УДК 514.763: 514.8

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ 5-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. III. *H*-ПРОСТРАНСТВА ТИПА {5}

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[b,2]

[a] Кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

[b] Кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, 420008, Россия

В данной статье с помощью метода косонормального репера (Аминова) определяются пятимерные h-пространства типа {5} и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективных движений того же типа.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, проективное преобразование, h-пространство типа {5}.

ON PROJECTIVE MOTIONS OF 5-DIMENSIONAL SPACES III. *H*-SPACES OF THE TYPE {5}

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[b,2]

[a] Department of Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia

[b] Department of Geometry, Division of Mathematics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 420008, Russia

In this paper, using the skew-normal frame method (Aminova), five-dimensional h-spaces of the type {5} are defined and necessary and sufficient conditions for the existence of projective motions of the same type are established.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h-space of the type {5}, projective motion of the type {5}.

PACS: 11.10.Kk
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.1.56-66

Введение

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n сохраняет проективную структуру и переводит геодезические линии снова в геодезические ([8], [9]).

Векторное поле X на многообразии с проективной структурой П, задаваемой на псевдоримановом многообразии M^n проективными параметрами Томаса, называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением* (п.д.), если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры. Для этого

[1]E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2]E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$L_X g = h, \tag{1}$$

(*обобщенное уравнение Киллинга*) и

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi \tag{2}$$

(*уравнение Эйзенхарта*), где $Y,Z,W \in TM$, $(n+1)\varphi = \mathrm{div}X$. Если $\varphi = const$, т. е. $\mathrm{div}X = const$, то проективное движение является аффинным, в частности, при $h = cg$ гомотетическим (преобразование подобия), а при $h = 0$ изометрическим (сохраняющим метрику g).

Данная статья посвящена проблеме определения псевдоримановх многообразий (M^n, g), допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Подобная задача для n-мерных собственно римановых и лоренцевых пространств была решена в работах Т. Леви-Чивита, А. С. Солодовникова, А. З. Петрова и А. В. Аминовой ([4], см. обзор в [9]). Проблема классификации псевдоримановых многообразий M^n произвольной сигнатуры по алгебрам и группам Ли проективных преобразований, поставленная более ста лет назад, остается открытой. Согласно теореме Э. Нётер и исследованиям группы американских ученых проективные и аффинные движения приводят к фундаментальным механическим и полевым законам сохранения. Главная трудность при построении таких законов сохранения заключается, по мнению авторов, в нахождении указанных движений Изучение проективно-групповых свойств многомерных пространств вносит также вклад в теорию дифференциальных уравнений (см., например, [6]).

Классификация пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики будем называть ***h-метриками типа*** χ, а соответствующие пространства – ***h-пространствами типа*** χ.

В данной статье с помощью метода косонормального репера [9] определяются пятимерные h-пространства типа $\{5\}$ (теорема 1) и устанавливаются необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{5\}$ (теорема 2). Определению пятимерных h-пространств типов $\{221\}$, $\{32\}$ и $\{41\}$ посвящены работы [10]— [?].

1. Канонические формы в косонормальном репере.

Косонормальный репер (Y_h), адаптированный к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h_{ij}

$$\chi = \left\{ r_1 \dots r_{k_0} \left(m_1^{k_0+1} \dots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \right) \dots \left(m_1^k \dots m_{s_k}^k \right) \right\}$$

задается в области $V \subset M^n$ разбиением $I = \bigcup_{\alpha=1}^k I_\alpha$, $I_\alpha = \{s\,|n_\alpha + 1 \le s \le n_\alpha + r_\alpha\}$, $n_1 = 0$, $n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l$, $r_1 + ... + r_k = n$, $\alpha = 2, ..., k$, множества индексов $I = \{1, ..., n\}$ и биекцией $\sim\colon\ I \to I$: $I_\alpha \ni h \to \tilde{h} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - h \in I_\alpha$ $(\alpha = 1, ..., k)$, обладающей свойством $\sim \circ \sim = id_I$; индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p \delta_p^{\tilde{q}}$, $e_p = \pm 1$, например, $\theta_p = e_p \theta^{\tilde{p}}$.

Пусть $(Y_1, \dots, Y_n) = \left(\underset{1}{\xi}{}^i \partial/\partial x^i, \dots, \underset{n}{\xi}{}^i \partial/\partial x^i \right)$ – косонормальный репер в области $V \subset M$, $U \subset V$ – координатная окрестность, $(X_i) \equiv \left(\partial/\partial x^i\right)$ – натуральный репер, $g_{ij} = g\left(X_i, X_j\right)$. В локальных координатах каноническая форма $\theta = \theta^i E_i$ задается соотношением ([9], с. 96)

$$\theta^i = \Theta^i_j dx^j \quad \left(dx^k = \underset{i}{\xi}{}^k \theta^i \right), \tag{3}$$

где $\left(\Theta^i_j\right)$ – обратная матрица для $\left(\underset{j}{\xi}{}^k\right)$:

$$\underset{k}{\xi}{}^i \Theta^k_j = \delta^i_j. \tag{4}$$

Набор линейно независимых форм θ^i образует в каждой точке $p \in M$ корепер, дуальный к базису ξ в T_pM.

Для 1-формы θ_h, сопряженной векторному полю Y_h относительно $g\,|_V$:

$$(\theta_h, Y_l) \equiv \theta_h\,(Y_l) = g\,(Y_h, Y_l)$$

$(l = 1, ..., n)$, из (3),(4) имеем

$$\theta_h|_U = \underset{h}{\xi}{}_i dx^i = e_h\ \theta^{\tilde h}\Big|_U, \quad \Theta^h_i = e_h\,\underset{\tilde h}{\xi}{}_i$$

$(h = 1, \ldots, n)$. Разрешив уравнения $g_{ij}\,\underset{h}{\xi}{}^i = \underset{h}{\xi}{}_j$ относительно g_{ij}, получим

$$g_{ij} = \sum_{h=1}^{n} e_h\,\underset{h}{\xi}{}_i\,\underset{\tilde h}{\xi}{}_j, \qquad g|_U = \sum_{h=1}^{n} e_h \theta_h \otimes \theta_{\tilde h} \equiv \sum_{h=1}^{n} e_h \theta_h \theta_{\tilde h}.$$

Из этих соотношений следует формула перехода от косонормального репера $(Y_1, \ldots, Y_n)$ на U к координатному реперу $(X_1, \ldots, X_n)$:

$$X_j = \sum_{h=1}^{n} e_h\,\underset{\tilde h}{\xi}{}_j Y_h \tag{5}$$

$(j = 1, \ldots, n)$, а также формула для компонент g^{ij} контравариантного метрического тензора g_c:

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{n} e_h\,\underset{h}{\xi}{}^i\,\underset{\tilde h}{\xi}{}^j, \quad \text{или} \quad g_c|_U = \sum_{h=1}^{n} e_h Y_h \otimes Y_{\tilde h}.$$

В силу (5) для билинейной формы h на V имеем

$$h_{ij} = h\,(X_i, X_j) = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q h\,(Y_p, Y_q)\,\underset{\tilde p}{\xi}{}_i\,\underset{\tilde q}{\xi}{}_j.$$

Аналогично

$$h^{ij} = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q h\,(Y_p, Y_q)\,\underset{\tilde p}{\xi}{}^i\,\underset{\tilde q}{\xi}{}^j.$$

Введя обозначения $\bar h_{pq} = h\,(Y_p, Y_q)$, получим ([9], с. 99)

$$h = \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar h_{pq} \theta_{\tilde p} \otimes \theta_{\tilde q} \equiv \sum_{p,q=1}^{n} e_p e_q \bar h_{pq} \theta_{\tilde p} \theta_{\tilde q}.$$

2. Вычисление формы связности.

Определим коэффициенты вращения Риччи $\gamma_{lpk} = -\gamma_{plk}$ равенствами ([8], § 30)

$$\nabla_{Y_k} Y_l \equiv \sum_{p=1}^{5} e_p \gamma_{lpk} Y_{\tilde p} = \gamma^p_{lk} Y_p,$$

где $\gamma^p_{lk} = e_p \gamma_{l\tilde p k}$ – компоненты 1-формы связности ω^i_j в косорепере (Y_h):

$$\omega^i_j = \gamma^i_{jl}\theta^l = e_i \gamma_{j\tilde i l}\theta^l = \sum_{h=1}^{5} e_h e_i \gamma_{j\tilde i h}\theta_{\tilde h}. \tag{6}$$

В косонормальном репере уравнение Эйзенхарта (2) после замены $h = a + 2\varphi g$ принимает вид

$$Y_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h (\bar{a}_{hq} \gamma_{\tilde{h}pr} + \bar{a}_{ph} \gamma_{\tilde{h}qr}) = \bar{g}_{qr} Y_p \varphi + \bar{g}_{pr} Y_q \varphi$$

$(p, q, r = 1, \ldots, 5)$, что равносильно

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h (\bar{a}_{hq} \omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph} \omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q \varphi)\theta_p + (Y_p \varphi)\theta_q, \tag{7}$$

где $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ — 1-форма связности. К интегрированию этого уравнения и сводится наша задача.

Пусть θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, (Y_h) – косонормальный репер в области $V \subseteq M$, в котором билинейные формы g и h имеют канонический вид

$$h|_V = (\lambda + 2\varphi) g + h_0 \equiv a + 2\varphi g, \quad 2\varphi = 5\lambda,$$

где λ – характеристическое число билинейной формы $a = h - 2\varphi g$ кратности 5,

$$g = e(\theta_1\theta_5 + \theta_2\theta_4 + \theta_3\theta_3 + \theta_4\theta_2 + \theta_5\theta_1),$$

$$h_0 = a_0 = e(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_2 + \theta_4\theta_1) \tag{8}$$

$$(\tilde{1} = 5, \quad \tilde{2} = 4, \quad \tilde{3} = 3, \quad \tilde{4} = 2, \quad \tilde{5} = 1, \quad e = \pm 1).$$

Подставив в (7) вместо $\bar{g}_{pq}$ и $\bar{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения для типа $\{5\}$, получим

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \quad d\lambda = \frac{2}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \tag{9}$$

$$\omega_{32} = -\frac{1}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{41} = -\frac{3}{5}(Y_5\varphi)\theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\theta_2,$$

$$\omega_{52} = (Y_5\varphi)\theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\theta_5.$$

Используя формулу (6), найдем коэффициенты вращения Риччи

$$\gamma_{145} = -\gamma_{415} = -\frac{3}{5} e Y_5 \varphi, \quad \gamma_{154} = -\gamma_{514} = e Y_5 \varphi, \quad \gamma_{235} = -\gamma_{325} = -\frac{1}{5} e Y_5 \varphi,$$

$$\gamma_{253} = -\gamma_{523} = e Y_5 \varphi, \quad \gamma_{352} = -\gamma_{532} = e Y_5 \varphi, \quad \gamma_{451} = -\gamma_{541} = e Y_5 \varphi.$$

Остальные коэффициенты γ_{ijk} равны нулю.

Из (9) следуют равенства

$$Y_i \lambda = \frac{2}{5} \delta_{i5} Y_5 \varphi. \tag{10}$$

Используя полученные соотношения и формулу

$$[Y_k, Y_h] \equiv \nabla_{Y_k} Y_h - \nabla_{Y_h} Y_k = \sum_{l=1}^{n} e_l \left(\gamma_{lkh} - \gamma_{lhk}\right) Y_{\tilde{l}},$$

составим всевозможные скобки Ли векторных полей $Y_1, \ldots, Y_5$:

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_4] = 0, \quad [Y_1, Y_5] = -\frac{2}{5}(Y_5\varphi) Y_2,$$

$$[Y_2, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_4] = 0, \quad [Y_2, Y_5] = -\frac{4}{5}(Y_5\varphi) Y_3, \quad [Y_3, Y_4] = 0,$$

$$[Y_3, Y_5] = -\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4, \quad [Y_4, Y_5] = -\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5. \tag{11}$$

Отсюда видно, что каждая из указанных ниже четырех систем дифференциальных уравнений

$$Y_1u = Y_2u = Y_3u = Y_4u = 0,$$

$$Y_1u = Y_2u = Y_3u = 0,$$

$$Y_1u = Y_2u = 0,$$

$$Y_1u = 0$$

является вполне интегрируемой; обозначим решения первой системы u^5, одно из двух независимых решений второй системы выберем равным u^5, а второе обозначим u^4, независимые решения третьей системы выберем в виде u^3, u^4, u^5, а независимые решения последней системы – в виде u^2, u^3, u^4, u^5 и обозначим u^1 какую-либо функцию, не зависящую от u^2, u^3, u^4 и u^5. В новых координатах $x^{i'} = u^i$, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^{i} = Q(x)\delta^i_1, \quad \underset{2}{\xi}^{3} = \underset{2}{\xi}^{4} = \underset{2}{\xi}^{5} = \underset{3}{\xi}^{4} = \underset{3}{\xi}^{5} = \underset{4}{\xi}^{5} = 0. \tag{12}$$

С учетом этого из (9) и (10) следует, что λ зависит только от x^5: $\lambda \equiv f(x^5)$, при этом

$$\varphi = \frac{5}{2}f(x^5).$$

3. Основные уравнения.

Заметив, что из (12) ввиду условия $\det\left(\underset{j}{\xi}^{i}\right) \neq 0$ следует $\underset{i}{\xi}^{i} \neq 0$ при $i = 1, \ldots, 5$, приравняем в каждой координатной окрестности U координаты векторных полей в правых и левых частях уравнений (11) и с помощью формулы

$$[Y_k, Y_h]|_U = (\underset{k}{\xi}^{i}\partial_i\underset{h}{\xi}^{j} - \underset{h}{\xi}^{i}\partial_i\underset{k}{\xi}^{j})\partial x^j$$

получим следующую систему нелинейных уравнений в частных производных с неизвестными $\underset{i}{\xi}^{j}$:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1} - \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{1}{\xi}^{1} = 0,\\
&2^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&3^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{1}{\xi}^{1} = 0,\\
&4^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1} - \underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{1}{\xi}^{1} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&5^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4} = 0,\\
&6^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1} - \underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{1}{\xi}^{1} - \underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{1}{\xi}^{1} = -f'\underset{2}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&7^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2} = -f'\underset{2}{\xi}^{2}\underset{5}{\xi}^{5},\\
&8^\circ \quad \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4} = \underset{1}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&9^\circ \quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1} + \underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1} = 0,\\
&10^\circ \quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2} + \underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2} = 0,
\end{aligned}
$$

$$11^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}=0,$$

$$12^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{1}=0,$$

$$13^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{2}=0,$$

$$14^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}=0,$$

$$15^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}=0,$$

$$16^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{1}- \underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{2}{\xi}^{1}=-2f'\underset{3}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$17^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{2}{\xi}^{2}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{2}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{2}{\xi}^{2}=-2f'\underset{3}{\xi}^{2}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$18^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{3}=-2f'\underset{3}{\xi}^{3}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$19^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{4}=0,$$

$$20^\circ\quad \underset{2}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{2}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}=0,$$

$$21^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{1}=0,$$

$$22^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{2}=0,$$

$$23^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3}=0,$$

$$24^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}=0,$$

$$25^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{1}- \underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{1}=-3f'\underset{4}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$26^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{2}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{2}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{2},$$

$$27^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{3}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{3}{\xi}^{3}- \underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{3}{\xi}^{3}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{1},$$

$$28^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{4}=-3\underset{5}{\xi}^{5}f'\underset{4}{\xi}^{4},$$

$$29^\circ\quad \underset{3}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{5}+\underset{3}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{5}=0,$$

$$30^\circ\quad \underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{1}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{1}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{1}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{1}=-4f'\underset{5}{\xi}^{1}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$31^\circ\quad \underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{2}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{2}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{2}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{2}=-4f'\underset{5}{\xi}^{2}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$32^\circ\quad \underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{3}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{3}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{3}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{3}=-4f'\underset{5}{\xi}^{3}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$33^\circ\quad \underset{4}{\xi}^{1}\partial_1\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{2}\partial_2\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{3}\partial_3\underset{5}{\xi}^{4}+\underset{4}{\xi}^{4}\partial_4\underset{5}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{1}\partial_1\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{2}\partial_2\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{3}\partial_3\underset{4}{\xi}^{4}- \underset{5}{\xi}^{4}\partial_4\underset{4}{\xi}^{4}-\underset{5}{\xi}^{5}\partial_5\underset{4}{\xi}^{4}=-4f'\underset{5}{\xi}^{4}\underset{5}{\xi}^{5},$$

$$34^\circ \quad \underset{4}{\xi}^1\partial_1\underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^2\partial_2\underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^3\partial_3\underset{5}{\xi}^5 + \underset{4}{\xi}^4\partial_4\underset{5}{\xi}^5 = -4f'\left(\underset{5}{\xi}^5\right)^2 \tag{13}$$

$(f' \equiv df/dx^5)$.

Из уравнений 2°, 5°, 11°, 15° и 24° системы (13) следуют равенства $\partial_1\underset{2}{\xi}^2 = \partial_1\underset{3}{\xi}^3 = \partial_2\underset{3}{\xi}^3 = \partial_1\underset{4}{\xi}^4 = \partial_2\underset{4}{\xi}^4 = \partial_3\underset{4}{\xi}^4 = 0$. С учетом этого имеем

$$\underset{1}{\xi}^1 = \Phi_1, \quad \underset{2}{\xi}^2 = \Phi_2, \quad \underset{3}{\xi}^3 = \Phi_3, \quad \underset{4}{\xi}^4 = \Phi_4,$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\Phi_2 = \Phi_2(x^2,x^3,x^4,x^5)$, $\Phi_3 = \Phi_3(x^3,x^4,x^5)$ и $\Phi_4 = \Phi_4(x^4,x^5)$ – ненулевые функции указанных переменных. После преобразования координат

$$x^{1'} = \int\frac{dx^1}{\Phi_1}, \quad x^{2'} = \int\frac{dx^2}{\Phi_2}, \quad x^{3'} = \int\frac{dx^3}{\Phi_3}, \quad x^{4'} = \int\frac{dx^4}{\Phi_4}, \quad x^{5'} = x^5,$$

не меняющего полученных ранее результатов, опустив штрихи, получим

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4 = 1.$$

Из уравнений 8°, 20° и 29° следует $\partial_1\underset{5}{\xi}^5 = \partial_2\underset{5}{\xi}^5 = \partial_3\underset{5}{\xi}^5 = 0$; затем, интегрируя уравнение 34°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{4(f'x^4 + \tau(x^5))}.$$

Возможны два случая: $1) f' \neq 0$, $\;2) f' = 0$. В первом случае сделаем замену координат $\bar{x}^5 = f(x^5)$, $\;\bar{x}^k = x^k \;\; (k \neq 5)$ и положим $\bar{\tau} = (f')^{-1}\tau$, тогда

$$\underset{5}{\bar{\xi}}^5 = \frac{1}{4(x^4 + \bar{\tau})}, \quad \underset{5}{\bar{\xi}}^k = \underset{5}{\xi}^k \quad (k \neq 5);$$

во втором случае сделаем замену переменной $\bar{x}^5 = 4\int\tau dx^5$. Опустив черту, объединим оба случая формулами

$$f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)c \quad (c = \mathrm{const}),$$

$$\underset{5}{\xi}^5 = \frac{1}{A} \quad \left(A \equiv 4\varepsilon\left(x^4 + \tau(x^5)\right) + 1 - \varepsilon\right),$$

где ε равно 0 или 1.

Из уравнения 1° следует $\partial_1\underset{2}{\xi}^1 = 0$, вследствие этого получаем

$$\underset{2}{\xi}^1 = \chi(x^2,x^3,x^4,x^5).$$

Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - \int\chi dx^2, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 1)$$

и опустив штрихи, имеем

$$\underset{2}{\xi}^1 = 0.$$

Из уравнений 2°, 3°, 9° и 10° следует $\partial_1\underset{3}{\xi}^1 = \partial_2\underset{3}{\xi}^1 = \partial_1\underset{3}{\xi}^2 = \partial_2\underset{3}{\xi}^2 = 0$, вследствие этого

$$\underset{3}{\xi}^1 = \Psi(x^3,x^4,x^5), \quad \underset{3}{\xi}^2 = N(x^3,x^4,x^5).$$

После преобразования координат

$$x^{1'} = x^1 - \int\Psi dx^3, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 1),$$

$$x^{2'} = x^2 - \int N dx^3, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 2),$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{3}{\xi}^1 = \underset{3}{\xi}^2 = 0.$$

Из уравнений 4°, 5°, 12°, 13°, 14°, 21°, 22° и 23° следует $\partial_1 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^1 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^2 = \partial_1 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_2 \underset{4}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{4}{\xi}^3 = 0$, вследствие этого имеем

$$\underset{4}{\xi}^1 = D(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^2 = R(x^4, x^5), \quad \underset{4}{\xi}^3 = Z(x^4, x^5).$$

Произведя замену переменных

$$x^{1'} = x^1 - \int D dx^4, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 1),$$

$$x^{2'} = x^2 - \int R dx^4, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 2),$$

$$x^{3'} = x^3 - \int Z dx^4, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 3)$$

и опустив штрихи, получим

$$\underset{4}{\xi}^1 = \underset{4}{\xi}^2 = \underset{4}{\xi}^3 = 0.$$

Учитывая равенства $\partial_1 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^1 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^1 = 0$, следующие из уравнений 6°, 16° и 25°, проинтегрируем уравнение 30°:

$$\underset{5}{\xi}^1 = \frac{4W(x^5)}{A}.$$

Выполнив замену координат

$$x^{1'} = x^1 - 4\int W dx^5, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 5),$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{5}{\xi}^1 = 0.$$

Интегрируя уравнения 7°, 17°, 26° и 31°, найдем

$$\underset{5}{\xi}^2 = \frac{1}{A}(4Q(x^5) - \varepsilon x^1).$$

После преобразования координат

$$x^{2'} = x^2 - 4\int Q dx^5, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 5),$$

опустив штрихи, получим

$$\underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1}.$$

С учетом равенств $\partial_1 \underset{5}{\xi}^3 = \partial_3 \underset{5}{\xi}^3 = 0$, вытекающих из уравнений 8° и 27°, интеграция уравнений 18°, 32° дает

$$\underset{5}{\xi}^3 = \frac{1}{A}(4M(x^5) - 2\varepsilon x^2).$$

Выполнив замену координат

$$x^{3'} = x^3 - 4\int M dx^5, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 5),$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}.$$

Из уравнений 8° и 19° следует $\partial_1 \underset{5}{\xi}^4 = \partial_2 \underset{5}{\xi}^4 = 0$. После этого интегрирование уравнения 28°, 33° приводит к равенству

$$\underset{5}{\xi}^4 = \frac{1}{A}(4K(x^5) - 3\varepsilon x^3).$$

В новых координатах

$$x^{4'} = x^4 - 4\int K dx^5, \quad x^{p'} = x^p \quad (p \neq 5),$$

опустив штрихи, имеем

$$\underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}.$$

4. h-пространства типа $\{5\}$.

Используя найденные значения ненулевых компонент векторов косонормального репера

$$\underset{1}{\xi}^1 = \underset{2}{\xi}^2 = \underset{3}{\xi}^3 = \underset{4}{\xi}^4 = 1, \quad \underset{5}{\xi}^2 = -\varepsilon x^1 A^{-1},$$

$$\underset{5}{\xi}^3 = -2\varepsilon x^2 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^4 = -3\varepsilon x^3 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi}^5 = A^{-1}$$

по формулам (3), (4) вычислим компоненты канонических 1-форм в натуральном репере

$$\theta_1 = A dx^5, \quad \theta_2 = dx^4 + 3\varepsilon x^3 dx^5,$$

$$\theta_3 = dx^3 + 2\varepsilon x^2 dx^5, \quad \theta_4 = dx^2 + \varepsilon x^1 dx^5, \quad \theta_5 = dx^1$$

и затем по формулам (8) – компоненты метрики g и билинейной формы h в натуральном репере (X_i). Подсчитав символы Кристоффеля найденной метрики g, непосредственной проверкой убедимся в том, что тензорные поля g, h и φ удовлетворяют уравнению Эйзенхарта. В итоге получим следующие результаты.

Теорема 3 *Пусть M есть 5-мерное многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Пусть 0-форма φ и симметричная билинейная форма h характеристики $\chi = \{5\}$ определены в M или в некоторой области $V \subseteq M$ и пусть f – характеристический корень билинейной формы $h - 2\varphi g$ кратности 5. Для того чтобы h, g и φ удовлетворяли уравнению Эйзенхарта (2), т. е. для того чтобы M было h-пространством типа $\chi = \{5\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\begin{aligned} h &= 6fg + h_0, \\ \varphi &= \frac{5}{2} f \end{aligned} \tag{14}$$

и вокруг каждой точки $p \in V \subseteq M$ существовала каноническая карта (x, U), в которой

$$\begin{aligned} eg|_U &= 2A dx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 + 6\varepsilon x^3 dx^2 dx^5 + dx^{3^2} + \\ &4\varepsilon x^2 dx^3 dx^5 + 2\varepsilon x^1 dx^4 dx^5 + 2\varepsilon \left(3x^1 x^3 + 2x^{2^2}\right) dx^{5^2}, \\ eh_0|_U &= 2A dx^2 dx^5 + 2dx^3 dx^4 + 6\varepsilon x^3 dx^3 dx^5 + 4\varepsilon x^2 dx^4 dx^5 + \\ &2\varepsilon \left(A x^1 + 6x^2 x^3\right) dx^{5^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)c$, $c - const$, $A = 4\varepsilon\left(x^4 + \tau(x^5)\right) + 1 - \varepsilon$, ε принимает независимо значения 0 или 1, $e = \pm 1$, τ – функция x^5.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4 *Векторное поле $X \in TM$ тогда и только тогда является (локальным) проективным движением типа $\{5\}$ на 5-мерном псевдоримановом многообразии (M, g), когда выполняется равенство $L_X g = h$* (1), *где метрика g и билинейная форма h определены формулами* (14)–(15) *(теорема* 3*).*

Запишем уравнение Эйзенхарта (2) в координатном репере в виде

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}$$

и симметрируем его по всем трем индексам, в итоге получим

$$q_{(ij,k)} = 0,$$

где введено обозначение

$$q_{ij} \equiv 4\varphi g_{ij} - h_{ij}.$$

Если γ — геодезическая в M^n, то поле ее касательных векторов $\dot\gamma$ параллельно вдоль γ [8]. В соответствии с этим величина $q(\dot\gamma, \dot\gamma)$ остается постоянной вдоль каждой геодезической γ в M^n, т. е. является первым интегралом уравнений геодезических. Отсюда следует

Теорема 5 *Геодезические линии в 5-мерном псевдоримановом h-пространстве типа $\{5\}$ допускают квадратичный первый интеграл уравнений геодезических*

$$(4\varphi g - h)(\dot\gamma, \dot\gamma) = \mathrm{const}, \tag{16}$$

где g и h определены формулами (14)–(15) *(теорема* 3*).*

Заметим, что квадратичный первый интеграл (16) определяет механический закон сохранения в 5-мерной теории гравитации.

Список литературы

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.* 1896; № 24 (2): S. 255–300.

2. Петров А. З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики. Учен. зап. Казан. ун-та, 1949, 109 (3), с. 7–36.

3. Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств // УМН. 1956. № 11. С. 45–116.

4. Аминова А. В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий. // УМН. 1995. № 50 (1). С. 69–142.

5. Аминова А. В. Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений. // Изв. вузов. Матем. 1994. № 2. С. 3–11.

6. Аминова А. В. Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1995. № 186 (12). С. 21–37.

7. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. Москва: Ин. лит., 1947.

8. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. Москва: Ин. лит., 1948.

9. Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. Москва: Янус-К, 2003. 619 с.

10. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях пятимерных пространств специального вида // Изв. вузов. Матем. 2017. № 5. С. 97–102.

11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h-пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018 № 4. С. 21–31.

References

1. Levi–Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. *Ann. di Mat.*, 1896, no. 24 (2), pp. 255–300.

2. Petrov A. Z. *On the geodesic mapping of Riemannian spaces of indefinite metric.* Uchen. Zap. Kazan. un-ta, 1949, 109 (3), pp. 7–36. (in Russian)

3. Solodovnikov A. S. Projective transformations of Riemannian spaces. *UMN*, 1956, no. 11, pp. 45–116. (in Russian)

4. Aminova. A. V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentzian manifolds. *UMN*, 1995, no. 50 (1), pp. 69–142. (in Russian)

5. Aminova. A. V. Automorphisms of geometric structures as symmetries of differential equations. *Izv. vuzov. Matem.*, 1994, no. 2, pp. 3–11. (in Russian)

6. Aminova. A. V. Projective transformations and symmetries of differential equations. *Matem. sb.*, 1995, no. 186 (12), pp. 21–37. (in Russian)

7. Eisenhart L.P. *Continous groups of transformations.* Moscow, IL Publ. 1947. (in Russian)

8. Eisenhart L.P. *Riemannian geometry.* Moscow, IL Publ. 1948. (in Russian)

9. Aminova A. V. *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds.* Moscow, Yanus-K Publ. 2003. 619 p. (in Russian)

10. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of five-dimensional spaces of special type. *Izv. vuzov. Matem.*, 2017, no. 5, pp. 97–102. (in Russian)

11. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces. I. h-spaces of type 32. *Space, Time and Fundamental Interactions, 2018, no. 4, pp. 21-31. (in Russian)*

Авторы

Аминова Ася Васильевна, профессор, д.ф.-м.н., профессор кафедры теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, аспирант, кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аминова А. В., Хакимов Д. Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. III. h-пространства типа $\{5\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 1. С. 56—66.

Authors

Aminova Asya Vasiljevna, Professor, Dr. of Science, Dept. Relativity and Gravitation, Institute of Physics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin, postgraduate student, Department of Geometry, Division of Mathematics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, Kremlyovskaya str., 18, Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:

Aminova A. V., Khakimov D. R. On projective motions of 5-dimensional spaces III. h-spaces of the type $\{5\}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 1, pp. 56–66.