \right) \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) -$$
$$- \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) \mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \sin\psi + u^1 \cos\psi \right) +$$
$$+ \left(\mathrm{ctg}\theta \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) + u^3 \right) \mathrm{ctg}\theta \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) -$$
$$- \left(u^1 \cos\psi + u^2 \sin\psi \right) \left(u^2 \cos\psi - u^1 \sin\psi \right) \frac{1}{\sin^2\theta} = 0,$$

что завершает доказательство теоремы.

Заключение

Таким образом, доказано, что в пространстве параметров группы вращений реализуется принцип геодезических для свободного вращения твердого тела. А именно, показано, что свободному вращению твердого тела соответствует в пространстве параметров группы вращений кривая, являющаяся геодезической относительно метрики Киллинга–Картана данной группы.

Разобранный пример может служить убедительным свидетельством того, что учет зависимости динамических переменных физической системы от всех параметров группы симметрий данной системы может служить физическим принципом (дополнительным к существующим), систематический учет которого может привести к обнаружению новых физических явлений.

Список литературы

1. Lurcat F. Quantum field theory and the dynamical role of spin.*Physica.* 1964. V. 1. S. 95-106.

2. Cho Y.M. Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. *J. Math. Phys.* 1975. V. 16(10). S. 2029-2036.

3. Ne'eman Y., Regge T. Gauge Theory of Gravity and Supergravity on a Group Manifold. *Revista del Nuovo Cim.* 1978. V. 1(5). S. 1–43.

4. Ne'eman Y., Regge T. Gravity and Supergravity as Gauge Theories on a Group Manifold. *Phys. Lett.* 1978. V. 74B. S. 54-56.

5. Toller M. Classical Field Theory in the Space of Reference Frames. *Nuovo Cim.* 1978. V. 44B (1). S. 67-98.

6. Toller M., Vanzo L. Free Fields on the Poincare Group. *Lettete al Nuovo Cim.* 1978. V. 22 (9). S. 345-348.

7. Cognola G., Soldati R., Vanzo L., Zerbini S. Classical non-Abelian gauge theories in the space of reference frames. *J. Math. Phys. V.* 1979. V. 20(12). S. 2613-2618.

8. Carmeli M. Rotational relativity theory. *Int. J. Theor. Phys.* 1986. V. 25(1). S. 89-94. doi: 10.1007/BF00669716

9. Portnov Yu.A. Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time. *Gravit. Cosmol.* 2011. V. 17(2). S. 152-160.

10. Портнов Ю.А. Уравнения поля в семимерном пространстве-времени. М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2013. 154 с.

11. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 472 с.

References

1. Lurcat F. Quantum field theory and the dynamical role of spin. *Physica*, 1964, vol. 1, pp. 95-106.

2. Cho Y.M. Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. *J. Math. Phys.*, 1975, vol. 16, no. 10, pp. 2029-2036.

3. Ne'eman Y., Regge T. Gauge Theory of Gravity and Supergravity on a Group Manifold. *Revista del Nuovo Cim.*, 1978, vol. 1, no. 5, pp. 1-43.

4. Ne'eman Y., Regge T. Gravity and Supergravity as Gauge Theories on a Group Manifold. *Phys. Lett.*, 1978, vol. 74B, pp. 54-56.

5. Toller M. Classical Field Theory in the Space of Reference Frames. *Nuovo Cim.*, 1978, vol. 44B (1), pp. 67-98.

6. Toller M., Vanzo L. Free Fields on the Poincare Group. *Lettete al Nuovo Cim.*, 1978, vol. 22, no. 9, pp. 345-348.

7. Cognola G., Soldati R., Vanzo L., Zerbini S. Classical non-Abelian gauge theories in the space of reference frames. *J. Math. Phys.*, 1979, vol. 20, no. 12, pp. 2613-2618.

8. Carmeli M. Rotational relativity theory. *Int. J. Theor. Phys.*, 1986, vol. 25, no. 1, pp. 89-94. doi: 10.1007/BF00669716

9. Portnov Yu.A. Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time. *Gravit. Cosmol.*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 152-160.

10. Portnov Yu.A. *Uravneniya polya v semimernom prostranstve-vremeni* [Field Equations in Seven-Dimensional Space-Time]. Moscow: NaukaPubl., 2013. 154 p. (in Russian)

11. Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics. Second Edition.* New York: Springer-Verlag, 1989, 519 p.

Авторы

Бабурова Ольга Валерьевна, д.ф.-м.н., профессор, кафедра «Физика», ФГБОУ ВПО Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Ленинградский проспект, д. 64, г. Москва, 125319, Россия; профессор, кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского, Институт физики, технологии и информационных систем, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», ул. Малая Пироговская, д. 29, г. Москва, 119992, Россия.
E-mail: ov.baburova@mpgu.edu

Портнов Юрий Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Физика», ФГБОУ ВПО Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Ленинградский пр., д. 64, г. Москва, 125319, Россия.
E-mail: portnovyura@yandex.ru

Фролов Борис Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского, Институт физики, технологии и информационных систем, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», ул. Малая Пироговская , д. 29, г. Москва, 119992, Россия.
E-mail: bn.frolov@mpgu.edu

Шамрова Виктория Евгеньевна, кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского, Институт физики, технологии и информационных систем, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», Малая Пироговская улица, д. 29, г. Москва, 119992, Россия.
E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Бабурова О. В., Портнов Ю. А., Фролов Б. Н., Шамрова В. Е. О геодезических в пространстве параметров группы вращений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 2. С. 18—27.

Authors

Babouriva Olga Valer'evna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department “Physics”, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Leningradskiy pr., 64, Moscow, 125319, Russia; Professor, E.V. Shpol'skii's Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Technology and Informational Systems, Moscow Pedagogical State University, str. Malaya Pirogovskaya, 29, Moscow, 119992, Russia.
E-mail: ov.baburova@mpgu.edu

Portnov Yuriy Alexeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department “Physics”, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Leningradskiy pr., 64, Moscow, 125319, Russia.
E-mail: portnovyura@yandex.ru

Frolov Boris Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, E.V. Shpol'skii's Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Technology and Informational Systems, Moscow Pedagogical State University, str. Malaya Pirogovskaya , 29, Moscow, 119992, Russia.
E-mail: bn.frolov@mpgu.edu

Shamrova Viktoriya Evgenievna, Postgraduate at the E.V. Shpol'skii's Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Technology and Informational Systems, Moscow Pedagogical State University, str. Malaya Pirogovskaya, 29, Moscow, 119992, Russia.
E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

Please cite this article in English as:
Babouriva O. V., Portnov Yu. A., Frolov B. N., Shamrova V. E. On geodesic in the space of the group rotation parameters. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 2, pp. 18–27.