УДК 51-71, 539.12

© Журавлев В.М., 2018

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ДИРАКА В РАЗМЕРНОСТИ 1+3*

Журавлев В.М.[a,b,1]

[a] Кафедра Теоретической физики, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, 432017, Россия
[b] Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, Казань, 420008, Россия

В работе строится точно интегрируемая релятивистская модель системы четырех фермионов в собственном поле с векторным потенциалом со значениями в алгебре матриц 4×4, в соответствии с нелинейным уравнением Дирака в размерности 1+3. Предлагаемый подход основан на методе многомерных матричных подстановок. Рассматриваются общая схема построения точных решений нелинейного уравнения Дирака и его возмущений вблизи точного решения. Обсуждаются общие аспекты построенной модели и ее связь с теорией Янга-Миллса.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Дирака, метод матричных функциональных подстановок в спинорном представлении.

ON INTEGRABLE NONLINEAR DIRAC EQUATIONS WITH 1+3 DIMENSION

Zhuravlev V.M.[a,b,1]

[a] Theoretical Physics department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russia
[b] N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia

In this paper, we construct an exactly integrable relativistic model of a system of four fermions in a proper field with a vector potential with values in the matrix algebra 4×4, which are described by the nonlinear Dirac equation in 1+3 dimensions. The proposed approach is based on the method of multidimensional matrix substitutions. A general scheme for constructing exact solutions of the nonlinear Dirac equation and its perturbations near the exact solution is considered. The general aspects of the constructed model and its connection with Yang-Mills theory are discussed.

Keywords: nonlinear Dirac equations, matrix functional substitutions method, spinor representation.

PACS: 02.30.Ik, 03.65.Pm, 03.65.Ge
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.3.19-30

Введение

В работах [1, 2] был предложен метод функциональных подстановок (МФП) для построения нелинейных интегрируемых уравнений, обобщающий подстановки Коула-Хопфа, применимые к

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (номер проекта 16.2773.2017/4.6), фондом РФФИ (проект 16-42-732119 р_офи_м) и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

[1] E-mail: zhvictorm@gmail.com

уравнениям типа Бюргерса. Метод функциональных подстановок применялся в основном для построения решений уравнений в координатной размерности 1+1 [1–4] и к некоторым конечномерным динамическим системам [5]. Однако этот метод может применяться и к уравнениям в многомерных координатных пространствах [6]. В настоящей работе с помощью МФП в форме матричных подстановок строится интегрируемая модель квантовых частиц. Модель описывается уравнением Дирака [7] в размерности 1+3 в собственном поле с 4-векторным потенциалом, компоненты которого принимают значения в алгебре матриц 4×4, что указывает на возможную интерпретацию в рамках теории Янга-Милса [8, 9]. Такая модель представляет собой редкий пример полезной, с точки зрения физических приложений, модели в координатной размерности 1+3. Поскольку модель изначально формулируется в матричной форме на алгебре матриц 2×2, для ее физической интерпретации используется переход от матриц к би-спинорам, типичным для теории Дирака [7]. В работе приводится общий вывод уравнений и общий вид их решений.

1. Общая формулировка метода функциональных подстановок в многомерном варианте

Следуя общей идеологии работ [1, 2], рассмотрим следующую совокупность соотношений для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ размерности N, зависящей от координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{T} = \hat{A}_\alpha(\mathbf{x})\hat{T}, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Эти соотношения в дальнейшем будем называть базовыми, а матричные функции $\hat{A}_\alpha$ будем называть базовыми функциями. Из условия непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ следует, что функции $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, определенные соотношениями (1), связаны между собой так, что для них выполняются следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \left[\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Кроме этих очевидных следствий непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ из совокупности базовых соотношений следуют и рекуррентные соотношения для производных базовых функций A_α любого порядка. Именно по индукции доказывается, что функции $A^{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}(\mathbf{x})$, определенные соотношениями:

$$\frac{\partial^{|\mathbf{a}|}\hat{T}}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_1^{a_n}} = \hat{A}^{(\mathbf{a})}(\mathbf{x})\hat{T}, \tag{3}$$

являются дифференциальными полиномами только функций $A_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n$. Здесь и далее вводится мультииндекс $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, с целочисленными компонентами a_i и обозначение: $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Действительно, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T}^{[\mathbf{a}]} = \hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_\alpha)}\hat{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_\alpha\right)\hat{T}, \quad \alpha = 1, \ldots, n,$$

где

$$\mathbf{1}_\alpha = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\alpha-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-\alpha}).$$

Отсюда следует набор рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

2. Вспомогательные уравнения для задачи n-волн

Простым примером использования описанной схемы являются нелинейные уравнения, которые можно получить, отталкиваясь от системы вспомогательных уравнений в координатной размерности 1+2 следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{P}\hat{T}_x, \quad \hat{T}_t = \hat{Q}\hat{T}_y. \tag{5}$$

Будем предполагать, что матрицы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ невырождены и коммутируют между собой: $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$, а также имеют элементы, независящие от x, y, t. Условие коммутативности необходимо для совместности системы (5). Базовые соотношения переобозначим. Именно, будем полагать:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{T}_y = \hat{B}\hat{T}, \quad \hat{T}_t = \hat{C}\hat{T}. \tag{6}$$

Здесь матрицы $\hat{A}, \hat{B}$ и $\hat{C}$ размерности N представляют собой базовые функции схемы. Связь между этими матрицами в силу выполнения базовых соотношений имеет такой вид:

$$\hat{A}_t - \hat{C}_x + [\hat{A}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{B}_t - \hat{C}_x + [\hat{B}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{A}_y - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (5) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}\hat{A}, \quad \hat{C} = \hat{Q}\hat{B}. \tag{7}$$

Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции $\hat{A}, \hat{B}$ и $\hat{C}$ удовлетворяют по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\hat{A}_t - \hat{P}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{P}]\hat{A} = 0, \quad \hat{C}_t - \hat{P}\hat{C}_x + \hat{C}^2 - \hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} = 0,\\
&\hat{B}_t - \hat{Q}\hat{B}_y + [\hat{B}, \hat{Q}]\hat{B} = 0, \quad \hat{C}_t - \hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - \hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0,\\
&\hat{P}^{-1}\hat{C}_y - \hat{Q}^{-1}\hat{C}_x + [\hat{P}^{-1}\hat{C}, \hat{Q}^{-1}\hat{C}] = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Объединяя часть уравнений этой совокупности, в частности, получаем многомерное уравнение:

$$\hat{C}_t - p\hat{P}\hat{C}_x - q\hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - p\hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} - q\hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0, \tag{9}$$

где p и q – два любых вещественных числа, связанных между собой условием: $p + q = 1$. Эта система может рассматриваться как известная система N^2-волн с квадратичной нелинейностью в размерности 1+2. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки:

$$\hat{C} = \hat{T}_t\hat{T}^{-1},$$

где $\hat{T}$ – любое решение системы (5).

3. Задача M-волн в n-мерном пространстве

Рассмотренная система имеет естественное обобщение в размерности $1 + n$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} = \hat{P}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Как и в предыдущем примере, будем предполагать, что матрицы $\hat{P}_\alpha$ невырождены, коммутируют между собой: $[\hat{P}_\alpha, \hat{Q}_\beta] = 0$, и имеют элементы, независящие от $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Условие взаимной коммутативности матриц $\hat{P}_\alpha$ необходимо для совместности системы (10).

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (10) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}_\alpha^{-1}\hat{A}_\alpha, \quad \alpha = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

где для удобства введено обозначение: $\hat{C} = \hat{A}_0$. Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции $\hat{A}_j$ удовлетворят по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\alpha - \hat{P}_\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\alpha + [\hat{A}_\alpha, \hat{P}_\alpha^{-1}]\hat{A}_\alpha = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \hat{P}_\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{C} + \hat{C}^2 - \hat{P}_\alpha^{-1}\hat{C}\hat{P}_\alpha\hat{C} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{12}$$

Умножая каждое из уравнений второй части системы (12) на числа Q_α такие, что: $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha = 1$ и складывая результаты, получаем многомерное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha \hat{P}_\alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{C} + \hat{C}^2 - \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha \hat{P}_\alpha^{-1} \hat{C} \hat{P}_\alpha \hat{C} = 0. \tag{13}$$

Эта система может рассматриваться как известная система N^2-волн в многомерном пространстве размерности $1+n$ с квадратичной нелинейностью. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки:

$$\hat{C} = \hat{T}_t \hat{T}^{-1},$$

где $\hat{T}$ – любое решение системы (10).

Построение решений этой системы сводится к следующим вычислениям. Пусть $\mathbf{n}_m$, $m = 1,\ldots,N$ набор собственных векторов матриц $\hat{P}_\alpha$, имеющих собственные числа $p_\alpha^{(m)}$, $\alpha = 1,\ldots,n$; $m = 1,\ldots,N$. Тогда общее решение системы (10) имеет такой вид:

$$\hat{T} = \int\limits_C \sum_{m=1}^{N} R_m(\lambda) \hat{V}_m \exp\Big(\lambda\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha^{(m)} x_\alpha + t\Big)\Big) d\lambda,$$

где интеграл берется по произвольному контуру в комплексной плоскости, $R_m(\lambda)$ – произвольные функции спектрального параметра λ, а постоянные матрицы $\hat{V}_\alpha$ имеют такой вид:

$$\hat{V}_m = (\underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{m-1}, \mathbf{n}_m, \underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{n-m})$$

т.е. является матрицей, единственным ненулевым столбцом которой является столбец с номером m, совпадающий с собственным вектором матриц $\hat{P}_\alpha$.

4. Нелинейное уравнение Дирака

Важным примером использования предложенной общей схемы является возможность сконструировать интегрируемое с помощью подстановок нелинейное уравнение Дирака в размерности 1+3, имеющее также квадратичную нелинейность. Исследование этого уравнения и его решений и будет основной задачей данной статьи.

Для вывода уравнения типа Дирака рассмотрим вспомогательное уравнение первого порядка в размерности 1+3 следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{\sigma}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} + \hat{\mu}\hat{T}. \tag{14}$$

Здесь $\hat{T}$ – матрицы 2×2, а $\hat{\sigma}_\mu$ – матрицы Паули:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widehat{I}. \tag{15}$$

Используя базовые соотношения:

$$\hat{T}_t = \hat{A}_0 \hat{T}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} = \hat{A}_\alpha \hat{T}, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{16}$$

приходим к следующему матричному уравнению:

$$\hat{C} = \hat{A}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{\sigma}_\alpha \hat{A}_\alpha + \hat{\mu}. \tag{17}$$

Условия совместности схемы в данном случае можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \left[\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, 3,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{C} + \left[\hat{A}_\beta, \hat{C}\right] = 0, \quad \beta = 1, \ldots, 3, \tag{18}$$

Сворачивая обе системы (18) по индексу β, предварительно умножив их, соответственно, на $\hat{\sigma}_\beta$, и используя (17), приходим к следующей системе для матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\beta$, $\beta = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha + \hat{A}_\alpha\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{\mu} = 0, \quad \beta = 1, \ldots, 3,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{C} + \hat{C}^2 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\hat{C}\hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mu} = 0. \tag{19}$$

Для простоты далее будем рассматривать ситуации, когда $\hat{\mu} = \mathrm{const}$. Отметим, что при любом таком выборе матриц $\hat{\mu}$, они в явном виде в структуре уравнений (19) не проявляются. Поэтому они являются свободными параметрами этих уравнений. Покажем теперь, что уравнения (19) можно рассматривать как нелинейные уравнения Дирака.

5. Переход к спинорной форме записи

Матричные уравнения (19) можно представить в векторном виде (см. Приложение), если каждую из матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\alpha$ представить в виде одного вектора, составленного из их столбцов по правилу. Запишем матрицу $\hat{C}$ в виде двух столбцов:

$$\hat{C} = \left(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\right), \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Введем следующий би-спинор Ψ_0, имеющий вид:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{1,2} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $\psi_1 = \mathbf{c}_1$ и $\psi_2 = \mathbf{c}_2$ – спиноры. Тогда, согласно правилам тензорного произведения (см. Приложение), первое уравнение системы (19) можно записать в следующем виде:

$$\hat{S}_0\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}\hat{S}_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Psi_0 + \hat{E}\Psi_0 = 0, \tag{22}$$

где:

$$\hat{S}_0 = \left(\widehat{I}\bigotimes\widehat{I}\right), \quad \hat{S}_\alpha = -\left(\hat{\sigma}_\alpha\bigotimes\widehat{I}\right) = -\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\sigma}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

а матрица $\hat{E}$ вычисляется по следующему правилу тензорного произведения (см. Приложение) матриц:

$$\hat{E} = \widehat{I}\bigotimes\hat{A}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\hat{\sigma}_\alpha\bigotimes\widehat{I}\right)\left(\widehat{I}\bigotimes\hat{A}_\alpha\right) = \sum_{j=0}^{3}\hat{S}_j\mathcal{A}_j,$$

Здесь введены обозначения:

$$\widehat{\mathcal{A}}_\alpha = \left(\widehat{I}\bigotimes\hat{A}_\alpha\right) = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha\widehat{I} & a_{21}^\alpha\widehat{I} \\ a_{12}^\alpha\widehat{I} & a_{22}^\alpha\widehat{I} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{A}}_0 = \left(\widehat{I}\bigotimes\hat{C}\right) = \begin{pmatrix} c_{11}\widehat{I} & c_{21}\widehat{I} \\ c_{12}\widehat{I} & c_{22}\widehat{I} \end{pmatrix}$$

По виду матрицы $\hat{E}$ ее можно интерпретировать (с точностью до размерного множителя) энергию взаимодействия заряженной частицы с векторным потенциалом обобщенного электромагнитного поля с векторным потенциалом, представленным 4-вектором с компонентами в виде матриц $\hat{A}_j,\ j = 0, 1, 2, 3$.

Умножая уравнение (22) на четырехрядную матрицу $\widehat{\gamma}_0$:

$$\widehat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \widehat{I} \\ -\widehat{I} & \hat{0} \end{pmatrix},$$

приходим к уравнению, совпадающему с уравнением Дирака с точностью до размерных множителей функций, входящих в запись этого уравнения:

$$\sum_{j=0}^{3} \widehat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{\mathcal{A}}_j \right) \Psi_0 = 0, \tag{23}$$

где введены обозначения:

$$\widehat{\gamma}_\alpha = \widehat{\gamma}_0 \hat{S}_\alpha,\ \ \alpha = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Определенным отличием данного уравнения от классического является то, что матрица $\widehat{\gamma}_0$ совпадает с классической матрицей Дирака $\widehat{\gamma}_5$, а не с классической матрицей Дирака:

$$\widehat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \widehat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\widehat{I} \end{pmatrix}$$

.

По аналогии с матрицей $\hat{C} = \hat{A}_0$ введем спинорное представление и матриц $\hat{A}_\alpha$. Именно, полагая:

$$\hat{A}_\alpha = \left(\mathbf{a}_1^\alpha, \mathbf{a}_2^\alpha \right),\ \ \mathbf{a}_1^\mu = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \end{pmatrix},\ \ \mathbf{a}_2^\alpha = \begin{pmatrix} a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix}, \tag{25}$$

введем следующие би-спиноры Ψ_α:

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \\ a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^\alpha \\ \psi_2^\alpha \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Опять с помощью правил тензорного произведения находим, что уравнения, которым удовлетворяют спиноры Ψ_α имеют уравнения Дирака следующего вида:

$$\sum_{j=0}^{3} \widehat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{\mathcal{A}}_j \right) \Psi_\alpha = 0,\quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{27}$$

где матрицы $\widehat{\mathcal{A}}_j$ имеют тот же вид (24), что и в уравнении для би-спинора Ψ_0.

К этим соотношениям записанным в спинорном виде необходимо добавить и соотношение (17), также представленное в спинорном виде:

$$\Psi_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{S}_\alpha \Psi_\alpha + \mathbf{M}, \tag{28}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что би-спиноры $\Psi_j,\ j = 01, 2, 3$ – линейно зависимы.

Аналогично, в спинорном виде можно представить и уравнение (14). Полагаем:

$$\hat{T} = \Big(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\Big), \quad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

вводим би-спинор:

$$\Phi = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix},$$

который теперь удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \widehat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Phi + \widehat{\gamma}_0 \hat{\mu}_0 \Phi = 0, \tag{30}$$

что соответствует линейному уравнению Дирака для заряженной частицы с массой, определяемой матрицей:

$$\hat{\mu}_0 = (\hat{\mu} \bigoplus \widehat{I}).$$

Также можно преобразовать в спинорную форму и базовые соотношения (16). Они будут выглядеть таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\Phi = \widehat{\mathcal{B}}_j \Phi, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{31}$$

где $\widehat{\mathcal{B}}_j = \Big(\hat{A}_j \bigotimes \widehat{I}\Big)$ – матрицы 4×4, отличные от матриц $\widehat{\mathcal{A}}_j$. В силу выполнения базовых соотношений в спинорной форме (31), выполняются соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\widehat{\mathcal{B}}_j - \frac{\partial}{\partial x^j}\widehat{\mathcal{B}}_k + [\widehat{\mathcal{B}}_j, \widehat{\mathcal{B}}_k] = 0, \quad j, k = 0, 1, 2, 3. \tag{32}$$

6. Интерпретация

Уравнения Дирака (22) и (23) описывают динамику трех заряженных частиц (в силу линейной зависимости би-спиноров частиц) со спином 1/2 (фермионов) в совокупном поле, созданном самими частицами, потенциал которого описывается матрицами $\widehat{\mathcal{A}}_j$. Компоненты векторного 4-потенциала $\widehat{\mathbf{A}} = \Big(\widehat{\mathcal{A}}_0, \widehat{\mathcal{A}}_1, \widehat{\mathcal{A}}_2, \widehat{\mathcal{A}}_3\Big)$, в свою очередь, определяются би-спинорами Ψ_j в соответствии с формулами (26) и (21). То, что компоненты векторного потенциала, созданного частицами поля, выражаются через матрицы, говорит о том, что данное поле следует рассматривать как калибровочное поле типа Янга-Миллса со значениями в алгебре матриц второго порядка $SL[2]$. Тензор напряженности этого поля со значениями в той же подалгебре матриц 4×4 имеет вид:

$$\mathcal{F}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}\widehat{\mathcal{A}}_j - \frac{\partial}{\partial x^j}\widehat{\mathcal{A}}_k + [\widehat{\mathcal{A}}_j, \widehat{\mathcal{A}}_k].$$

Для проверки того, является ли такое поле в точности полем Янга-Миллса, необходимо еще установить то, каким уравнениям удовлетворяет напряженность этого поля в силу выполнения вспомогательного уравнения (14). Решение этого вопроса выходит за рамки данной статьи. Заметим только, что напряженность этого поля, вообще говоря, отлична от нуля, хотя напряженность поля с компонентами $\widehat{\mathcal{B}}_j$ равна нулю в силу соотношений (32). Таким образом, полученная модель представляет собой специфический случай самосогласованной модели взаимодействия четырех фермионов с собственным полем, подобным полю Янга-Миллса.

Полученную систему можно также использовать в качестве основного состояния системы четырех фермионов, а квантовые состояния в ней можно описывать с помощью теории возмущений вблизи этого основного состояния (см., например, [10]). В этом случае кроме самой нелинейной модели следует рассмотреть и уравнения для ее возмущений первого порядка.

Уравнения для возмущений удобно строить, исходя из их первичной матричной формы, а затем перейти уже к спинорной записи этих уравнений. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{A}_\alpha + \delta\hat{A}_\alpha\hat{C} + \hat{A}_\alpha\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\delta\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta + \hat{A}_\alpha\delta\hat{A}_\beta\right) = 0, \quad \beta = 1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{C} + \delta\hat{C}\hat{C} + \hat{C}\delta\hat{C} - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\Big(\delta\hat{C}\hat{A}_\beta + \hat{C}\delta\hat{A}_\beta\Big) = 0. \qquad (33)$$

Переходя к спинорной записи, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_\alpha + \widehat{\mathcal{A}}_0\xi_\alpha + \widehat{\mathcal{B}}_\alpha\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\widehat{\mathcal{A}}_\beta\xi_\alpha + \widehat{\mathcal{B}}_\alpha\xi_\beta\right) = 0, \quad \beta = 1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_0 + (\widehat{\mathcal{A}}_0 + \widehat{\mathcal{B}}_0)\xi_0 - \sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\Big(\widehat{\mathcal{A}}_\beta\xi_0 + \widehat{\mathcal{B}}_0\xi_\beta\Big) = 0. \qquad (34)$$

Здесь:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \delta a^j_{11} \\ \delta a^j_{21} \\ \delta a^j_{12} \\ \delta a^j_{22} \end{pmatrix}, \quad j = 0,1,2,3.$$

7. Построение решений для нелинейного уравнения Дирака

Вычислим решения вспомогательного уравнения в форме (30). Будем искать решение в следующей форме:

$$\Phi = \mathbf{u}\exp\Big(i\sum_{j=0}^{3}p_j x_j\Big),$$

где $\mathbf{u}$ – постоянный спинор, а $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ – параметры решения, представляющие по сути компоненты вектора энергии-импульса частицы, описывающейся уравнением Дирака (30). В этом случае (30) переходит в задачу на собственные числа и вектора:

$$\sum_{j=0}^{3}\widehat{\gamma}_j\mathbf{u} - i\widehat{\gamma}_0\hat{\mu}_0\mathbf{u} = 0.$$

Эту систему можно представить в следующей форме:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0\right)\mathbf{u} = p_0\mathbf{u}.$$

Последняя система представляет собой задачу на собственные числа и вектора матрицы:

$$\hat{W} = \left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0\right).$$

Обозначим через $E_a = E_a(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu})$, $a = 1,2,3,4$ собственные числа матрицы $\hat{W}$, которым соответствуют собственные вектора $\mathbf{u}_a(\hat{\mu})$:

$$\hat{W}\mathbf{u}_a = E_a(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu})\mathbf{u}_a, a = 1,2,3,4.$$

Тогда общее решение для функции $\hat{T}$ можно представить в таком виде:

$$\hat{T} = \int\sum_{a=1}^{4}U_a(p_1, p_2, p_3)\mathbf{u}_a(\hat{\mu})\exp\left(i\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha x_\alpha + iE_a\Big(p_1, p_2, p_3|\hat{\mu}\Big)t\right)dp_1dp_2dp_3. \qquad (35)$$

Здесь $U_a(p_1, p_2, p_3),\ a = 1,2,3,4$ – произвольные функции $p = (p_1, p_2, p_3)$. Решения для спиноров $\Psi_j, j = 0,1,2,3$ при этом вычисляются с помощью подстановок (16) и преобразования компонент матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\alpha$ в спинорную форму (20) и (25).

Полученные решения позволяют построить теперь и точные решения для возмущений. Для этого достаточно воспользоваться базовыми соотношениями (1), связывающими функции $\hat{A}_j,\ j = 0,1,2,3$ с матрицей $\hat{T}$. Возмущения первого порядка вблизи решения нелинейного уравнения Дирака, соответствующего матрицам $\hat{T}^{(0)}$ и $\hat{A}_j^{(0)}$ для этих соотношений, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\hat{T}^{(0)} = \delta\hat{A}_j\hat{T}^{(0)} + \hat{A}_j^{(0)}\delta\hat{T}.$$

Отсюда находим, что возмущения матриц $\delta\hat{A}_j$ выражаются через возмущения матрицы $\hat{T}^{(0)}$, ее саму и $\hat{A}_j^{(0)}$ следующим образом:

$$\delta\hat{A}_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\delta\hat{T} - \hat{A}_j^{(0)}\delta\hat{T}\right)\left(\hat{T}^{(0)}\right)^{-1}. \qquad (36)$$

Используя преобразование к спинорному виду можем получить возмущения для би-спиноров $\xi_j,\ j = 0,1,2,3$, которые удовлетворяют уравнениям (34). Возмущения матрицы $\hat{T}$ находятся непосредственно из общего решения (35), в котором возмущения могут быть связаны с произвольными функциями $U_a(p_1, p_2, p_3)$ и матрицей $\hat{\mu}$, входящей во вспомогательное уравнение для $\hat{T}$, от которого не зависит явный вид уравнений (27) и (23). Таким образом, решение (36) полностью решает задачу о возмущениях вблизи того или иного точного решения уравнений Дирака и может быть использовано для задач квантовой динамики.

Заключение

В работе с помощью метода матричных функциональных подстановок сконструированы полностью интегрируемые нелинейные уравнения в размерности 1+3, которые могут быть использованы в качестве моделей квантовых релятивистских частиц, описывающихся нелинейными уравнениями Дирака. Нелинейность модели может рассматриваться с двух точек зрения. Первая состоит в том, что уравнения представляют собой самосогласованную модель четырех частиц в собственном поле типа электромагнитного поля, но со значениями компонент 4-потенциала в алгебре матриц 4×4. Вторая интерпретация связана с исследованием возмущений вблизи одного точного решения нелинейной задачи, что дает описание частиц в заданном поле, также подобном теории Янга-Миллса. Обе интерпретации требуют более детальной физической проработки, которая выходит за пределы данной статьи. Важным элементом интерпретации построенных моделей является использование перехода от матриц 2×2 к би-спинорам. Это позволяет привести уравнения к стандартному виду теории частиц Дирака в поле с 4-потенциалом, который принимает значения в алгебре матриц 4×4. Поэтому такая модель может оказаться полезной для описания релятивистских частиц со спином 1/2.

Кроме этого, в статье построены точные решения выведенных уравнений как для самосогласованной модели, так и для возмущений вблизи одного точного решения. Таким образом, построенная модель допускает полное исследование решений и их возможной связи с реальными теориями элементарных частиц.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (номер проекта 16.2773.2017/4.6), фондом РФФИ (проект 16-42-732119 р_офи_м) и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Приложение

Матричное уравнение:

$$\hat{A}\hat{X}\hat{B} + \hat{C}\hat{X}\hat{D} = \hat{F}. \tag{37}$$

относительно матрицы $\hat{X} = \Big(\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_N\Big)$ размерности $N \times N$, где $\mathbf{x}_i$ – столбцы матрицы $\hat{X}$ с номером $i = 1, \dots, N$, может быть представлено в виде векторного уравнения относительно вектора размерности $d = N^2$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ и $\hat{F}$ известные матрицы той же размерности $n \times n$. Введем обозначения:

$$\Big(\widehat{I} \bigoplus \hat{B}\Big) = \begin{pmatrix} B_{11}\widehat{I} & B_{21}\widehat{I} & \cdots & B_{N1}\widehat{I} \\ B_{12}\widehat{I} & B_{22}\widehat{I} & \cdots & B_{N2}\widehat{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1N}\widehat{I} & B_{2N}\widehat{I} & \cdots & B_{NN}\widehat{I} \end{pmatrix}, \quad \Big(\widehat{I} \bigoplus \hat{D}\Big) = \begin{pmatrix} D_{11}\widehat{I} & D_{21}\widehat{I} & \cdots & D_{N1}\widehat{I} \\ D_{12}\widehat{I} & D_{22}\widehat{I} & \cdots & D_{N2}\widehat{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1N}\widehat{I} & D_{2N}\widehat{I} & \cdots & D_{NN}\widehat{I} \end{pmatrix}$$

$$\Big(\hat{A} \bigoplus \widehat{I}\Big) = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{A} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad \Big(\hat{C} \bigoplus \widehat{I}\Big) = \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{C} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{C} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widehat{I}$ – единичная матрица размерности $N \times N$. Тогда уравнение (37) эквивалентно системе уравнений:

$$\Big(\Big(\hat{A} \bigoplus \widehat{I}\Big)\Big(\widehat{I} \bigoplus \hat{B}\Big) + \Big(\hat{C} \bigoplus \widehat{I}\Big)\Big(\widehat{I} \bigoplus \hat{D}\Big)\Big)\mathbf{X} = \mathbf{F},$$

где:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_N \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N$ – столбцы матрицы $\hat{F}$.

Список литературы

1. Журавлев В.М., Никитин А.В. Новый подход к построению нелинейных эволюционных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановок типа Коула-Хопфа. // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. № 9. С. 603–611.

2. Журавлев В.М. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений. // ТМФ. 2009. Т. 158. № 1. С. 58–71.

3. Журавлев В.М. О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками. // Известия вузов. Поволжский регион. Серия физико-математическая. 2016. № 4. С. 84–101.

4. В.М. Журавлев. Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 1.

5. В.М. Журавлев. Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау–Лифшица. // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 35–48.

6. Журавлев В.М., Зиновьев Д.А. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 88. № 3. С. 194–197.

7. Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 440 с.: Дирак П.А.М. Релятивистское волновое уравнение электрона (рус.) // Успехи физических наук. 1979. Т. 129. Вып. 4. С. 681–691.

8. Янг Ч., Миллс Р. Сохранение изотопического спина и изотопическая калибровочная инвариантность // Элементарные частицы и компенсирующие поля / под ред. Д. Иваненко. М.: Мир, 1964. С. 28–38.

9. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М. : Наука, 1978. С. 240.

10. Ю.П. Рыбаков, В.И. Санюк. Многомерные солитоны. М.: Изд. Российского университета дружбы народов, 2001. 481 с.

References

1. Zhuravlev V.M. ,Nikitin A.V. Novyiy podkhod k postroeniyu nelineynykh evolutcionnykh uravneniy, linearizuemykh s pomoschyu podstanovok typa Cola-Hopfa. *Nelineynyiy mir*, 2007, vol. 5, no. 9. pp. 603–611. (in Russian).

2. Zhuravlev V.M. Metod obobschennykh podstanovok Cole-Hopfa i novye primery linearizuemykh nelineyykh evolutcionnykh eravneniy. *Theor. and Math. Phys.*, 2009, vol. 158, no. 1, pp. 58–71. (in Russian).

3. Zhuravlev V.M. O mnogomernykh nelineynykh uravneniyakh, svyazannykh s uravneniyami Laplasa i teploprovodnosti funkcionalnymi podstanovkami. *Izvestiya vuzov. Povolzhskiy region. Seriya physiko-matematicheskaya*, 2016, no. 4, pp. 84-101. (in Russian).

4. Zhuravlev V.M. Solitonnye resheniya uravneniy typa nelineynogo uravneniya Sredingera i funkcionalnye podstanovki. *Izvestiya vuzov. Povolzhskiy region. Seriya physiko-matematicheskaya*, 2018, no. 1. (in Russian).

5. Zhuravlev V.M. Matrichnye funkcionalnye podstanovki dlya integriruemykh dinamicheskikh system i uravneniya Landau-Lifshitca. *Nelineynaya dinamika*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 35–48. (in Russian).

6. Zhuravlev V.M., Ziniviev D.A. Metod obobschennykh podstanovok Cola-Hopha v razmernosty 1+2 i integriruemye modeli dvumernykh techeniy szhimaemoi zhidkosty. *Pisma v JETP*, 2008, vol. 88, no. 3, pp. 194–197. (in Russian).

7. Dirac P.A.M. *Princypy qvantovoy teorii.* Moscow, Nauka Publ., 1979. 440 p.: Dirac P.A.M. The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,* 1928, pp. 117.

8. C. N. Yang, R. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Physical Review*, 1954, vol. 96, pp. 191–195.

9. Slavnov A. A., Faddeev L.D. *Vvedenie v qvantovuyu teoriyu rkalibrovochnykh poley.* Moscow, Nauka Publ., 1978. 240 p. (in Russian).

10. Rybakov Yu.P., Sanuyk V.I. *Mnogomernye soilitony.* Moscow, RUDN University Publ., 2001. 481 p. (in Russian).

Авторы

Журавлев Виктор Михайлович, профессор, д. ф.-м. н., кафедра Теоретической физики, Ульяновский государственный университет, ул. Л.Толстого, 42, г. Ульяновск, 432017, Россия; Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Журавлев В.М. Об интегрируемом нелинейном уравнении Дирака в размерности 1+3 // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 3. С. 19—30.

Authors

Zhuravlev Victor Mikhailovich, Professor, Doctor of Physics and Mathematics, Theoretical Physics department, Ulyanovsk State University, Leo Tolstoy str., 42, Ulyanovsk, 432017, Russia; N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlevskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: zhvictorm@gmail.com

Please cite this article in English as:
Zhuravlev V.M. On integrable nonlinear Dirac equations with 1+3 dimension. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 3, pp. 19–30.