УДК 530.12

О ГЕОМЕТРИЗАЦИИ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Кирчанов В. С.[a,1]

[a] Пермский национальный политехнический университет, г. Пермь, 614990, Россия

Получено уравнение Клейна-Гордона-Фока в искривленном 4-импульсном пространстве. В рамках геометризации выведен аналог уравнений Эйнштейна в псевдоримановом 4-импульсном пространстве, которые являются «дуальными» к уравнениям Эйнштейна для искривленного пространства-времени. Получены также уравнения Эйнштейна для комплексного фазового пространства, включающего псевдоримановые пространство-время и эффективное 4-импульсное пространство. Приведены метрика Шварцшильда в 4-импульсном пространстве и эрмитова метрика Бергмана для шара в 8-мерном фазовом пространстве.

Ключевые слова: псевдориманово 4-импульсное пространство, «дуальные» уравнения Эйнштейна, комплексное псевдориманово фазовое пространство, метрика Бергмана.

THE GEOMETRIZATION OF THE PHASE SPACE

Kirchanov V. S.[a,1]

[a] Perm National Research Polytechnic University, Perm, 614990, Russia

The equation of the Klein-Gordon-Fock in a curved 4-momentum space. As part geometrization launched an analogue of the Einstein equations in the pseudo 4-momentum space, which are "dual"to Einstein's equations for the curved space-time. Einstein's equations are also obtained for the complex phase space, consisting of a pseudo space-time and 4-momentum space. Shows Hermitian Bergman metric for the ball in the phase space.

Keywords: pseudo Riemann 4- momentum space, "dual"Einstein's equation, complex pseudo Riemann-phase space, Bergman metric.

PACS: 95.30.sf
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.92-103

Введение

В квантовой теории пространство координат, пространство импульсов и их представления имеют равноправный статус. В общей теории относительности это не так. В книге [1] отмечено, что основой различных вариантов ОТО является искривленное пространство-время. В рамках теории расслоений [1,2] используется искривленное пространство–время (база), а 4-импульсное псевдоэвклидово пространство (слой), является кокасательным к каждой точке пространства-времени. Возможны другие варианты.

Существует глубокая аналогия между 4-вектором пространства-времени и 4-вектором импульса справедливая в псевдоэвклидовом и возможно в римановом пространстве. Возникает вопрос, можно ли геометризировать векторное 4-импульсное пространство, т.е. сформулировать аналог общей теории относительности в этом пространстве, рассматривая координаты и импульсы как независимые переменные. Поскольку пространство-время и 4-импульсное пространство являются

[1]E-mail: Kirchanovvs@pstu.ru

подпространствами фазового пространства, то возможна ли его геометризация. Например, рассматривать фазовое пространство в качестве комплексного риманова пространства, и выбирать эрмитовые метрики, обладающие физическим содержанием.

Искривленное импульсное пространство малой размерности может возникать при рассмотрении квантовой гравитации [4], и в случае перехода Лифшица на горизонте черной дыры [5]. Поэтому, формулировка аналога общей теории относительности в псевдоримановом 4-импульсном пространстве, и геометризация комплексного искривленного фазового пространства, содержащего как подпространства, псевдоримановые пространство-время и эффективное 4-импульсное пространство, может представлять определенный интерес.

План статьи следующий: в п.1 получаем уравнение Клейна-Гордона-Фока в искривленном 4-импульсном пространстве; в п.2 выводим уравнения Эйнштейна в псевдоримановом 4-импульсном пространстве, используя математический формализм римановой геометрии; в п.3 получен аналог метрики Шварцшильда в 4-импульсном пространстве; в п.4 произведена простейшая геометризация фазового пространства как комплексного псевдориманового пространства, и получен аналог уравнения Эйнштейна для него; в п.5 приведена эрмитовая метрика Бергмана для плотного шара в комплексном и овеществленном фазовом пространстве.

1. Уравнение Клейна-Гордона в искривленном 4-импульсном пространстве

Как известно, в специальной теории относительности 4-импульсное пространство $\left(p^0, p^1, p^2, p^3\right)$ псевдоэвклидово [6]. Квадрат интервала имеет вид

$$dw^2 = \left(dp^0\right)^2 - \left(dp^1\right)^2 - \left(dp^2\right)^2 - \left(dp^3\right)^2 = \sigma_{ii}(dp^i)^2 \ , \tag{1.1}$$

где $p^0 = \frac{E}{c}$, E -энергия, c -скорость света, $\sigma_{ii} = diag\,||\sigma_{ik}||$ - фундаментальный метрический тензор 4-импульсного пространства. Здесь и далее $i, k = 0, 1, 2, 3$.

Введем инвариантный квадрат пространственно-временного интервала $c^2t^2 - x^2 = s^2$, и положим $s^2 = l^2$, где l - фундаментальная длина. Если положить её равной длине волны Комптона $l = \lambda\!\!\!^{-}_C = \frac{\hbar}{mc}$ (характерный размер квантовых релятивистских процессов), тогда используя, операторы времени $\hat{t} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial E}$ и координаты $\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x}$, можно записать операторный аналог этого уравнения

$$c^2\hat{t}^2 - \hat{x}^2 = \frac{\hbar^2}{m^2c^2} \ . \tag{1.2}$$

Это уравнение в 4-импульсном пространстве принимает вид

$$\Box_p\phi - \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\phi = 0 \ , \tag{1.3}$$

где $\Box_p \equiv \left(\frac{\partial^2}{(\partial p_x)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial p_y)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial p_z)^2}\right) - c^2\frac{\partial^2}{(\partial E)^2}$ - даламбертиан.

Формула (1.3) – уравнение Клейна-Гордона в псевдоэвклидовом 4-импульсном пространстве для нейтрального скалярного поля [7]. Здесь при свободном члене стоит коэффициент обратно пропорциональный квадрату массы, в отличие от уравнения Клейна-Гордона в псевдоэвклидовом пространстве-времени $\left(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3\right)$. Это особенность уравнений в импульсном пространстве.

Применяя к уравнению (1.3) 4-мерный интеграл Фурье [7] $\phi(p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int dx e^{-ikx}\tilde{\phi}(x)$, где $p^i = \hbar k^i$, $x = x^i$, выбирая функцию $\tilde{\phi}\left(x\right) = \delta\left(x^{\mu 2} - m^{-2}\right)\phi\left(x\right)$, получаем уравнение в координатном представлении $\left[\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 - m^{-2}\right] = 0$, $(\hbar = c = 1)$. Из-за дельта-функции интеграция идет по двум трехмерным гиперболоидам $x^0 = \pm\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + m^{-2}}$, лежащих внутри световых конусов.

На расстояниях от комптоновских длин $\lambda\!\!\!^{-}_C$ до планковских $\lambda_{Pl} = \sqrt{G_N\hbar/c^3}$ импульсное пространство может искривляться [4]. Введем квадрат интервала для 4-импульсного пространства [1]

$$dw^2 = \sigma_{ik}dp^i dp^k, \tag{1.4}$$

где $\sigma_{ik} = \sigma_{ki} = f\left(p^i\right)$ - метрический тензор псевдориманова 4-импульсного пространства. Его компоненты являются некоторыми функциями трех импульсных координат и «энергетической» координаты p^0 . $\sigma = \det||\sigma_{ik}||$ - определитель, $\sigma^{ik}\sigma_{il} = \sigma_l^k = \delta_l^k$ -смешанный метрический тензор. Матрица $\left||\sigma^{ik}\right||$ - матрица обратная к матрице $||\sigma_{ik}||$.

Введем ковариантную производную ковариантного вектора [5] в псевдоримановом 4-импульсном пространстве

$$\tilde{\nabla}_i A_k = \frac{\partial A_k}{\partial p^i} - \tilde{\Gamma}^l_{ki} A_l$$

где $\tilde{\Gamma}^l_{ki}$ - трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода в 4-импульсном пространстве, которые определим ниже.

Оператор Даламбера (Бельтрами-Лапласа) метрики (1.4) в искривленном 4-импульсном пространстве принимает вид

$$\Box_p \equiv -\tfrac{1}{\sqrt{-\sigma}} \tfrac{\partial}{\partial p^i} \left(\sqrt{-\sigma} \sigma^{ik} \tfrac{\partial}{\partial p^k} \right) . \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.3) превращается, в псевдоримановом 4-импульсном пространстве, в уравнение Клейна-Гордона-Фока для нейтрального скалярного поля:

$$(-\sigma)^{-1/2} \tfrac{\partial}{\partial p^i} \left[(-\sigma)^{1/2} \sigma^{ik} \tfrac{\partial}{\partial p^k} \phi \right] + \left(\tfrac{\hbar}{mc} \right)^2 \phi = 0 . \tag{1.6}$$

Эквивалентная форма уравнения (1.6) в псевдоримановом 4-импульсном пространстве с метрикой σ^{ik} следующая

$$\left[\sigma^{ik} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_k + \left(\tfrac{\hbar}{mc} \right)^2 \right] \phi(p) = \sigma^{ik} \left[\tfrac{\partial^2 \phi}{\partial p^i \partial p^k} - \tilde{\Gamma}^l_{ki} \tfrac{\partial \phi}{\partial p^l} \right] + \left(\tfrac{\hbar}{mc} \right)^2 \phi(p) = 0 , \tag{1.7}$$

Гармоничные координатные условия [1] в 4-импульсном пространстве принимают вид $\frac{\partial}{\partial p^k} \sqrt{-\sigma} \sigma^{ik} = 0$ или $\tilde{\Gamma}^l_{ki} \sigma^{ik} = 0$, что позволяет упрощать даламбертианы $\tilde{\Box}_p \phi \equiv \sigma^{ik} \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_k \phi \to \sigma^{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^i \partial p^k}$.

Уравнения (1.6-7) являются «дуальными»для уравнений Клейна-Гордона-Фока в псевдоримановом пространстве-времени с метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ [1]

$$\left[g^{ik} \nabla_i \nabla_k + \left(\tfrac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \varphi(x) = g^{ik} \left[\tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^l_{ki} \tfrac{\partial \varphi}{\partial x^l} \right] + \left(\tfrac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi(x) = 0 . \tag{1.8}$$

В качестве второго примера рассмотрим уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби для действия S гравитационного поля (квазиклассическое приближение к геометродинамике для замкнутых космологических систем) [1,3]

$$\alpha G_{abcd} \left(\tfrac{\delta S}{\delta g_{ab}} \tfrac{\delta S}{\delta g_{cd}} \right) + g^{1/2}\, {}^3R = 0 \tag{1.9}$$

$$-2 g_{ac} \left(\tfrac{\delta S}{\delta g_{cb}} \right)_{1b} = 0, \tag{1.10}$$

Действие гравитационного поля S на экстремали не зависит от времени t.

Уравнение Де Витта для волновой функции $\Psi = \exp(iS)$ -основное уравнение квантовой геометродинамики, следующее [3]

$$\left\{ \alpha G_{abcd} \left(\tfrac{\delta}{\delta g_{ab}} \tfrac{\delta}{\delta g_{cd}} \right) - g^{1/2}\, {}^3R \right\} \Psi[g_{ab}] = 0 \tag{1.11}$$

$$-2 g_{ac} \left\{ \tfrac{\delta \Psi[g_{ab}]}{\delta g_{cb}} \right\}_{1b} = 0 \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) означает координатную инвариантность волновой функции $\Psi[g_{ab}]$.

«Структура уравнения Де Витта в суперпространстве напоминает уравнение Клейна-Гордона-Фока релятивисткой квантовой частицы в физическом пространстве-времени. . . » (с.144 [3]). Поэтому можно формально записать уравнение Де Витта в импульсном суперпространстве в виде

$$\left\{ \alpha \Xi_{abcd} \left(\tfrac{\delta}{\delta \sigma_{ab}} \tfrac{\delta}{\delta \sigma_{cd}} \right) - \sigma^{1/2}\, {}^3\tilde{R} \right\} \Psi[\sigma_{ab}] = 0 \tag{1.13}$$

$$-2 \sigma_{ac} \left\{ \tfrac{\delta \Psi[\sigma_{ab}]}{\delta \sigma_{cb}} \right\}_{|b} = 0, \tag{1.14}$$

где контравариантная суперметрика Де Витта $\Xi_{abcd} = \frac{1}{2} \sigma^{1/2} \left(\sigma_{ac} \sigma_{bd} + \sigma_{ad} \sigma_{bc} - \sigma_{ab} \sigma_{cd} \right)$.

4-импульсный интервал расщепляется по схеме 1+3

$$dw^2 = \sigma_{ik} dp^i dp^k \equiv \tilde{a}^2(p^0)(dp^0)^2 - \tilde{\gamma}_{\alpha\beta} dp^\alpha dp^\beta \quad , \tag{1.15}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ компоненты метрического тензора 3-импульсного пространства $\tilde{\gamma}_{\alpha\alpha} = -\sigma_{\alpha\alpha}$, $a, b, c, d = 0, 1, 2, 3$. $\tilde{a}(p^0)$ -масштабный фактор 4-импульсного пространства, ${}^3\tilde{R} = \gamma^{\alpha\beta\,3}\tilde{R}_{\alpha\beta}$.-скалярная кривизна 3-импульсного пространства.

Таким образом, уравнение (1.13) Де Витта в импульсном суперпространстве (т.е. в многообразии трехмерных метрик $\sigma_{\alpha\beta}\left(\vec{p}\right)$,) является «дуальным»к уравнению Де Витта[3], основному уравнению квантовой геометродинамики в координатном суперпространстве $g_{\alpha\beta}\left(\vec{x}\right)$.

Если осуществить переход

$$\left(p^0,p^1,p^2,p^3\right) \rightarrow \left(\frac{\omega}{c},\kappa^1,\kappa^2,\kappa^3\right) \rightarrow \left(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\right) \quad , \tag{1.16}$$

и заменить компоненты импульса на длины волн:

$$p^0 = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda^0}\ ,\ p^\alpha = \hbar\kappa^\alpha = \frac{h}{\lambda^\alpha}\ .\ \ \lambda^i = \left(\lambda^0,\lambda^\alpha\right)\ , \tag{1.17}$$

тогда 4-импульсный интервал (1.4) можно представить в виде

$$dw^2 = \sigma_{ik}\frac{h^2}{\left(\lambda^i\lambda^k\right)^2}d\lambda^i d\lambda^k = \sigma_{ik}\frac{h^2}{\lambda^i\lambda^k}d(\ln\lambda^i)d(\ln\lambda^k)$$

Используя замену $\lambda^i = e^{\mu^i}$ получаем интервал в виде

$$dw^2 = \sigma_{ik}h^2 e^{-\mu^i-\mu^k}d\mu^i d\mu^k \tag{1.18}$$

Пространства, подобные (1.16), используются при изучении топологических переходов Лифшица в топологической материи (вакуум - безщелевой сверхпроводник) в импульсном и частотно-импульсном пространствах [5]. Топологическая устойчивость сингулярностей: поверхности Ферми (вихревая линия в четырехмерном $(\omega,\vec{p})$), точки Вейля (ёж в импульсном пространстве), линии Дирака (вихревая линия в трехмерном импульсном пространстве), обеспечивается топологическими инвариантами в этих пространствах см. литературу в обзоре [5].

2. Уравнения Эйнштейна в искривленном 4-импульсном пространстве

Здесь и далее латинские буквы мы используем для индексов в 4-импульсном пространстве и греческие буквы для индексов в 3-импульсном пространстве [6]. Величины в искривленном 4-импульсном пространстве, аналогичные величинам в искривленном пространстве-времени, будем помечать значком (~) тильда сверху, и определять их эквивалентными словами в кавычках « . ». При использовании формализма римановой геометрии следуем книге [5].

Аналогом «4-скорости» в импульсном пространстве будет безразмерная величина

$$\tilde{u}^i = \frac{dp^i}{dw}\ , \tag{2.1}$$

«4-ускорение»в импульсном пространстве следующее

$$\tilde{a}^i = \frac{d\tilde{u}^i}{dw} = \frac{d^2p^i}{dw^2}\ . \tag{2.2}$$

Движение частицы в эффективном искривленном 4-импульсном пространстве происходит по геодезическим линиям [1,6]

$$\frac{d^2p^i}{dw^2} + \tilde{\Gamma}^i_{kl}\frac{dp^k}{dw}\frac{dp^l}{dw} = 0\ . \tag{2.3}$$

При движении вдоль геодезической линии направление касательной остается постоянной (по Вейлю).

Геодезические линии $\tilde{u}^i\tilde{u}_j > 0$ в верхнем конусе соответствуют $dw > 0$ мировым линиям пробных частиц с массой и энергией $E > 0$, движущимся в гравитационном поле. Изотропные (нулевые) геодезические линии $\tilde{u}^i\tilde{u}_j = 0$, соответствующие нулевому 4-импульсному интервалу $dw = 0$, являются мировым линиям пробных частиц с нулевой массой (фотоны и др. безмассовые частицы). Геодезические линии $\tilde{u}^i\tilde{u}_j < 0$ с $dw < 0$ не соответствуют движению реальных частиц. В координатах (энергия, импульс) верхний конус с энергетическими гиперболоидами можно сравнить с зонными диаграммами в физике твердого тела [5].

Распространение лучей (траекторий) описывается уравнением «эйконала в 4-импульсном пространстве» для нулевого интервала, которое имеет вид (аналог уравнения эйконала в гравитационном поле [6])

$$\sigma^{ik}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial p^i}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial p^k} = 0\ , \tag{2.4}$$

где $\tilde{\psi}\left(p^i\right) = \tilde{\psi}\left(p^0,p^1,p^2,p^3\right)$ -эйконал в 4-импульсном пространстве.

Выразим трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода через метрический тензор в 4-импульсном пространстве

$$\tilde{\Gamma}^i_{kl} = \frac{1}{2}\sigma^{im}\left(\frac{\partial\sigma_{mk}}{\partial p^l} + \frac{\partial\sigma_{ml}}{\partial p^k} - \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial p^m}\right) . \tag{2.5}$$

Введем тензор Римана–тензор 4-го ранга для 4-импульсного искривленного пространства

$$\tilde{R}^i{}_{klm} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{km}}{\partial p^l} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}^i_{kl}}{\partial p^m} + \tilde{\Gamma}^i_{nl}\tilde{\Gamma}^n_{km} - \tilde{\Gamma}^i_{nm}\tilde{\Gamma}^n_{kl} \ . \tag{2.6}$$

Определим тензор Риччи–тензор 2-го ранга для 4-импульсного пространства

$$\tilde{R}_{ik} = \tilde{R}^l{}_{ilk} = \frac{\partial\tilde{\Gamma}^l_{ik}}{\partial p^l} - \frac{\partial\tilde{\Gamma}^l_{il}}{\partial p^k} + \tilde{\Gamma}^l_{ik}\tilde{\Gamma}^m_{lm} - \tilde{\Gamma}^m_{il}\tilde{\Gamma}^l_{km} \ , \tag{2.7}$$

тогда скалярная кривизна 4-импульсного пространства

$$\tilde{R} = \sigma^{ik}\tilde{R}_{ik} \ . \tag{2.8}$$

Аналог «тензора энергии и импульса»в 4-импульсном пространстве примем в виде

$$\tilde{T}^{ik} = \begin{pmatrix} \tilde{W} & c\tilde{S}_1 & c\tilde{S}_2 & c\tilde{S}_3 \\ c\tilde{S}_1 & -\tilde{\tau}_{11} & -\tilde{\tau}_{12} & -\tilde{\tau}_{13} \\ c\tilde{S}_2 & -\tilde{\tau}_{21} & -\tilde{\tau}_{22} & -\tilde{\tau}_{23} \\ c\tilde{S}_3 & -\tilde{\tau}_{31} & -\tilde{\tau}_{32} & -\tilde{\tau}_{33} \end{pmatrix} \ , \tag{2.9}$$

где $\tilde{T}^{00} = \tilde{W}$ - «плотность энергии» вектор «плотности потока энергии»в 3-импульсном пространстве $\tilde{S}_\alpha = c^{-1}\tilde{T}^{0\alpha}$, тензор «напряжений»в 3-импульсном пространстве (трехмерный тензор «потока импульса») $\tilde{T}^{\alpha\beta} = -\tilde{\tau}_{\alpha\beta}$.

Полагаем, что дивергенция тензора «энергии-импульса» $\tilde{T}^k_i$ в 4-импульсном пространстве равна нулю

$$\frac{\partial\tilde{T}^{ik}}{\partial p^k} \equiv \tilde{T}^k_{i;k}(p) = \frac{\partial\tilde{T}^k_i}{\partial p^k} - \tilde{\Gamma}^m_{ik}\tilde{T}^k_m + \tilde{\Gamma}^k_{mk}\tilde{T}^m_i = 0 \ . \tag{2.10}$$

Считаем, что дивергенция тензора $\tilde{R}^k_i - \frac{1}{2}\tilde{\delta}^k_i\tilde{R} - \tilde{\Lambda}\tilde{\delta}^k_i$, полученного из тензора кривизны 4-импульсного пространства, также равна нулю. Сравнивая эти дивергенции тензоров, мы полагаем, как в теории Эйнштейна, что эти тензора равны, и получаем уравнения для гравитационного поля в 4-импульсном пространстве.

Уравнения Эйнштейна в смешанных компонентах в псевдоримановом 4-импульсном пространстве принимают вид:

$$\tilde{R}^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i\tilde{R} - \tilde{\Lambda}\delta^k_i = \tilde{\kappa}\tilde{T}^k_i \ . \tag{2.11}$$

В контравариантных тензорных компонентах они следующие:

$$\tilde{R}^{ik} - \frac{1}{2}\sigma^{ik}\tilde{R} - \tilde{\Lambda}\sigma^{ik} = \tilde{\kappa}\tilde{T}^{ik} \ . \tag{2.12}$$

В ковариантных тензорных компонентах:

$$\tilde{R}_{ik} - \frac{1}{2}\sigma_{ik}\tilde{R} - \tilde{\Lambda}\sigma_{ik} = \tilde{\kappa}\tilde{T}_{ik} \ . \tag{2.13}$$

Здесь $\tilde{\Lambda}(E)$ - «космологический параметр»в 4-импульсном пространстве, $\tilde{T}_{ik}$ - тензор «энергии-импульса» в 4-импульсном пространстве, $\tilde{\kappa}$ -константа.

Уравнения (2.11-13) формально являются уравнениями Эйнштейна в искривленном 4-импульсном пространстве, т.е. «дуальными» к уравнениям Эйнштейна в искривленном пространстве-времени [1,6]. Очевидно, что асимптотические решения уравнений (2.11), для $p_0 = E/c \to \infty$, являются сингулярными для компактных областей, т.к. соответствуют энергии начального состояния системы, так же как начало времени для решений уравнений Эйнштейна. Существуют и другие ограничения.

Применение вариационного принцип наименьшего действия для гравитационного поля в 4-импульсном искривленном пространстве

$$\tilde{S}_\sigma = \int\sqrt{-\sigma}\sigma^{ik}\left(\tilde{\Gamma}^m_{il}\tilde{\Gamma}^l_{km} - \tilde{\Gamma}^l_{ik}\tilde{\Gamma}^m_{lm}\right)dp^0dp^1dp^2dp^3, \tag{2.14}$$

для получения уравнений (2.11) требует отдельного рассмотрения.

Обсудим более подробно (2.9) – аналог тензора «энергии-импульса»в 4-импульсном пространстве. Для макроскопических тел «тензор энергии-импульса»в 4-импульсном пространстве в любой системе отсчета принимает вид

$$\tilde{T}^{ik} = \left(\tilde{P} + \tilde{\rho}c^2\right)\tilde{u}^i\tilde{u}^k - \tilde{P}\sigma^{ik} \ . \tag{2.15}$$

Здесь «плотность массы»в импульсном пространстве

$$\tilde{\rho} = \frac{dm}{\sqrt{-\tilde{\gamma}}d^3p} \ , \tag{2.16}$$

где $\sqrt{-\tilde{\gamma}}d^3p \equiv \sqrt{-\tilde{\gamma}}dp^1dp^2dp^3$ -элемент объема в 3-импульсном искривленном пространстве, $\tilde{\gamma} = \det\|\gamma_{\alpha\beta}\|$ -определитель, $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$.

Метрический тензор 3-импульсного пространства аналогичен трехмерному метрическому тензору

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = -\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\sigma_{0\alpha}\sigma_{0\beta}}{\sigma_{00}} \ . \tag{2.17}$$

«Плотность энергии»в импульсном пространстве

$$\tilde{T}^{00} = \tilde{\varepsilon} = \tilde{\rho}c^2 \ . \tag{2.18}$$

Размерность $[\tilde{\rho}] = \frac{\text{сек}^3}{\text{кг}^2\text{м}^3}$, размерность $[\tilde{\varepsilon}] = \frac{\text{сек}}{\text{кг}^2\text{м}}$.

В сопутствующей системе отсчета, где элемент импульсного объема «покоится» $\tilde{u}^i = (1, 0, 0, 0)$, компонента «силы»действующая на элемент поверхности $d\vec{f}$ импульсного объема d^3p равна $-\tilde{\tau}_{\alpha\beta}df_\beta = \tilde{P}df_\alpha$. Отсюда следует выражение для «тензора напряжений»в 3-импульсном пространстве

$$\tilde{\tau}_{\alpha\beta} = -\tilde{P}\delta_{\alpha\beta}, \tag{2.19}$$

где $\tilde{P}$ - «давление»в импульсном пространстве. $\tilde{T}^{\alpha 0} = 0$. Размерность $\tilde{P}$ равна размерности $\tilde{\varepsilon}$.

«Тензор энергии-импульса» в 4-импульсном пространстве в смешанных координатах

$$\tilde{T}^i_k = \left(\tilde{P} + \tilde{\rho}c^2\right)\tilde{u}^i\tilde{u}_k - \tilde{P}\tilde{\delta}^i_k \ . \tag{2.20}$$

Тензор «энергии-импульса» для нейтрального скалярного поля ϕ, в искривленном 4-импульсном пространстве можно представить в виде

$$\tilde{T}^{(\phi)}_{ik} = \frac{\partial\phi}{\partial p^i}\frac{\partial\phi}{\partial p^k} + \frac{\sigma_{ik}}{2}\left[\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\phi^2 - \sigma^{lm}\frac{\partial\phi}{\partial p^l}\frac{\partial\phi}{\partial p^m}\right]. \tag{2.21}$$

Уравнения Эйнштейна в искривленном 4-импульсном пространстве в присутствии скалярного поля принимают вид

$$\tilde{R}_{ik} - \frac{1}{2}\sigma_{ik}\tilde{R} - \tilde{\Lambda}\sigma_{ik} = \tilde{\kappa}\tilde{T}^{(\phi)}_{ik} \ . \tag{2.22}$$

Уравнения (2.19-21) являются «дуальными» соответственно, к уравнениям (5.1.9-5.1.11) в книге [1] для искривленного пространства-времени в присутствии скалярного поля. Размерность «космологического параметра» в 4-импульснос пространстве следующая $\left[\tilde{\Lambda}\right] = \frac{\text{сек}^2}{\text{м}^2\text{кг}^2}$, размерность $[\tilde{\kappa}] = \frac{\text{сек}}{\text{м}}$.

Таким образом, мы произвели геометризацию эффективного псевдориманова 4-импульсного пространства, используя математический формализм псевдориманова пространства-времени V_4.

Простой пример вычисления метрики в искривленном импульсном пространстве приведен ниже.

3. Метрика Шварцшильда в 4-импульсном пространстве

Метрика $dw^2 = \sigma_{ik}dp^idp^k$ 4-импульсного «цилиндрического»пространства без гравитации имеет вид

$$dw^2 = c^{-2}dE^2 - dp_r^2 - p_r^2\left(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\varphi}^2\right), \tag{3.1}$$

где $c^{-1}E = p^0$,$p_r = p^1$,$\tilde{\theta} = p^2$,$\tilde{\varphi} = p^3$ - импульсные координаты.

В центрально-симметричном гравитационном поле интервал (1.4) принимает вид

$$dw^2 = \sigma_{00}\left(dp^0\right)^2 + \sigma_{11}\left(dp^1\right)^2 + \sigma_{22}\left(dp^2\right)^2 + \sigma_{33}\left(dp^3\right)^2 \ . \tag{3.2}$$

Повторяя подробный расчет, изложенный в [1] и [6], полагая

$$\sigma_{00} = e^\nu, \sigma_{11} = -e^\lambda, \sigma_{22} = -p_r^2, \sigma_{33} = -p_r^2\sin^2\tilde{\theta} \ , \tag{3.3}$$

вычисляя последовательно, контравариантный метрический тензор 4-импульсного пространства σ^{ik}, символы Кристоффеля $\tilde{\Gamma}^i_{kl}$, решая уравнения $\tilde{R}_{ik} = 0$ относительно 4-импульсных координат, получаем выражение

$$dw^2 = \left(1 - \frac{C}{p_r}\right)c^{-2}dE^2 - \frac{1}{1-\frac{C}{p_r}}dp_r^2 - p_r^2\left(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\varphi}^2\right) \ , \tag{3.4}$$

где C - постоянная интегрирования имеет импульсную размерность. Для её определения используем гравитационный радиус $r_g = \frac{2G_N m}{c^2}$ и длину волны Комптона $\lambdabar_C = \frac{\hbar}{mc}$. Положим $C = mc = p_g$. Тогда при нулевой массе метрика Шварцшильда совпадает с метрикой (3.1). Если теперь положить $r_g = \lambda_C$ [11], тогда «гравитационный импульс»

$$p_g = \frac{r_g c^3}{2G_N} = m_{Pl} c. \tag{3.5}$$

становится равным планковскому импульсу и является релятивистским квантовым пределом ОТО, в искривленном 4-импульсном пространстве.

Метрика Шварцшильда для 4-импульсного пространства в центрально-симметричном гравитационном поле принимает окончательный вид:

$$dw^2 = \left(1 - \frac{p_g}{p_r}\right) c^{-2} dE^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{p_g}{p_r}\right)} dp_r^2 - p_r^2 \left(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta} d\tilde{\varphi}^2\right). \tag{3.6}$$

Выражение (3.6) является «дуальным»для известной метрики Шварцшильда [1,6,10] для пространственно - временного интервала.

Соотношение неопределенности Гейзенберга между «гравитационным импульсом»и комптоновской длиной волны принимает вид

$$\Delta p_g \cdot \Delta_C \geq \frac{\hbar}{2} \ . \tag{3.7}$$

Уменьшение комптоновской длины волны приводит к увеличению гравитационного импульса и увеличению гравитационного радиуса черной дыры.

4. Геометризация фазового пространства

При геометризации фазового пространства мы используем книгу [9] в которой рассмотрено комплексное риманово пространство. Фазовое пространство можно представить в виде комплексного пространства, содержащего два подпространства: пространство-время и эффективное 4-импульсное пространство.

$$\mathbb{C}^4 = \left(z^0, z^1, z^2, z^3\right) \ , \tag{4.1}$$

где комплексные координаты выберем в виде

$$z^k = \alpha_k x^k + i\beta_k p^k, \ \text{ где } \alpha_k, \beta_k \text{ - числа, } \ i, k = 0, 1, 2, 3 \ . \tag{4.2}$$

Комплексно сопряженные координаты

$$\bar{z}^k = \alpha_k x^k - i\beta_k p^k, \tag{4.3}$$

Действительные координаты и импульсы следующие

$$x^k = \frac{1}{2\alpha_k}\left(z^k + \bar{z}^k\right), \, p^k = \frac{1}{2i\beta_k}\left(z^k - \bar{z}^k\right) \ , \tag{4.4}$$

Тогда интервал псевдоэвклидового комплексного фазового пространства

$$dQ^2 = dz^0 d\bar{z}^0 - dz^1 d\bar{z}^1 - dz^2 d\bar{z}^2 - dz^3 d\bar{z}^3 = h_{ii} dz^i d\bar{z}^i \quad . \tag{4.5}$$

В псевдоэрмитовом пространстве $\mathbb{C}^n_{p,q}$ $p + q = n$ квадрат длины вектора

$$dQ^2 = \left|dz^0\right|^2 - \left|dz^1\right|^2 - \left|dz^2\right|^2 - \left|dz^3\right|^2 \ ,$$

где $\alpha_k = \beta_k = 1$, $h_{ik} = diag\,(1, -1, -1, -1)$.

Полагая интервал псевдоэвклидового пространства – времени

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 - \left(dx^1\right)^2 - \left(dx^2\right)^2 - \left(dx^3\right)^2 = g_{ii}(dx^i)^2 \ , \tag{4.6}$$

и интервал псевдоэвклидового 4-импульсного пространства (1.1), получаем интервал псевдоэвклидового фазового пространства

$$dQ^2 = ds^2 + dw^2 \quad . \tag{4.7}$$

В случае комплексного псевдориманова фазового пространства получаем интервал в виде

$$dQ^2 = h_{ik} dz^i d\bar{z}^k = g_{ik} dx^i dx^k + \sigma_{ik} dp^i dp^k \quad . \tag{4.8}$$

где $dz^k = \alpha_k dx^k + i\beta_k dp^k$,$d\bar{z}^k = \alpha_k dx^k - i\beta_k dp^k$, α_k, β_k - числа.

Здесь риманова метрика является эрмитовой т.е. её матрица комплексно сопряженная и транспонированная

$$||h_{ik}|| = \left|\left|\bar{h}_{ki}\right|\right| \ ,$$

где матричные элементы $\qquad h_{ik} = \bar{h}_{ki} = \frac{g_{ik}}{\alpha_i \alpha_k} = \frac{\sigma_{ik}}{\beta_i \beta_k}$. (4.9)

В овеществленном 8-мерном пространстве $\mathbb{R}^{2n=8} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3; p^0, p^1, p^2, p^3\right)$ эта матрица представляется в виде двух диагональных блоков 4×4 с g_{ik} для x^i -переменных и σ_{ik} для p^i -переменных. Примером другой эрмитовой римановой метрики является метрика Бергмана, рассмотренная в п.5.

В этом фазовом пространстве существуют $2n-1=7$ -мерные поверхности, соответствующие различным значениям энергий. Фазовые траектории замкнутых систем (с разными постоянными значениями энергии) лежат на этих гиперповерхностях, которые не пересекаются [10].

Комплексно линейные невырожденные преобразования пространства $\mathbb{C}^4$ образуют группу $GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ комплексных матриц размером 4×4 с определителем не равным нулю.

При переходе комплексного пространства в вещественное $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, комплексные преобразования дают линейные преобразования вещественного пространства $GL\left(n,\mathbb{C}\right) \to GL\left(2n,\mathbb{R}\right)$ – отображение овеществления.

Введем операторы дифференцирования в пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{C}^4$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\alpha_k \partial x^k} - i\frac{\partial}{\beta_k \partial p^k}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\alpha_k \partial x^k} + i\frac{\partial}{\beta_k \partial p^k}\right) . \tag{4.10}$$

Выполняются тождества

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\left(z^k\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\left(\bar{z}^k\right) = 1 , \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\left(z^k\right) = \frac{\partial}{\partial z^k}\left(\bar{z}^k\right) = 0 . \tag{4.12}$$

Рассмотрим многочлен с комплексными коэффициентами $P\left(x^k, p^k\right)$ от переменных $\left(x^0, x^1, x^2, x^3; p^0, p^1, p^2, p^3\right)$, в котором при замене (3.4) получаем многочлен $Q\left(z^k, \bar{z}^k\right)$.

Утверждение [8]: многочлен $Q\left(z^k, \bar{z}^k\right) = P\left(x^k, p^k\right)$ тогда и только тогда зависит от переменных z^kи не зависит от $\bar{z}^k$, когда выполняется тождество

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\alpha_k \partial x^k} + i\frac{\partial P}{\beta_k \partial p^k}\right) \equiv 0 . \tag{4.13}$$

Введем трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода в комплексном псевдоримановом пространстве

$$\breve{\Gamma}^i_{kl}\left(z,\bar{z}\right) = \Gamma^i_{kl}\left(x\right) + \tilde{\Gamma}^i_{kl}\left(p\right) . \tag{4.14}$$

В формуле (4.14) первое слагаемое – трехиндексные символы Кристоффеля 2-го рода

$$\Gamma^i_{kl}\left(x\right) = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) , \tag{4.15}$$

с производными

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \alpha_k\left(\frac{\partial}{\partial z^k} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) . \tag{4.16}$$

Второе слагаемое в (4.14), определенное в формуле (2.5), возьмем с производными

$$\frac{\partial}{\partial p^k} = i\beta_k\left(\frac{\partial}{\partial z^k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) . \tag{4.17}$$

Если $\frac{\partial h^{ik}(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}^k} \equiv 0$, тогда символы Кристоффеля не зависят от $\bar{z}^k$, только от z^k .

Введем тензор Римана–тензор 4-го ранга для 4-фазового искривленного пространства (см. 2.6 и последующие формулы)

$$\breve{R}^i{}_{klm}\left(z,\bar{z}\right) = R^i{}_{klm}\left(x\right) + \tilde{R}^i{}_{klm}\left(p\right) . \tag{4.18}$$

Определим тензор Риччи –тензор 2-го ранга для фазового пространства

$$\breve{R}_{ik}\left(z,\bar{z}\right) = R_{ik}\left(x\right) + \tilde{R}_{ik}\left(p\right) = R^l{}_{ilk}\left(x\right) + \tilde{R}^l{}_{ilk}\left(p\right) . \tag{4.19}$$

Определим (скалярную кривизну) в фазовые пространства

$$\breve{R}\left(z,\bar{z}\right) = g^{ik}R_{ik}\left(x\right) + \sigma^{ik}\tilde{R}_{ik}\left(p\right). \tag{4.20}$$

Полагаем, что дивергенция «тензора энергии-импульса» $\breve{T}^k_i$ в фазовом пространстве равна нулю

$$\breve{T}^k_{i;k}\left(z,\bar{z}\right) = T^k_{i;k}\left(x\right) + \tilde{T}^k_{i;k}\left(p\right) = 0 . \tag{4.21}$$

Считаем, что дивергенция тензора $\breve{R}^k_i\left(z,\bar{z}\right) - \frac{1}{2}\breve{\delta}^k_i\breve{R}\left(z,\bar{z}\right) - \breve{\Lambda}\breve{\delta}^k_i\left(z,\bar{z}\right)$, полученного из тензора кривизны фазового пространства, также равна нулю. Сравнивая эти дивергенции тензоров, мы полагаем, как в теории Эйнштейна, что эти тензора равны, и получаем уравнения гравитационного поля ОТО в фазовом пространстве. Для строгого вывода необходимо использовать вариационный принцип Гильберта.

Таким образом, уравнения Эйнштейна в смешанных компонентах в комплексном фазовом пространстве $\mathbb{C}^{n=4} = \left(z^0, z^1, z^2, z^3\right)$с квадратичной формой (4.8) и эрмитовой метрикой (4.9) имеют вид:

$$\breve{R}_i^k (z,\bar{z}) - \tfrac{1}{2}\breve{\delta}_i^k \breve{R}(z,\bar{z}) - \breve{\Lambda}\breve{\delta}_i^k = \breve{\kappa}\breve{T}_i^k (z,\bar{z}) \ , \tag{4.22}$$

с координатами (4.2).

В овеществленном 8-мерном $\mathbb{R}^{2n} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3; p^0, p^1, p^2, p^3\right)$, включающем пространство-время и эффективное 4-импульсное пространство, получаем две системы уравнений

$$R_i^k (x) - \tfrac{1}{2}\delta_i^k R(x) - \Lambda\delta_i^k = \kappa T_i^k (x) , \tag{4.23}$$

$$\tilde{R}_i^k (p) - \tfrac{1}{2}\tilde{\delta}_i^k \tilde{R}(p) - \tilde{\Lambda}\tilde{\delta}_i^k = \tilde{\kappa}\tilde{T}_i^k (p) \ . \tag{4.24}$$

Уравнения (4.23) – это стандартные уравнения Эйнштейна в псевдоримановом пространстве-времени, уравнения (4.24) – это уравнения (2.12), полученные ранее уравнения Эйнштейна в эффективном псевдоримановом 4-импульсном пространстве. Обе системы с координатами (4.4). Эти две системы уравнения Эйнштейна могут быть записаны также в контравариантных и ковариантных компонентах (2.11-12).

В случае метрики Бергмана (см. 5.13) и других эрмитовых метрик, не сводящихся к блок-диагональному виду, разделить уравнения (4.22) на две системы не удается, и в метрике возникают «интерференционные слагаемые» см (5.13).

5. Метрика Бергмана для комплексного фазового пространства

В общем случае, не блок-диагональной эрмитовой римановой метрикой является, например, метрика Бергмана, рассмотренная в книге Шабата [12], которой мы следуем.

Пусть существуют голоморфные функции $f \neq 0$ образующие гильбертово пространство $L_h^2(D)$ с ортонормированным базисом $(\varphi_1, \varphi_2 ...)$.

Для плотной области $D \subset \mathbb{C}^n$ введем кернфункцию Бергмана:

$$K_D (z, \varsigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j (z) \cdot \overline{\varphi_j (\varsigma)} \ \ , \tag{5.1}$$

где $z = (z_1, ..., z_n)$, $\varsigma = (\varsigma_1, ..., \varsigma_n)$.

Для любой функции $f \in L_h^2(D)$ справедливо

$$f(z) = \int_D f(\varsigma) K(z, \varsigma)\, dV(\varsigma) \ . \tag{5.2}$$

Эрмитова квадратичная форма

$$dQ^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \log K(z,z)}{\partial z_j \overline{\partial z_k}} dz_j d\bar{z}_k \tag{5.3}$$

инвариантна, относительно биголоморфных отображений.

В областях D, для которых $K_D(z)$ положительная, функции $K_D(z)$ и $\log K_D(z)$ строго плюрисубгармонические. Это означает, что квадратичная форма dQ^2 положительно определена и задает в D эрмитову риманову метрику

$$h_{jk}(z) = \frac{\partial^2 \log K(z,z)}{\partial z_j \overline{\partial z_k}} \ , \tag{5.4}$$

которая называется метрикой Бергмана.

Метрика Лобачевского в верхней полуплоскости $H = \{z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}, y_0 > 0\}$ задается формой

$$dQ_H^2 = \frac{|dz_0|^2}{y_0^2} \ . \tag{5.5}$$

Если согласно (4.2) комплексная нулевая координата

$$z_0 = \alpha_0 x^0 + i\beta_0 y^0 \ , \tag{5.6}$$

то метрика (5.5) принимает вид:

$$dQ_H^2 = \frac{\alpha_0^2 c^2 dt^2 + \beta_0^2 dE^2/c^2}{\beta_0^2 E^2/c^2} \ . \tag{5.7}$$

Для поликруга: $D = U : |z_j| < R_j$ в $\mathbb{C}^n$ кернфунция следующая

$$K_U(z,z) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{R_j^2}{\left(R_j^2 - z_j \bar{z}_j\right)^2} \ \ . \tag{5.8}$$

После вычисления для $\mathbb{C}^4$ получаем бергманову форму для поликруга в виде [12]

$$dQ^2 = 2\sum_{j=0}^{n=3} \frac{R_j^2}{\left(R_j^2 - |z_j|^2\right)^2} \left|dz_j\right|^2 \ . \tag{5.9}$$

Бергманова форма для поликруга $D = U : \left| z^k = \alpha_k x^k + i\beta_k p^k, \right| < R_k$ в $\mathbb{C}^4$ в овеществленном фазовом пространстве $\mathbb{R}^8 = \left(x^0, x^1, x^2, x^3; p^0, p^1, p^2, p^3\right)$ согласно (5.9) следующая

$$dQ^2 = 2R_0^2 \frac{\alpha_0^2 c^2 dt^2 + \beta_0^2 c^{-2} dE^2}{\left(R_0^2 - \alpha_0^2 c^2 t^2 - \beta_0^2 c^{-2} E^2\right)^2} + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=3} R_\nu^2 \frac{\alpha_\nu^2 (dx^\nu)^2 + \beta_\nu^2 (dp^\nu)^2}{\left(R_\nu^2 - \alpha_\nu^2 (x^\nu)^2 - \beta_\nu^2 (p^\nu)^2\right)^2} \ . \tag{5.10}$$

Она содержит гиперболическую метрику, инвариантную относительно конформных отображений и определяющую в поликруге геометрию Лобачевского.

Для шара $D = B : |z| < R$ в $\mathbb{C}^n$, кернфункция Бергмана имеет вид

$$K_B\left(z, z\right) = \frac{(n)! R^n}{\pi^n} \frac{1}{\left(R^2 - \sum\limits_{j=0}^{n-1} z_j \bar{z}_j\right)^{n+1}} \tag{5.11}$$

После вычисления бергманова форма для шара в $\mathbb{C}^4 = \left(z^0, z^1, z^2, z^3\right)$ следующая [12]

$$5^{-1} dQ^2 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{3} \left|dz_j\right|^2}{R^2 - \sum\limits_{j=0}^{3} \left|z_j\right|^2} + \frac{\sum\limits_{j,k=0}^{3} z_j \bar{z}_k d\bar{z}_j dz_k}{\left(R^2 - \sum\limits_{j=0}^{3} \left|z_j\right|^2\right)^2} \ . \tag{5.12}$$

Последнее слагаемое аналогично дифференциалам гиперболической площади.

Эта форма Бергмана для шара с координатами (4.4) в овеществленном фазовом пространстве $\mathbb{R}^8 = \left(x^0, x^1, x^2, x^3; p^0, p^1, p^2, p^3\right)$ принимает вид

$$\begin{gathered}
5^{-1} dQ^2 = \frac{\alpha_0^2 c^2 dt^2 + \beta_0^2 dE^2 c^{-2} + \sum\limits_{\nu=1}^{3} \alpha_\nu^2 (dx^\nu)^2 + \beta_\nu^2 (dp^\nu)^2}{R^2 - \alpha_0^2 c^2 t^2 - \beta_0^2 E^2 c^{-2} - \sum\limits_{\nu=1}^{3} \left[\alpha_\nu^2 (x^\nu)^2 + \beta_\nu^2 (p^\nu)^2\right]} + \\
+ \frac{\sum\limits_{j=0}^{3} \left[\alpha_j^2 (x^j)^2 + \beta_j^2 (p^j)^2\right]\left[\alpha_j^2 (dx^j)^2 + \beta_j^2 (dp^j)^2\right]}{\left(R^2 - \sum\limits_{j=0}^{3} \left[\alpha_j^2 (x^j)^2 + \beta_j^2 (p^j)^2\right]\right)^2} + \\
+ \frac{\sum\limits_{\substack{j,k=0 \\ (j\neq k)}}^{3} \begin{array}{l} \left[2\left(\alpha_j \alpha_k x^j x^k + \beta_j \beta_k p^j p^k\right)\left(\alpha_j \alpha_k dx^j dx^k + \beta_j \beta_k dp^j dp^k\right) + \right. \\ \left. + 2\left(\alpha_j \beta_k x^j p^k - \beta_j \alpha_k p^j x^k\right)\left(\alpha_j \beta_k dx^j dp^k - \beta_j \alpha_k dp^j dx^k\right)\right] \end{array}}{\left(R^2 - \sum\limits_{j=0}^{3} \left[\alpha_j^2 (x^j)^2 + \beta_j^2 (p^j)^2\right]\right)^2}
\end{gathered} \tag{5.13}$$

Последняя двойная сумма содержит слагаемые, содержащие произведения дифференциалов 4-координат и 4-импульсов.

Для единичного круга $R = 1$ при $n = 1$ метрики (5.9) и (5.12) совпадают с метрикой Лобачевского [12]. Таким образом, в комплексном искривленном фазовом пространстве возникает новый класс эрмитовых метрик.

Заключение

Подведем итог. С использованием математического формализма ОТО проведена геометризация псевдориманова 4-импульсного пространства и получен аналог уравнений Эйнштейна в этом пространстве. Математическая структура этих уравнений сохранена, т.к. жестко задана примененным стандартным формализмом, однако пространства различные, и величины как функции, зависящие от 4-импульсов, нетривиально отличаются от физических величин, зависящих от координат пространства –времени.

Показано, что простейшая геометризация комплексного фазового пространства привела в частном случае к появлению двух систем уравнений Эйнштейна для его подпространств – для псевдориманова пространства-времени и эффективного псевдориманового 4-импульсного пространства. В общем случае получается аналог уравнений Эйнштейна для комплексного риманова фазового пространства с эрмитовыми метриками близкими к гиперболическим метрикам. Показано, что метрика Бергмана может применяться для комплексного $\mathbb{C}^4$ и овеществленного $\mathbb{R}^8$ фазового пространства.

Основные классы решений уравнений (2.11), (4.22), и выражения для аналогов основных метрик ОТО [1,6,10] типа (3.6), (5.13) в комплексном фазовом пространстве, физическая интерпретация полученных результатов, и неизбежные ограничения данного подхода, будут исследованы в дальнейшем.

Мы полагаем, что последовательная формулировка ОТО в комплексном фазовом пространстве, и особенно в эффективном римановом 4-импульсном пространстве возможна, и представляет определенный интерес при исследовании топологических особенностей и космологических топологических фазовых переходов начальных состояний Вселенной.

Список литературы

1. Владимиров Ю.С. Геометрофизика. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. 600 с.

2. Игнатьев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: Кинетические модели космологической эволюции. Казань: Казанский Университет, 2013. 316 с.

3. Пономарев В.Н., Барвинский А.О., Обухов Ю.Н. Геометро-динамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. М.: Энергоатомиздат, 1985. 154 с.

4. Стародубцев А.Н. Фазовое пространство гравитирующей частицы и размерная редукция на планковских масштабах. // Теоретическая и математическая физика. 2015. Т. 185. №1. С. 192–198.

5. Воловик Г.Е. Экзотические переходы Лифшица в топологической материи // Успехи физических наук, 2018. Т. 188. №1. С. 95–105.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.

7. Кирчанов В.С. Дуальные уравнения Клейна-Гордона и Дирака. // Известия Вузов, Физика. 2012. Т. 55. № 6. С. 109–111.

8. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1973. 416 с.

9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 760 с.

10. Точные решения уравнений Эйнштейна: пер. с анг. / Крамер Д, и др. М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.

11. Бисноватый–Коган Г.С. Релятивистская астрофизика и физическая космология. М.: КРАСАНД. 2011. 376 с.

12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. СПб.: Изд-во Лань, 2004. Ч. 2: Функции нескольких переменных. 464 с.

References

1. Vladimirov YU.S. *Geometrofizika.* [Geometrophysics]. Moscow, BINOM, Laboratoriya znanij Publ., 2005. 600 p. (in Russian)

2. Ignat'ev YU.G. *Neravnovesnaya Vselennaya: Kineticheskie modeli kosmologicheskoj ehvolyucii.* [Nonequilibrium Universe: Kinetic Models of Cosmological Evolution.] Kazan, Kazanskij Universitet Publ., 2013. 316 p. (in Russian)

3. Ponomarev V.N., Barvinskij A.O., Obuhov YU.N. *Geometro-dinamicheskie metody i kalibrovochnyj podhod k teorii gravitacionnyh vzaimodejstvij.* [Geometro-dynamic methods and the gauge approach to the theory of gravitational interactions.] Moscow, Energoatomizdat Publ., 1985. 154 p. (in Russian).

4. Starodubcev A.N. Phase space of a gravitating particle and dimensional reduction on Planck scales. *Theoret. and Math. Phys.*, 2015, vol. 185, no. 1, pp. 1527–1532.

5. Volovik G.E. EHkzoticheskie perekhody Lifshica v topologicheskoj materii. [Exotic Lifshitz Transitions in Topological Matter]. *Uspekhi fizicheskih nauk*, 2018, vol. 188, no 1, pp. 95–105. (in Russian).

6. Landau L.D., Lifshic E.M. *Teoriya polya.* [Theoretical Physics, Vol.2 The classical Theory of the Fields]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p. (in Russian).

7. Kirchanov V.S. Dual Klein-Gordon and Dirac equations. *Russian Physics Journal*, 2012, vol.55, no. 6, pp. 718–721.

8. Bogolyubov N.N., SHirkov D.V. *Vvedenie v teoriyu kvantovyh polej.* [Introduction to the theory of quantum fields]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 416 p. (in Russian).

9. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya.* [Modern Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 760 p. (in Russian).

10. *Tochnye resheniya uravnenij EHjnshtejna: per. s ang.* [Exact solutions of the Einstein equations. (translation)] / Kramer D, i dr. Moscow, EHnergoizdat Publ., 1982. 416 p. (in Russian).

11. Bisnovatyj–Kogan G.S. *Relyativistskaya astrofizika i fizicheskaya kosmologiya.* [Relativistic astrophysics and physical cosmology]. Moscow, KRASAND Publ., 2011. 376 p. (in Russian).

12. SHabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyj analiz. Funkcii neskol'kih peremennyh. ch. 2* [Introduction to complex analysis. Functions of several variables. Part 2]. St.Peterburg, Lan' Publ., 2004. 464 p. (in Russian).

Авторы

Кирчанов Вячеслав Сергеевич, доцент, к.ф.-м.н., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), Комсомольский проспект 29а, г. Пермь, 614990, Россия.
E-mail: Kirchanovvs@pstu.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Кирчанов В. С. О геометризации фазового пространства // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. № 4. С. 92—103.

Authors

Kirchanov Vjacheslav Sergeevich, Associate professor, PhD, Perm National Research Polytechnic University, Komsomol'skiy Prospekt, 29a, Perm, 614990, Russia.
E-mail: Kirchanovvs@pstu.ru

Please cite this article in English as:
Kirchanov V. S. The Geometrization of the Phase Space. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 4, pp. 92–103.