УДК 514.763: 514.8

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ 5-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. I. *H*-ПРОСТРАНСТВА ТИПА {32}

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[b,2]

[a] Кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия
[b] Кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

С помощью метода косонормального репера (Аминова) определяются пятимерные h-пространства типа {32} и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективных движений того же типа.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, проективное преобразование, h-пространство типа {32}.

ON PROJECTIVE MOTIONS OF 5-DIMENSIONAL SPACES I. H-SPACES OF THE TYPE {32}

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[b,2]

[a] Department of Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia
[b] Department of Geometry, Division of Mathematics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia

In this paper five-dimensional h-spaces of the type {32} are determined using the method of skew-normal frame (Aminova) and necessary and sufficient conditions for the existence of projective motions of the same type are established.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, projective motion, h-space of the type {32}.

PACS: 11.10.Kk
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.21-31

Введение

Множество всех геодезических линий псевдориманова многообразия M^n с метрикой g и связностью Леви–Чивита ∇ задает его проективную структуру, определяемую локально проективными параметрами Томаса Π^i_{jk} — составляющими объекта проективной связности в M^n.

Векторное поле X на многообразии M с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением* (п.д.), если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т.е. автоморфизмов проективной структуры. Для этого

[1]E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2]E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$L_X g = h,$$

(*обобщенное уравнение Киллинга*) и

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi$$

(*уравнение Эйзенхарта*), где $Y, Z, W \in TM$, $(n+1)\varphi = \mathrm{div}X$. Если $\varphi = const$, т. е. $\mathrm{div}X = const$, то проективное движение является аффинным, в частности, при $h = cg$ гомотетическим (преобразование подобия), а при $h = 0$ изометрическим (сохраняющим метрику g).

Данная статья посвящена проблеме определения псевдориманових многообразий (M, g), допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Подобная задача для n-мерных собственно римановых и лоренцевых пространств была решена в работах Т. Леви-Чивита, А. С. Солодовникова, А. З. Петрова и А. В. Аминовой ([4], см. обзор в [9]). Для псевдоримановых многообразий произвольных сигнатуры и размерности проблема их классификации по алгебрам и группам Ли проективных преобразований, поставленная более ста лет назад, остается открытой. Между тем многомерные псевдоримановы пространства служат фоном, на котором развиваются современные физические теории (калибровочные, суперсимметричные и др.), решаются задачи физики высоких энергий, астрофизики и космологии; симметрии пространств в форме непрерывных групп преобразований, сохраняющих те или иные геометрические или физические структуры, служат основой для построения механических и полевых законов сохранения. Изучение проективно-групповых свойств многомерных пространств вносит также вклад в теорию дифференциальных уравнений (см., например, [6]).

Классификация пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики будем называть *h-метриками типа* χ, а соответствующие пространства – *h-пространствами типа* χ.

В данной работе с помощью метода косонормального репера [9] определяются пятимерные h-пространства типа $\{32\}$ (теорема 1) и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективного движения того же типа (теорема 2).

Интегрированию обобщенных уравнений Киллинга с известной правой частью и нахождению общего решения уравнения Эйзенхарта будут посвящены следующие работы.

1. Канонические формы в косонормальном репере.

В косонормальном репере (Y_h), адаптированном к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h_{ij}

$$\chi = \left\{ r_1 \dots r_{k_0} \left(m_1^{k_0+1} \dots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \right) \dots \left(m_1^{k} \dots m_{s_k}^{k} \right) \right\}$$

и заданном в области $V \subset M^n$ разбиением $I = \bigcup_{\alpha=1}^{k} I_\alpha$, $I_\alpha = \{ s \,| n_\alpha + 1 \le s \le n_\alpha + r_\alpha \}$, $n_1 = 0$, $n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l$, $r_1 + ... + r_k = n$, $\alpha = 2, ..., k$, множества индексов $I = \{1, ..., n\}$ и биекцией $\sim$: $I \to I$: $I_\alpha \ni h \to \tilde{h} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - h \in I_\alpha$ $(\alpha = 1, ..., k)$, обладающей свойством $\sim \circ \sim = id_I$, индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p \delta_p^{\tilde{q}}$, $e_p = \pm 1$, например, $\theta_p = e_p \theta^{\tilde{p}}$.

В терминах локальной координатной системы каноническая форма $\theta = \theta^i E_i$ задается соотношением ([9], с. 96)

$$\theta^i = \Theta^i_j dx^j \quad \left(dx^k = \underset{i}{\xi}^k \theta^i \right), \tag{1}$$

где $\left(\Theta_j^i\right)$ – обратная матрица для $\left(\underset{j}{\xi^k}\right)$:

$$\underset{k}{\xi^i}\Theta_j^k = \delta_j^i. \tag{2}$$

Набор линейно независимых форм θ^i образует в каждой точке $p \in M$ корепер, дуальный к базису ξ в T_pM.

Пусть $(Y_1, \ldots, Y_n) = \left(\underset{1}{\xi^i}\partial/\partial x^i, \ldots, \underset{n}{\xi^i}\partial/\partial x^i\right)$ – косонормальный репер в области $V \subset M$, $U \subset V$ – координатная окрестность, $(X_i) \equiv \left(\partial/\partial x^i\right)$ – натуральный репер, $g_{ij} = g\left(X_i, X_j\right)$. Для 1-формы θ_h, сопряженной векторному полю Y_h относительно $g\left|_V\right.$:

$$(\theta_h, Y_l) \equiv \theta_h\left(Y_l\right) = g\left(Y_h, Y_l\right)$$

$(l = 1, ..., n)$, из (1), (2) имеем

$$\theta_h|_U = \underset{h}{\xi_i} dx^i = e_h\, \theta^{\tilde{h}}\Big|_U, \quad \Theta_i^h = e_h \underset{\tilde{h}}{\xi_i}$$

$(h = 1, \ldots, n)$. Разрешив уравнения $g_{ij}\underset{h}{\xi^i} = \underset{h}{\xi_j}$ относительно g_{ij}, получим

$$g_{ij} = \sum_{h=1}^{n} e_h \underset{h}{\xi_i}\underset{\tilde{h}}{\xi_j}, \qquad g|_U = \sum_{h=1}^{n} e_h \theta_h \otimes \theta_{\tilde{h}} \equiv \sum_{h=1}^{n} e_h \theta_h \theta_{\tilde{h}}.$$

Из этих соотношений следует формула перехода от косонормального репера $(Y_1, \ldots, Y_n)$ на U к координатному реперу $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$X_j = \sum_{h=1}^{n} e_h \underset{\tilde{h}}{\xi_j} Y_h \tag{3}$$

$(j = 1, \ldots, n)$, а также формула для компонент g^{ij} контравариантного метрического тензора g_c:

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{n} e_h \underset{h}{\xi^i}\underset{\tilde{h}}{\xi^j}, \quad \text{или} \quad g_c|_U = \sum_{h=1}^{n} e_h Y_h \otimes Y_{\tilde{h}}.$$

В силу (3) для билинейной формы h на V имеем

$$h_{ij} = h\left(X_i, X_j\right) = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q h\left(Y_p, Y_q\right) \underset{\tilde{p}}{\xi_i}\underset{\tilde{q}}{\xi_j}.$$

Аналогично

$$h^{ij} = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q h\left(Y_p, Y_q\right) \underset{\tilde{p}}{\xi^i}\underset{\tilde{q}}{\xi^j}.$$

Отсюда, введя обозначения $\bar{h}_{pq} = h\left(Y_p, Y_q\right)$, получим ([9], с. 99)

$$h = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\tilde{p}} \otimes \theta_{\tilde{q}} \equiv \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar{h}_{pq} \theta_{\tilde{p}} \theta_{\tilde{q}}.$$

2. Вычисление формы связности.

Определим в V систему инвариантов $\gamma_{lpk} = -\gamma_{plk}$ (коэффициенты вращения Риччи [8], § 30) равенствами $\nabla_{Y_k} Y_l \equiv \sum_{p=1}^{5} e_p \gamma_{lpk} Y_{\tilde{p}} = \gamma_{lk}^p Y_p$, где $\gamma_{lk}^p = e_p \gamma_{l\tilde{p}k}$ – компоненты 1-формы связности ω_j^i в косорепере (Y_h):

$$\omega_j^i = \gamma_{jl}^i \theta^l = e_i \gamma_{j\tilde{i}l} \theta^l = \sum_{h=1}^{5} e_h e_i \gamma_{j\tilde{i}h} \theta_{\tilde{h}}. \tag{4}$$

В косонормальном репере уравнение Эйзенхарта после замены $h = a + 2\varphi g$ примет вид

$$Y_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h (\bar{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{qr} Y_p \varphi + \bar{g}_{pr} Y_q \varphi$$

$(p, q, r = 1, \ldots, 5)$, что равносильно

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h (\bar{a}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q\varphi)\theta_p + (Y_p\varphi)\theta_q, \tag{5}$$

где $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ — 1-форма связности. К интегрированию этого уравнения и сводится наша задача.

Пусть θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, (Y_h) – косонормальный репер в области $V \subseteq M$, в котором билинейные формы g и h имеют канонический вид

$$g|_V = \sum_{p=1}^{k} g_p, \;\; h|_V = \sum_{p=1}^{2} (\lambda_p + 2\varphi) g_p + h_0 \equiv a + 2\varphi g, \;\; 2\varphi = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \neq \lambda_1$ – характеристические числа билинейной формы $a = h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 3 и 2 ($k = 2$, тип $\{32\}$),

$$\begin{gathered} g_1 = e_1(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_2 + \theta_3\theta_1), \quad g_2 = e_2(\theta_4\theta_5 + \theta_5\theta_4), \\ h_0 = a_0 = e_1(\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1) + e_2\theta_4\theta_4, \quad (\tilde{1} = 3,\; \tilde{2} = 2,\; \tilde{3} = 1,\; \tilde{4} = 5,\; \tilde{5} = 4), \end{gathered} \tag{6}$$

здесь e, e_1, e_2 равны ± 1.

Подставив в (5) вместо $\bar{g}_{pq}$ и $\bar{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения для типа $\{32\}$, получим

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_4\varphi = 0, \; d\lambda_1 = \frac{2}{3} e_1 (Y_3\varphi)\theta_1, \; d\lambda_2 = e_2 (Y_5\varphi)\theta_4, \tag{7}$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1, \; \omega_{13} = -(Y_3\varphi)\theta_2, \; \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_1$$

$$\omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_2, \; \omega_{32} = (Y_3\varphi\theta_3), \; \omega_{34} = \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_4,$$

$$\omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_3 - \frac{Y_3\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}\theta_4 + \frac{Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}\theta_5,$$

$$\omega_{45} = -(Y_5\varphi)\theta_5.$$

Отсюда с помощью формулы (4) найдем коэффициенты вращения Риччи

$$\gamma_{213} = -\gamma_{123} = \frac{1}{3} e_1 Y_3\varphi, \; \gamma_{231} = -\gamma_{321} = e_1 Y_3\varphi, \; \gamma_{312} = -\gamma_{132} = -e_1 Y_3\varphi$$

$$\gamma_{435} = -\gamma_{345} = \frac{e_1 Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \; \gamma_{513} = -\gamma_{153} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \gamma_{522} = -\gamma_{252} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$\gamma_{523} = -\gamma_{253} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}, \; \gamma_{531} = -\gamma_{351} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1}, \; \gamma_{532} = -\gamma_{352} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2},$$

$$\gamma_{533} = -\gamma_{353} = \frac{e_1 Y_5\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3}, \; \gamma_{534} = -\gamma_{354} = \frac{e_2 Y_3\varphi}{\lambda_2 - \lambda_1},,$$

$$\gamma_{535} = -\gamma_{355} = -\frac{e_2 Y_3\varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2},$$

$$\gamma_{544} = -\gamma_{454} = -e_2 Y_5\varphi;$$

остальные коэффициенты γ_{ijk} равны нулю.

Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной функцией u:

$$Y_s u \equiv \underset{s}{\xi^i}(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0 \quad (s = 1, \ldots, p; \; i = 1, \ldots, n),$$

где $\underset{s}{\xi}^i$ — компоненты p векторов косонормального репера $(Y_1, \ldots, Y_n)$, была вполне интегрируемой (полной), т. е. допускала $n-p$ независимых решений $u^1, \ldots, u^p$, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы ([8], с. 143)

$$[Y_s, Y_t] \equiv Y_s Y_t - Y_t Y_s = \sum_{r=1}^{n} e_r (\gamma_{rst} - \gamma_{rts}) Y_r \quad (s, t = 1, \ldots, p),$$

где

$$\gamma_{ijk} = \underset{i}{\xi}_{l,m} \underset{j}{\xi}^l \underset{k}{\xi}^m$$

— коэффициенты вращения Риччи, линейно выражались через операторы системы $Y_1, \ldots, Y_p$ ([7], с. 12).

Из (9) следуют равенства

$$Y_i \lambda_1 = \frac{2}{3} \delta_{i3} Y_3 \varphi, \quad Y_i \lambda_2 = \delta_{i5} Y_5 \varphi. \tag{8}$$

Используя полученные соотношения и формулу

$$[Y_k, Y_h] \equiv \nabla_{Y_k} Y_h - \nabla_{Y_h} Y_k = \sum_{l=1}^{n} e_l \left(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk}\right) Y_{\bar{l}},$$

составим скобки Ли векторных полей $Y_1, ..., Y_5$ и выпишем те из них, которые отличны от нуля:

$$\begin{gathered}
[Y_1, Y_3] = -\frac{2}{3} (Y_3 \varphi) Y_2, \\
[Y_1, Y_5] = \frac{Y_5 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = -\frac{4}{3} (Y_3 \varphi) Y_3, \\
[Y_2, Y_5] = \frac{Y_5 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} Y_1 + \frac{Y_5 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} Y_2, \quad [Y_3, Y_4] = \frac{Y_3 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} Y_4, \\
[Y_3, Y_5] = \frac{Y_5 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} Y_1 + \frac{Y_5 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} Y_2 + \frac{Y_5 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} Y_3 - \frac{Y_3 \varphi}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} Y_4 + \frac{Y_3 \varphi}{\lambda_2 - \lambda_1} Y_5, \\
[Y_4, Y_5] = -(Y_5 \varphi) Y_5;
\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда видно, что системы дифференциальных уравнений $Y_1 u = Y_2 u = Y_4 u = Y_5 u = 0$, $Y_1 u = Y_4 u = Y_5 u = 0$ и $Y_4 u = Y_5 u = 0$ являются вполне интегрируемыми (см. выше). Обозначим единственное решение первой системы и одно из двух независимых решений второй системы через u^3, еще одно решение второй системы через u^2, решения третьей системы – через u^1, u^2, u^3. Системы $Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = Y_4 u = 0$ и $Y_1 u = Y_2 u = Y_3 u = 0$ также вполне интегрируемые, решения первой системы обозначим u^5, второй – u^4 и u^5. В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{i_1}{\xi}^{j_2} = \underset{i_2}{\xi}^{j_1} = 0, \ \underset{1}{\xi}^i = Q(x) \delta_1^i, \ \underset{4}{\xi}^i = P(x) \delta_4^i, \ \underset{2}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^5 = 0 \quad (i_1, j_1 = 1, 2, 3; i_2, j_2 = 4, 5).$$

Затем из (7) и (8) следует, что λ_1 зависит только от x^3, а λ_2 – только от x^5: $\lambda_1 \equiv f_1(x^3)$, $\lambda_2 \equiv f_2(x^5)$, при этом

$$\varphi = \frac{1}{2} (3 f_1 + 2 f_2).$$

3. Основные уравнения.

Приравнивая в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей в правых и левых частях уравнений (9), с помощью формулы

$$[Y_k, Y_h]|_U = (\underset{k}{\xi}^i \partial_i \underset{h}{\xi}^j - \underset{h}{\xi}^i \partial_i \underset{k}{\xi}^j) \partial x^j$$

получим следующую систему нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^{j}$:

$$\begin{aligned}
&1^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1-\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1=0,\\
&2^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&3^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{1}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{1}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{1}{\xi}^1=-\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{2}{\xi}^1,\\
&4^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2=-\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{2}{\xi}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&5^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^3=\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^3=0,\\
&6^\circ\ \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{1}{\xi}^1=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&7^\circ\ -\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{1}{\xi}^1=-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1,\\
&8^\circ\ \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^1+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^1-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^1=-2\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{3}{\xi}^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&9^\circ\ \underset{2}{\xi}^1\partial_1\underset{3}{\xi}^2+\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^1\partial_1\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^2\partial_2\underset{2}{\xi}^2-\underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{2}{\xi}^2=-2\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{3}{\xi}^2,\\
&10^\circ\ \underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{3}{\xi}^3=-2f_1'(\underset{3}{\xi}^3)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&11^\circ\ \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^1=\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{2}{\xi}^2=0,\\
&12^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{4}{\xi}^4=\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{4}{\xi}^4=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&13^\circ\ \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^1=-\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^1,\\
&14^\circ\ \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{2}{\xi}^2=-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&15^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^4=\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^4=0,\\
&16^\circ\ \underset{1}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5=\underset{2}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&17^\circ\ \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^1=\underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{3}{\xi}^2=0,\\
&18^\circ\ \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{4}{\xi}^4=-\frac{3}{2}\frac{1}{f_1-f_2}\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{4}{\xi}^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&19^\circ\ \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^4\partial_4\underset{4}{\xi}^4-\underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{4}{\xi}^4=\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{5}{\xi}^4,\\
&20^\circ\ \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5=-f_2'(\underset{5}{\xi}^5)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&21^\circ\ \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^1=-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^1-\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^1-\frac{1}{(f_2-f_1)^3}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{1}{\xi}^1,\\
&22^\circ\ \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^2=-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^2-\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{2}{\xi}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&23^\circ\ \underset{5}{\xi}^5\partial_5\underset{3}{\xi}^3=-\frac{1}{f_2-f_1}\underset{5}{\xi}^5f_2'\underset{3}{\xi}^3,\\
&24^\circ\ \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^4=\frac{1}{f_2-f_1}\frac{3}{2}\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{5}{\xi}^4+\frac{1}{(f_2-f_1)^2}\frac{3}{2}\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{4}{\xi}^4,
\end{aligned}$$

$$25^\circ\ \underset{3}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5=\frac{1}{f_2-f_1}\frac{3}{2}\underset{3}{\xi}^3f_1'\underset{5}{\xi}^5 \tag{10}$$

(штрих означает производную функции одного переменного по ее аргументу, например, $f_1'\equiv$ $\equiv df_1/dx^3$).

Из уравнений 6°,2°, 11° и 12° системы (10) с учетом условия $\det\left(\underset{i}{\xi^j}\right) \neq 0$) получим $\partial_4 \underset{1}{\xi^1} = = \partial_1 \underset{2}{\xi^2} = \partial_4 \underset{2}{\xi^2} = \partial_1 \underset{4}{\xi^4} = \partial_2 \underset{4}{\xi^4} = 0$. Затем, интегрируя уравнения 7°, 14° и 18°, найдем

$$\underset{1}{\xi^1} = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_1(x^1, x^2, x^3), \quad \underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}\Omega_2(x^2, x^3), \quad \underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}\Omega_4(x^4, x^5).$$

После замены координат

$$x^{1'} = \int \frac{dx^1}{\Omega_1}, \quad x^{2'} = \int \frac{dx^2}{\Omega_2}, \quad x^{4'} = \int \frac{dx^4}{\Omega_4}, \quad x^{k'} = x^k \quad (k = 3, 5),$$

не меняющей полученных ранее результатов, опустив штрихи, имеем

$$\underset{1}{\xi^1} = \underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

Интегрируя уравнения 1°, 13° и учитывая, что $\underset{2}{\xi^1}$ не зависит от переменной x^4 в силу 11°, получим

$$\underset{2}{\xi^1} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}(\sigma_1 + 2D(x^2, x^3)),$$

где введено обозначение

$$\sigma_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1}.$$

Выполнив преобразование координат

$$x^{1'} = x^1 - \int D dx^2, \quad x^{k'} = x^k \quad (k \neq 1),$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{2}{\xi^1} = \frac{\sigma_1}{2(f_2 - f_1)}.$$

Интеграция уравнений 23°, 5° и 10° дает

$$\underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_1' x^2 + \tau(x^3))}$$

Возможны два случая: 1)$f_1' \neq 0$, 2)$f_1' = 0$. В первом случае сделаем замену координат $\bar{x}^3 = f_1(x^3)$, $\bar{x}^k = x^k$ $(k \neq 3)$ и положим $\bar{\tau} = (f_1')^{-1}\tau$, тогда

$$\underset{3}{\bar{\xi}^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(x^2 + \bar{\tau})}, \quad \underset{3}{\bar{\xi}^k} = \underset{3}{\xi^k} \quad (k \neq 3).$$

Во втором случае сделаем замену $\bar{x}^3 = \int \tau dx^3$. Опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1 \quad (c_1 = \mathrm{const}),$$

$$\underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A} \quad \left(A \equiv \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1\right),$$

где ε_1 равно 0 или 1.

Подобно этому, из уравнений 20°, 16° и 25° получим

$$f_2 = \varepsilon x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2 \quad (c_2 = \mathrm{const}),$$

$$\underset{5}{\xi^5} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}B} \quad \left(B \equiv \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2\right),$$

где ε_2 равно 0 или 1.

Из уравнения 17° следует $\partial_4 \underset{3}{\xi}^1 = 0$ Интегрируя уравнения 21°, 3° и 8°, найдем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{8(f_2 - f_1)A}(2A\sigma_2 + A(\sigma_1)^2 + 4\Phi(x^3))$$

где

$$\sigma_2 \equiv \frac{2}{(f_2 - f_1)^2}.$$

В новых координатах

$$x^{1'} = x^1 - \frac{1}{2}\int \Phi dx^3, \quad x^{k'} = x^k, \quad (k \neq 1),$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)}\left(\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right).$$

Интегрирование уравнений 22°, 4° и 9° дает

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}(A\sigma_1 + 2\Psi(x^3) - \varepsilon x^1).$$

Сделаем замену координат

$$x^{2'} = x^2 - \int \Psi dx^3, \quad x^{k'} = x^k \quad (k \neq 2)$$

и опустим штрихи, тогда

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}\left(\sigma_1 - \frac{\varepsilon x^1}{A}\right).$$

Интегрируя уравнения 15°, 24° и 19°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{2B(f_1 - f_2)^{3/2}}(B\sigma_3 + F(x^5)),$$

где обозначено

$$\sigma_3 \equiv \frac{3}{f_1 - f_2}.$$

Выполнив преобразование координат

$$x^{4'} = x^4 - \int F dx^5, \quad x^{k'} = x^k \quad (k \neq 4),$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\sigma_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}.$$

4. h-пространства типа {32}.

Используя найденные значения компонент векторов косонормального репера

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{2}{\xi}^1 = \frac{\sigma_1}{2(f_2 - f_1)}, \quad \underset{3}{\xi}^1 = \frac{1}{4(f_2 - f_1)}\left(\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right),$$

$$\underset{3}{\xi}^2 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}\left(\sigma_1 - \frac{\varepsilon x^1}{A}\right), \quad \underset{3}{\xi}^3 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad \underset{4}{\xi}^4 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}},$$

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{\sigma_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}B}$$

(выписаны ненулевые компоненты) по формулам (1), (2) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере

$$\theta_1 = 2e_1(f_2 - f_1)Adx^3, \quad \theta_2 = e_1(f_2 - f_1)(dx^2 - (A\sigma_1 - \varepsilon x^1)dx^3),$$
$$\theta_3 = e_1(f_2 - f_1)\left(dx^1 - \frac{1}{2}\sigma_1 dx^2 - \left(\frac{1}{2}A\sigma_2 - \frac{1}{4}A\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon x^1\right)dx^3\right),$$
$$\theta_4 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}Bdx^5, \quad \theta_5 = e_2(f_1 - f_2)^{3/2}\left(dx^4 - \frac{1}{2}\sigma_3 Bdx^5\right)$$

и затем по формулам (6) – компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере (X_i). Подсчитав символы Кристоффеля найденной метрики g, непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. В итоге получим следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть M есть 5-мерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi = \{32\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f_1, f_2 – попарно различные характеристические корни билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратностей соответственно 3 и 2. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта, т. е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi = \{32\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$g = e_1(f_2 - f_1)^2 g_1 + e_2(f_1 - f_2)^3 g_2,$$
$$h = (3f_1 + 2f_2)g + e_1\left(f_1 g_1 + \Lambda_1\right) + e_2\left(f_2 g_2 + \Lambda_2\right), \tag{11}$$
$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$g_1|_U = 4Adx^1dx^3 + \left(dx^2\right)^2 + 2\left(\varepsilon x^1 - \frac{4A}{f_2 - f_1}\right)dx^2dx^3 +$$
$$\left(\varepsilon x^1\right)^2 - \frac{8A\varepsilon x^1}{f_2 - f_1} + \frac{4A^2}{(f_2 - f_1)^2}\left(dx^3\right)^2,$$
$$g_2|_U = 2Bdx^4dx^5 - \frac{3B^2}{f_1 - f_2}\left(dx^5\right)^2, \tag{12}$$
$$\Lambda_1|_U = 4Adx^2dx^3 + 4A\left(\varepsilon x^1 - \frac{2A}{f_2 - f_1}\right)\left(dx^3\right)^2, \quad \Lambda_2|_U = B^2\left(dx^5\right)^2,$$
$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2,$$

где $f_1 = \varepsilon x^3 + (1 - \varepsilon_1)c_1$, $f_2 = \varepsilon x^5 + (1 - \varepsilon_2)c_2$, $c_1, c_2 - const$, $A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2$, ε_1, ε_2 принимают независимо значения 0 или 1, $e_1, e_2 = \pm 1$, τ – функция x^3, μ – функция x^5.

Отсюда следует

Теорема 2. *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{32\}$ на 5-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$, где метрика g и билинейная форма h определены формулами (11) и (12) (теорема 1).*

Список литературы

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.* 1896. № 24 (2). S. 255–300.

2. Петров А. З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики. Учен. зап. Казан. ун-та, 1949, 109 (3), с. 7–36.

3. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств // УМН. 1956. № 11. С. 45–116.

4. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий. // УМН. 1995. № 50 (1). С. 69–142.

5. Аминова А. В. Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений. // Изв. вузов. Матем. 1994. № 2. С. 3–11.

6. Аминова А. В. Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1995. № 186 (12). С. 21–37.

7. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. Москва: Ин. лит., 1947.

8. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. Москва: Ин. лит., 1948.

9. Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. Москва: Янус-К, 2003. 619 с.

References

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.*, 1896, no. 24 (2), pp. 255–300.

2. Petrov A. Z. *On the geodesic mapping of Riemannian spaces of indefinite metric.* Uchen. Zap. Kazan. un-ta, 1949, 109 (3), pp. 7–36. (in Russian)

3. Solodovnikov A. S. Projective transformations of Riemannian spaces. *UMN*, 1956, no. 11, pp. 45–116. (in Russian)

4. Aminova. A. V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentzian manifolds. *UMN*, 1995, no. 50 (1), pp. 69–142. (in Russian)

5. Aminova. A. V. Automorphisms of geometric structures as symmetries of differential equations. *Izv. vuzov. Matem.*, no. 2, pp. 3–11. (in Russian)

6. Aminova. A. V. Projective transformations and symmetries of differential equations. *Matem. sb.*, 1995, no. 186 (12), pp. 21–37. (in Russian)

7. Eisenhart L.P. *Continous groups of transformations.* Moscow, IL Publ. 1947. (in Russian)

8. Eisenhart L.P. *Riemannian geometry.* Moscow, IL Publ. 1948. (in Russian)

9. Aminova A. V. *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds.* Moscow, Yanus-K Publ. 2003. 619 p. (in Russian)

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, аспирант, кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h-пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 21—31.

Authors

Aminova Asya Vasiljevna, Professor, Dr. of Science, Professor, Dept. Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin, postgraduate, Division of Mathematics, Department of Geometry, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:

Aminova A. V., Khakimov D. R. On projective motions of 5-dimensional spaces i. h-spaces of the type $\{32\}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 21–31.