

УДК 530.16, 539.12.01

© Круглый А. Л., 2019

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И БИНАРНАЯ ПРЕДГЕОМЕТРИЯ ВЛАДИМИРОВА *Круглый А. Л.^{a,1}^a ФГУ ФНЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, г. Москва, 117218, Россия.

Рассматривается дискретная модель пространства-времени, которая представляет собой ориентированный ациклический граф. Рассматривается частный случай конечного, связного, ориентированного ациклического графа, названный x-графом, в котором полустепени захода и исхода не превышают двух. Вершины идентифицируются с элементарными событиями, а ориентированные ребра - с элементарными причинно-следственными связями. И вершины, и ребра считаются неделимыми первоэлементами, не имеющими внутренних свойств. Все свойства заключены в топологии x-графа. Так элементарная частица (точнее ее мировая линия) предполагается последовательностью квазиповторяющихся структур x-графа. Имеется две основные задачи. Первая заключается в построении динамики модели и в настоящей работе не рассматривается. Вторая задача заключается в идентификации структур x-графа с физическими объектами, а топологических характеристик - с физическими величинами, для чего необходимо установить соответствие с квантовым описанием. Топологические характеристики задаются целыми числами: число вершин, число ребер, число маршрутов определенного вида и так далее. Для квантового описания характерно использование комплексных чисел. Описание x-графа комплексными числами получено за счет анализа Фурье. Доказан ряд топологических свойств x-графа, благодаря которым структуры x-графа могут описываться бинарными системами комплексных отношений Владимирова. Это позволяет использовать результаты Владимирова для анализа и интерпретации рассматриваемой модели.

Ключевые слова: ориентированный ациклический граф, анализ Фурье, бинарные системы комплексных отношений.

THE DISCRETE MODEL OF SPACETIME AND THE BINARY PREGEOMETRY OF VLADIMIROVKrugly A. L.^{a,1}^a Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analyses of the Russian Academy of Science Moscow, 117218, Russia.

The discrete model of spacetime is considered. This is a finite connected directed acyclic graph. The indegree and the outdegree of each vertex is no more than 2. Then this graph is called x-graph. Vertices are elementary events. Edges are elementary causal relations. Vertices and edges are nondivisible. They have no intrinsic properties. All properties are the topology of x-graph. The world line of elementary particle is considered as a sequence of repetitive structures. There are two tasks. The first is a dynamics of x-graph. This task is not considered. The second task is the identification of topological structures and physical objects, topological properties and physical quantities. To solve this task we need a correspondence the topology of x-graph and quantum discription. In quantum discription we use complex numbers. In topology of x-graph we use natural numbers as the number of vertices, the number of edges, the number of some pathes and so on. We get complex numbers for topology of x-graph by Fourier analysis. Some properties of x-graph are proved. Using these properties the topology of x-graph can be described by binary systems of complex relations of Vladimirov. We can use the results of Vladimirov for analysis and physical interpretation of x-graph topology.

*Работа выполнена по теме 36.20. Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления. Код в системе формирования Гос. заданий МИНОБНАУКИ 0065-2019-0007. Регистрационный номер в ЦИТИС АААА-А19-119011590093-3.

¹E-mail: akrugly@mail.ru

Keywords: directed acyclic graph, Fourier analysis, binary systems of complex relations.

PACS: 04.60.Nc

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.2.15-27

Введение

Одной из актуальных задач теоретической физики является вывод пространства-времени из более фундаментальных структур микромира, о чем свидетельствуют высказывания многих физиков [1]. К настоящему времени предложены различные варианты, но ни один не достиг решающего успеха. При этом внешне различные модели могут оказаться различными формами одной теории аналогично тому, как квантовая механика формулируется в представлениях Гейзенберга, Шредингера и Фейнмана. Обнаружение соответствия между моделями позволяет взглянуть на каждую из них под новым углом зрения, обогащает их новыми идеями и может способствовать их развитию. В настоящей статье рассматривается соответствие между бинарной предгеометрией Владимирова и одним из вариантов дискретной модели пространства-времени. Показано, что бинарная предгеометрия может быть способом описания структур в рассматриваемой дискретной модели.

В ряде моделей за основу берутся некоторые алгебраические структуры [2, 3]. Владимировым в качестве такой фундаментальной структуры предложены бинарные системы комплексных отношений ([4] и предыдущие работы). С математической точки зрения они представляют собой квадратные комплексные матрицы с нулевым детерминантом. Детали математической структуры и физической интерпретации будут приведены ниже по мере необходимости. Владимиров отмечает связь своего подхода с твисторной программой Пенроуза [5]. Рассматриваемые комплексные математические объекты позволяют искать соответствие с квантовым описанием материи и обосновать размерность и сигнатуру пространства-времени.

Другую группу моделей составляют дискретные множества событий. В первую очередь, это модель причинностного множества (causal set). Она предложена 'т Хоофтом [6] и Мерхеймом [7]. Причинностное множество представляет собой частично упорядоченное локально конечное множество, где элементы интерпретируются как элементарные события, а отношение порядка - как причинно-следственная связь. Локальная конечность означает, что для любой пары событий конечно их множество Александрова, то есть множество событий, которые следуют из первого события и являются причинами второго. Причинностное множество воспроизводит причинно-следственную структуру пространства-времени Минковского. Легко определить дискретные аналоги различных геометрических объектов пространства-времени Минковского: световых конусов, мировых линий, пространственноподобных гиперповерхностей. По термину "causal set" на ресурсе arXiv.gov находятся десятки статей, в том числе и обзоров, например, недавний обзор [8], имеется русскоязычный обзор [9].

Причинностное множество может быть представлено в форме ориентированного ациклического графа. Вершины графа идентифицируются с событиями. Ребро идентифицируется с причинно-следственной связью пары событий, для которых множество Александрова пусто, то есть нет промежуточных событий. Имеются и другие модели дискретного пространства-времени в форме ориентированного ациклического графа. Вершины такого графа образуют частично упорядоченное локально конечное множество. Однако в общем случае модель ориентированного ациклического графа допускает спектр вариантов, несводимых к причинностному множеству. Например, может иметься кратное ребро, или ребро, соединяющее пару вершин с непустым множеством Александрова. При этом могут вводиться различные ограничения. Автором в ряде работ рассматривался граф, вершины которого инцидентны двум входящим и двум исходящим ребрам. Этот вариант и будет рассматриваться ниже. Обзор идей имеется в работе [10], примеры простейших вариантов динамики в работах [11, 12]. Модель предложена Финкельштейном [13]. Вершина с инцидентны-

ми ей ребрами образует структуру в виде буквы "X" и названа Финкельштейном "x-structure". Поэтому рассматриваемый граф будем называть x-графом.

Таким образом имеется две весьма различные группы моделей. В основе первой лежат некоторые алгебраические структуры. В основе второй - частично упорядоченное локально конечное множество событий. Однако, если модели претендуют на адекватное описание реальности, то между ними должна быть связь. С одной стороны, в рамках алгебраического подхода на каком-то этапе должно быть построено пространство-время, то есть построены события, образующие частично упорядоченное множество. С другой стороны, в модели множества событий на каком-то этапе должно быть воспроизведено квантовое описание материи, включая соответствующие алгебраические структуры, комплексные числа. При этом различные модели могут оказаться различными языками описания одной модели. Установление такого соответствия двух моделей в одну и в другую сторону может качественно отличаться по сложности, что характерно для прямой и обратной задач. По мнению автора, более простым является путь построения алгебраических структур в качестве языка описания свойств множества событий, что и показано ниже на конкретном примере.

В настоящей работе показано, как бинарная предгеометрия (модель из первой группы) может быть языком описания квазипериодических структур x-графа (модель из второй группы).

1. Модель x-графа

Очевидно, что ориентированный ациклический граф, все вершины которого инцидентны двум входящим и двум исходящим ребрам бесконечен. Ниже будут рассматриваться только конечные связные подграфы такого графа, которые будут называться x-графы. Очевидно, что некоторые вершины x-графа инцидентны менее чем четырьмя ребрами. У этих вершин имеются свободные валентности на месте тех ребер, которыми рассматриваемый x-граф связан с остальной вселенной. Вершины и ребра считаются неделимыми. Они не имеют внутренней структуры и, следовательно, внутренних свойств. Все свойства заключены в топологии x-графа. Если x-граф не содержит вершин следующих (предшествующих) некоторой вершине, то такая вершина называется максимальной (минимальной). Рассмотрим некоторые свойства x-графа, которые будут использованы ниже.

На рисунке 1 приведен пример x-графа. Свободные валентности изображены стрелками, инцидентными одной вершине. Пунктирные линии и указанные у некоторых вершин номера будут использованы ниже. Рассматриваемые свойства x-графа могут быть проиллюстрированы на этом рисунке.

Теорема 1. *Если в x-графе у всех ребер сменить ориентацию на противоположную, то полученный граф будет x-графом.*

Доказательство. Для полученного графа очевидно выполняются все требуемые условия: он является ориентированным, ациклическим, конечным, связным и полустепени захода и исхода каждой вершины не превышают двух. □

Теорема 2. *У любого x-графа может быть удалена одна максимальная или минимальная вершина так, что в результате получится x-граф.*

Доказательство. Необходимо доказать, что полученный граф является связным. Все остальные свойства x-графа очевидны. Выберем удаляемую вершину по следующему алгоритму. Выберем максимальную вершину. Если при ее удалении получается связный граф, то задача решена. В противном случае выберем произвольный ориентированный маршрут, заканчивающийся в этой вершине. Он начинается в некоторой минимальной вершине. Если при ее удалении получается связный граф, то задача решена. В противном случае выберем произвольный ориентированный маршрут, начинающийся в этой вершине и не имеющий общих ребер с предыдущим маршрутом.

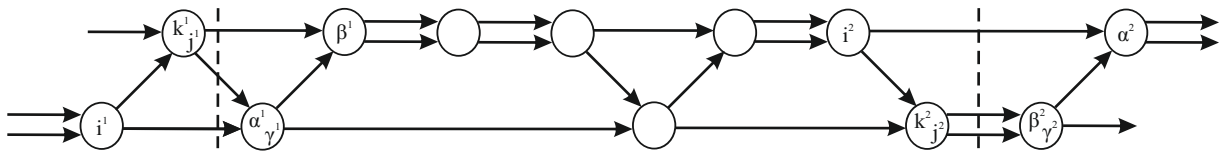


Рис. 1. Пример х-графа

Для этого маршрут должен начинаться ребром, не принадлежащем предыдущему маршруту. В остальном маршрут может быть произвольным. Он не может пересекаться с предыдущим маршрутом, так как подграф, которому он принадлежит, и подграф, которому принадлежит предыдущий маршрут, связаны только через начальную вершину этих маршрутов. В противном случае при удалении этой вершины оставшийся х-граф был бы связным, и эта вершина была бы искомой. Новый маршрут заканчивается в некоторой максимальной вершине. Если при ее удалении получается связный граф, то задача решена. В противном случае выберем произвольный ориентированный маршрут, заканчивающийся в этой вершине и не имеющий общих ребер с предыдущими маршрутами. В процессе выполнения алгоритма каждый следующий ориентированный маршрут включает ребра, не входящие в предыдущие маршруты. В силу конечности х-графа алгоритм завершится на некотором конечном шаге. \square

Следствие 1. *Любой х-граф может быть получен путем последовательного добавления максимальных и минимальных вершин к х-графу, состоящему из единственной вершины.*

Доказательство. Рассмотрим искомый х-граф. Согласно доказанной теореме последовательно будем удалять из него максимальные и минимальные вершины пока не останется единственная вершина так, что на каждом шаге будем получать х-граф. Эта процедура в обратном порядке является искомой. \square

При этом имеется четыре типа добавления новой вершины. Новая максимальная вершина может прикрепляться к имеющемуся х-графу двумя новыми ребрами вместо имеющихся двух исходящих свободных валентностей. Новая максимальная вершина может прикрепляться к имеющемуся х-графу одним новым ребром вместо имеющейся исходящей свободной валентности. Аналогично для новой минимальной вершины.

Вершины х-графа образуют частично упорядоченное множество. Также частично упорядоченным является множество ребер х-графа. Х-граф рассматривается как конечный подграф бесконечного графа вселенной. Свободные валентности у вершин х-графа соответствуют ребрам, которыми х-граф соединяется с остальным графом вселенной. В некоторых случаях свободные валентности удобно рассматривать как ребра. Рассмотрим частично упорядоченное множество ребер и свободных валентностей х-графа.

Цепью называется линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества. Отметим, что в теории графов также имеется термин цепь, но он имеет другой смысл. Ниже термин цепь будет использован с смысле теории частично упорядоченных множеств. В ориентированном ациклическом графе цепями в обоих смыслах являются ориентированные маршруты. Модифицируем стандартное определение ориентированного маршрута, включив в него свободные валентности. Ориентированным маршрутом в х-графе называется такая последовательность ребер и свободных валентностей, что каждая пара соседних элементов инцидентна одной вершине, причем предыдущий элемент является инцидентным входящим, а последующий инцидентным исходящим.

Подмножество частично упорядоченного множества называется полной антицепью, если каждые два элемента этого подмножества не находятся в отношении порядка, и любой не принадлежащий подмножеству элемент множества находится в отношении порядка хотя бы с одним элементом подмножества. Полная антицепь множества вершин x -графа является дискретным аналогом пространственноподобной гиперповерхности в теории относительности. На рисунке 1 изображены два примера полных антицепей ребер. Это ребра, пересеченные пунктирной линией. Для полных антицепей множества ребер и свободных валентностей x -графа справедливо следующее важное свойство.

Теорема 3. *Все полные антицепи ребер и свободных валентностей x -графа содержат равное число элементов.*

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Если x -граф состоит из одной вершины, то имеются две полные антицепи. Одна состоит из двух входящих свободных валентностей, а другая из двух исходящих. Согласно следствию 1 из теоремы 2 любой x -граф получается последовательным добавлением новых вершин по одной, начиная с x -графа, состоящего из одной вершины. Пусть теорема верна для x -графа, состоящего из N вершин. Надо доказать, что она верна для x -графа, состоящего из $N + 1$ вершин, получаемого добавлением одной вершины. Имеется четыре типа добавления новой вершины. При этом некоторые свободные валентности заменяются ребрами и добавляются новые свободные валентности. Для каждого типа добавления новой вершины последовательно рассматриваем все варианты включения новых ребер и свободных валентностей в имеющиеся полные антицепи. Перебором конечного (и небольшого) числа вариантов убеждаемся, что все полные антицепи имеют равное число элементов. При этом, если новая вершина прикрепляется к имеющемуся x -графу двумя ребрами, то число элементов в полных антицепях не меняется. Если новая вершина прикрепляется к имеющемуся x -графу одним ребром, то число элементов в полных антицепях увеличивается на единицу. \square

Назовем шириной x -графа число элементов в полной антицепи множества ребер и свободных валентностей x -графа. В теории частично упорядоченных множеств антицепь, содержащая максимальное число элементов, называется максимальной антицепью, а число элементов в ней - шириной частично упорядоченного множества. Очевидно, что антицепь множества ребер и свободных валентностей x -графа является полной тогда и только тогда, когда она является максимальной.

Следствие 2. *Число входящих (исходящих) свободных валентностей x -графа равно его ширине.*

Доказательство. Очевидно, что и входящие и исходящие свободные валентности образуют полные антицепи. \square

Ширина x -графа составляет основу классификации структур, образуемых x -графами. Минимальной шириной x -графа является 2. Такой x -граф представляет собой тривиальную структуру, состоящую из последовательности двойных ребер. Изображенный на рисунке 1 x -граф имеет ширину 3. Он состоит из структур двух типов. Первой структурой является треугольник, образованный ребрами. Второй структурой является последовательность двойных ребер произвольной длины и параллельное им ребро.

Рассмотрим некоторые свойства x -графа, которые будут использованы ниже.

Теорема 4. *Каждая полная антицепь ребер и свободных валентностей в x -графе содержит хотя бы одну пару элементов, инцидентных одной вершине.*

Доказательство. Рассмотрим алгоритм обнаружения искомой вершины. Если полная антицепь A состоит только из входящих свободных валентностей, то любой минимальной вершине инцидентны две входящие свободные валентности, она и является искомой. В противном случае A

принадлежит хотя бы одно ребро или исходящая свободная валентность, с которой и начнем поиск. Присвоим этому элементу номер 1. Элемент номер 1 является инцидентным исходящим для некоторой вершины, которой инцидентен другой исходящий элемент, который обозначим номером 2. Если элемент номер 2 принадлежит A , то искомая вершина обнаружена. В противном случае A принадлежит некоторый элемент номер 3, который упорядочен с элементом номер 2. Он не может ему предшествовать, так как тогда он будет предшествовать и элементу номер 1, а они оба принадлежат A . Следовательно, элемент номер 3 следует элементу номер 2. Это значит, что элемент номер 3 является инцидентным исходящим для некоторой вершины, в которую ведет ориентированный маршрут, включающий элемент номер 2. У этой вершины имеется другой инцидентный исходящий элемент, который обозначим номером 4. Если элемент номер 4 принадлежит A , то искомая вершина обнаружена. В противном случае A принадлежит некоторый элемент номер 5, который следует элементу номер 4. Элемент номер 5 не может совпадать с элементом номер 1, так как в этом случае образуется ориентированный цикл, включающий элементы 2 и 4. Повторяя рассуждения мы получаем последовательность элементов A , которые являются инцидентными исходящими для различных вершин. В силу конечности числа вершин алгоритм остановится на конечном шаге на некоторой вершине, которой инцидентны два исходящих элемента, оба принадлежащие A . \square

Следствие 3. *Если полная антицепь ребер и свободных валентностей в x -графе содержит хотя бы по одному элементу, исходящему из некоторой вершины и входящему в некоторую вершину, то эта антицепь содержит хотя бы одну пару элементов, инцидентных одной вершине и исходящих из нее и хотя бы одну пару элементов, инцидентных одной вершине и входящих в нее.*

Доказательство. По доказанной теореме антицепь содержит пару исходящих из одной вершины элементов. В силу теоремы 1 антицепь содержит пару входящих в одну вершину элементов. \square

Таким образом, полными антицепями, которые содержат только одну пару элементов, инцидентных одной вершине, могут быть только антицепи, состоящие только из свободных валентностей.

Теорема 5. *Частично упорядоченное множество ребер и свободных валентностей в x -графе может быть разбито на ориентированные маршруты так, что каждый элемент принадлежит одному и только одному ориентированному маршруту. При этом число ориентированных маршрутов равно ширине x -графа.*

Доказательство. Представленная теорема является формулировкой для x -графа теоремы Дилуорса. \square

Каждый из полученных ориентированных маршрутов начинается входящей свободной валентностью и заканчивается исходящей свободной валентностью.

Рассмотренное разбиение не однозначно. В каждой вершине дальнейшее продолжение ориентированного маршрута может быть выбрано одним из двух способов. Соответственно имеется 2^N различных разбиений, где N - число вершин в x -графе.

Теорема 6. *Множество вершин x -графа шириной менее четырех образует линейно упорядоченное множество.*

Доказательство. Две вершины не упорядочены, если нет соединяющего их ориентированного маршрута. В этом случае не упорядочены инцидентные им исходящие ребра и свободные валентности, которых четыре. Тем самым ширина x -графа не менее четырех. \square

В рассматриваемой модели материальными объектами, например, частицами должны являться повторяющиеся или квазиповторяющиеся структуры. Причинно связанная последовательность

таких структур составляет мировую линию объекта. Изображенный на рисунке 1 х-граф может рассматриваться как модель мировой линии некоторого весьма простого объекта.

В модели х-графа должны быть решены две основные задачи.

Первая задача - это построение динамики. Различные структуры должны не задаваться изначально, а самоорганизовываться как результат динамики. Эта задача в настоящей работе не рассматривается, ей посвящены статьи [11,12].

Вторая задача - это идентификация структур х-графа с физическими объектами. Предполагается, что простейшие структуры могут быть идентифицированы с элементарными частицами. В современной теоретической физике для описания элементарных частиц используются комплексные структуры. Необходимо найти способ внесения комплексных чисел в модель, что рассматривается ниже. Также полезно найти связь с другими моделями, что позволит воспользоваться полученными в них результатами. В настоящей статье найдена связь с бинарными системами комплексных отношений Владимирова.

2. Описание структуры ширины 3 с помощью бинарной системой комплексных отношений ранга (3,3)

В рассматриваемой модели любые свойства являются топологическими свойствами х-графа. Однако мы можем приписать некоторые топологические свойства в качестве весов вершинам или ребрам. В этом случае мы можем формально забыть об их топологической природе и работать с ними, как с внутренними характеристиками вершин или ребер. Например, можно рассмотреть число ближайших соседей вершины. У вершины х-графа оно может быть равно 0, 1, 2, 3 и 4. Ноль ближайших соседей имеет вершина х-графа, состоящего только из этой вершины. Вершины, которым не инцидентны свободные валентности, могут иметь 2, 3 и 4 ближайших соседей в зависимости от того, сколько этой вершине инцидентно двойных ребер.

Если некоторый подграф х-графа обладает повторяющейся топологией, то имеется класс топологических характеристик этого подграфа, которые могут быть описаны, как веса вершин этого подграфа, и значения которых повторяются в соответствии с повторениями топологии. Число ближайших соседей вершины является примером такой характеристики.

Любой стабильный объект есть стабильный процесс, то есть процесс повторяющийся, возможно, с некоторыми вариациями — квазиповторяющийся. Для исследования таких процессов эффективен анализ Фурье. В рассматриваемой модели это дискретный анализ Фурье. Он хорошо разработан и широко применяется в радиоэлектронике и иных технических дисциплинах. Веса вершин являются функцией, заданной на множестве вершин, к которой применим анализ Фурье. Если нас интересуют характерные частоты повторяемости процесса, то нам не важна конкретная топологическая характеристика, описанная как веса вершин. Она только должна повторяться в соответствии с повторениями топологии и не быть тривиальной константой. Отметим, что число ближайших соседей не всегда удовлетворяет этому требованию. Если рассматриваемый подграф не содержит двойных ребер, то вес всех вершин, не имеющих инцидентных свободных валентностей, равен 4. При этом топология может быть очень разнообразной и повторяющейся.

Выберем в х-графе некоторый ориентированный маршрут. Рассмотрим вершины вдоль этого маршрута, как дискретную последовательность событий во времени. Если принять ребро за единицу времени, то последовательные события разделены одинаковыми интервалами времени, равными единице. Припишем вершинам веса, как обсуждалось выше. Таким образом, мы имеем функцию, заданную в дискретные эквидистантные моменты времени. К ней применимо стандартное дискретное преобразование Фурье. Пример такого анализа имеется в работе [14]. Согласно теореме 5 х-граф можно разбить на ориентированные маршруты, которые попарно пересекаются в вершинах, и число которых равно его ширине n . Таким образом, х-граф описан n спектрами. Различное разбиение х-графа на ориентированные маршруты дает 2^N наборов спектров, где N - число вершин х-графа. Можно предположить, что для квазипериодических х-графов все наборы спек-

тров имеют некоторые общие характеристики, например, частоты основных максимумов. Именно они описывают повторяемость топологии и представляют интерес. Тем самым, выбор разбиения x -графа может быть произвольным и не влиять на конечный результат. Другим вариантом развития анализа Фурье x -графов может быть поиск некоторых предпочтительных вариантов разбиения.

Применим дискретное преобразование Фурье к x -графу ширины 3. Согласно теореме 6 существует ориентированный маршрут, который проходит через все вершины. Таких маршрутов четыре, но они различаются только свободными валентностями, которыми начинаются и заканчиваются, что не влияет на спектр. Таким образом, единственный спектр для этого маршрута характеризует весь x -граф, и мы имеем пример предпочтительного выбора разбиения x -графа на ориентированные маршруты.

В качестве заданной в вершинах функции g выберем число ближайших соседей. Эта функция является константой для всех вершин кроме четырех, которым инцидентны свободные валентности, только в двух тривиальных случаях: x -граф состоит только из треугольных структур и x -граф состоит из последовательности двойных ребер и параллельного ей ребра. Любой иной вариант с переменной топологией ведет к функции g с изменяющимися значениями, что оправдывает наш выбор функции.

Введем дискретное пространство-время с двумя координатами: временной и пространственной, точками-событиями которого являются вершины x -графа ширины 3. Временная координата вершины, обозначаемая t , полагается равной номеру вершины в линейном порядке и пробегает значения от 0 до $N - 1$. Пространственная координата вершины, обозначаемая x , полагается равной 0 или 1. Она присваивается различной любому двум вершинам, для которых являются инцидентными входящими (исходящими) элементы одной полной антицепи. Присвоение возможно произвести по следующему алгоритму. Последовательно сформируем пары вершин с различными значениями координаты x . Минимальная вершина имеет координаты $t = 0$ и $x = 0$. Ей инцидентны две входящие свободные валентности. Третья входящая свободная валентность инцидентна вершине с $t = m > 0$. Присвоим этой вершине координату $x = 1$. Эти две вершины образуют первую пару. Затем последовательно исключаем из пары вершину с меньшим номером и включаем вместо нее вершину, которая соединена с исключаемой вершиной хотя бы одним ребром и еще не включена в пары. Присваиваем включаемой вершине координату x исключаемой вершины. Например, всем вершинам с $t < m$ присваивается координата $x = 0$. Процесс продолжается пока не будет исключена вершина, которой инцидентна исходящая свободная валентность. Дальнейшее формирование пар невозможно. Оставшимся вершинам присваивается координата x вершины, оставшейся в паре. Простым перебором вариантов топологии x -графа ширины 3 легко убедиться, что не существует пары вершин с равными координатами x , для которых элементы некоторой полной антицепи являются инцидентными входящими (исходящими).

Введение второй пространственной координаты выглядит излишним усложнением, так как вершины x -графа ширины 3 образуют линейно упорядоченную последовательность. Однако, вторая координата понадобится при исследовании x -графов большей ширины, когда вершины не упорядочены линейно. Представляется оправданным развитие единообразного описания.

Представим вес вершины в виде произведения пространственной и временной компонент.

$$g = v(x)g(t). \quad (1)$$

Положим значения $v(x)$ равными некоторым натуральным числам, не равным при различных значениях x . Например, $v(0) = 1$ и $v(1) = 2$. Тогда в каждой вершине $g(t) = g/v(x)$. Эта процедура позволяет получить на одной частоте волны с различными амплитудами в вершинах с различными пространственными координатами.

Применим дискретное преобразование Фурье к $g(t)$.

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} g(t) \exp\left(-i \frac{2\pi kt}{N}\right), \quad (2)$$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N-1} G(k) \exp\left(i \frac{2\pi kt}{N}\right). \quad (3)$$

Значение временной координаты t пробегает множество целых значений от 0 до $N - 1$. Интервал времени Δt между соседними значениями времени равен единице. Общая длительность процесса $T = N\Delta t = N$. В результате дискретного преобразования Фурье мы получили линейчатый спектр. Расстояние между соседними частотами $1/T = 1/N$. Спектр расположен в интервале от частоты 0 до частоты Найквиста, равной $1/(2\Delta t) = 1/2$. Спектр на других частотах повторяет прямо или зеркально спектр из этого интервала. Все приведенные факты являются стандартными свойствами дискретного преобразования Фурье и приводятся в любом учебном пособии соответствующего профиля.

Рассмотрим в структуре ширины 3 две полные антицепи ребер. На рисунке 1 эти ребра пересечены пунктирными линиями. Каждая полная антицепь состоит из трех ребер. Произвольно обозначим начальные вершины этих ребер номерами i^1 , k^1 и j^1 для первой антицепи и i^2 , k^2 и j^2 для второй антицепи. Согласно теореме 4 для каждой антицепи две из трех вершин совпадают. Аналогично обозначим конечные вершины рассматриваемых ребер номерами α^1 , β^1 и γ^1 для первой антицепи и α^2 , β^2 и γ^2 для второй антицепи.

Выберем некоторую ненулевую частоту f . Это может быть выделенная частота. Например, частота Найквиста, или частота максимума спектра. Однако приводимые ниже соотношения справедливы для произвольной частоты. На нулевой частоте они тривиальны. Рассмотрим значение волны u в каждой из нумерованных вершин. При этом в начальных вершинах ребер будем брать фазу ϕ с противоположным знаком. Например,

$$u_{i^1} = v(0)G(f) \exp(-i\phi(i^1)), \quad (4)$$

$$u_{\alpha^1} = v(0)G(f) \exp(i\phi(\alpha^1)). \quad (5)$$

Составим из них величину

$$u_{i\alpha} = u_{i^1}u_{\alpha^1} + u_{i^2}u_{\alpha^2}. \quad (6)$$

Из полученных величин составим матрицу U_3 с нулевым детерминантом.

$$\det U_3 = \begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\gamma} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\gamma} \\ u_{j\alpha} & u_{j\beta} & u_{j\gamma} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Детерминант равен нулю, так как совпадают между собой две начальные вершины и две конечные вершины ребер. Тем самым выбором нумерации вершин можно получить, что в матрице U_3 совпадают или две строки, или два столбца, или и то и другое. В рассматриваемом на рисунке 1 примере за счет выбора нумерации вершин совпадают строки с номерами k и j .

Полученная матрица ранга 3 с нулевым детерминантом построена таким образом, что может быть отождествлена с бинарной структурой комплексных отношений ранга 3 Владимирова. Есть только отличие в обозначениях. Владимирова обозначает величину u_{i^1} через i^1 , то есть совпадают обозначения значения функции в вершине и номера этой вершины. По мнению автора такие обозначения неудобны.

Сделанное построение очевидно обобщается на x -графы большей ширины. При этом для x -графа ширины n одновременно рассматриваются $n - 1$ полная антицепь ребер. Тем самым получается соответствие x -графов ширины n и бинарных структур комплексных отношений ранга n , которые являются комплексными матрицами ранга n с нулевым детерминантом.

Рассмотрим физический смысл построенных величин применительно к рассматриваемой модели.

3. Физический смысл бинарной системы комплексных отношений ранга (3,3) в модели х-графа

Рассмотрим элемент $u_{i\alpha}$ матрицы U , который задан формулами 4 — 6. С помощью элементарных тригонометрических преобразований формула 6 приводится к следующему виду.

$$u_{i\alpha} = 2v^2(0)G^2(f) \cos\left(\frac{(\phi(\alpha^1) - \phi(i^1)) + (\phi(\alpha^2) - \phi(i^2))}{2}\right) \exp\left(i\frac{(\phi(\alpha^1) - \phi(i^1)) + (\phi(\alpha^2) - \phi(i^2))}{2}\right). \quad (8)$$

Мы имеем комплексную экспоненту, которая умножена на амплитудные множители. Представляет интерес именно экспонента, описывающая фазовые соотношения. Это соотношение представляет собой средний фазовый сдвиг на двух ребрах: ребре с начальной вершиной i^1 и конечной вершиной α^1 и ребре с начальной вершиной i^2 и конечной вершиной α^2 .

Если мы имеем квазиповторяющуюся структуру, то мы можем сопоставить два ее экземпляра, в частности две полных антицепи ребер. При этом каждому ребру одной антицепи ставится в соответствие ребро второй антицепи. Это отражается в том, что начальные и конечные вершины сопоставляемых ребер обозначаются одинаковыми номерами, а принадлежность к той или другой антицепи обозначается индексом номера. Если повторение точное, то все характеристики должны совпадать. Если повторение не точное, а квазиповторение, то имеются отклонения. В этом случае процесс должен характеризоваться некоторыми средними величинами. Формула (8) дает пример среднего фазового сдвига на сопоставляемых ребрах на частоте f .

Владимиров придает важное значение минору U_2 с ненулевым детерминантом.

$$U_2 = \begin{pmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В терминах х-графа это означает, что мы исключили вершины с индексами j и γ , которые совпадают с другими вершинами. Так как теперь нет совпадающих вершин, то в общем случае детерминант U_2 не равен нулю. При этом в каждой антицепи исключено по одному из трех ребер. Элементарными тригонометрическими преобразованиями для $\det U_2$ получаем следующее выражение.

$$\begin{aligned} \det U_2 &= 4v^2(0)v^2(1)G^4(f) \times \\ &\times \sin\left(\frac{\phi(i^1) - \phi(i^2)}{2} - \frac{\phi(k^1) - \phi(k^2)}{2}\right) \sin\left(\frac{\phi(\alpha^1) - \phi(\alpha^2)}{2} - \frac{\phi(\beta^1) - \phi(\beta^2)}{2}\right) \times \\ &\times \exp\left(i\frac{(\phi(\alpha^1) - \phi(i^1)) + (\phi(\alpha^2) - \phi(i^2)) + (\phi(\beta^1) - \phi(k^1)) + (\phi(\beta^2) - \phi(k^2))}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Мы снова видим ряд амплитудных множителей и фазовый множитель. Аргумент этого фазового множителя равен сумме фазовых сдвигов на двух оставшихся ребрах антицепи, усредненный по обоим рассматриваемым антицепям.

Владимиров рассматривает следующее представление детерминанта U_2 в виде произведения двух детерминантов.

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{i^1} & u_{k^1} \\ u_{i^2} & u_{k^2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_{\alpha^1} & u_{\beta^1} \\ u_{\alpha^2} & u_{\beta^2} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Обозначим, стоящие справа матрицы через U_{ik} и $U_{\alpha\beta}$ соответственно. Для них имеем следующие выражения.

$$\det U_{ik} = 2v(0)v(1)G^2(f) \sin\left(\frac{\phi(i^1) - \phi(i^2)}{2} - \frac{\phi(k^1) - \phi(k^2)}{2}\right) \exp\left(-i\frac{\phi(i^1) + \phi(i^2) + \phi(k^1) + \phi(k^2)}{2}\right), \quad (12)$$

$$\det U_{\alpha\beta} = 2v(0)v(1)G^2(f) \sin\left(\frac{\phi(\alpha^1) - \phi(\alpha^2)}{2} - \frac{\phi(\beta^1) - \phi(\beta^2)}{2}\right) \exp\left(i\frac{\phi(\alpha^1) + \phi(\alpha^2) + \phi(\beta^1) + \phi(\beta^2)}{2}\right). \quad (13)$$

Их фазовые аргументы равны полусуммам фаз в начальных и конечных вершинах ребер соответственно.

Владимиров рассматривает следующие преобразования функций в вершинах, которые оставляют инвариантными указанные детерминанты.

$$u'_{is} = C_s^r u_{ir}; \quad u'_{\alpha s} = C_s^{*r} u_{\alpha r}. \quad (14)$$

По аналогии с квантовой теорией коэффициенты этих двух преобразований полагаются комплексно сопряженными. Они удовлетворяют следующему соотношению.

$$C_1^1 C_2^2 - C_2^1 C_1^2 = 1. \quad (15)$$

Преобразования (14) преобразуют друг через друга значения функции в вершинах с одинаковыми номерами, но различными индексами, то есть имеющими одинаковые пространственные координаты, но относящимся к разным антицепям ребер, то есть различным моментам времени.

Аналогично рассмотренные детерминанты оставляют инвариантными следующие преобразования, на коэффициенты которых наложены условия, аналогичные условиям (15).

$$u'_{is} = \tilde{C}_i^k u_{ks}; \quad u'_{\alpha s} = \tilde{C}_{\alpha}^{* \beta} u_{\beta s}. \quad (16)$$

Преобразования (16) преобразуют друг через друга значения функции в вершинах с одинаковыми индексами, но различными номерами, то есть относящимися к одной и той же антицепи ребер, но имеющими различные пространственные координаты.

Рассмотренные преобразования меняют амплитуду и фазу функции u , заданной в вершинах. Значения функции u' после преобразований (16) можно получить с помощью рассмотренных построений за счет произвола в выборе пространственной компоненты функции $v(x)$. Однако, по построению функция u имеет одну и ту же амплитуду во всех вершинах с одинаковой пространственной координатой. Тем самым, не могут быть получены значения функции u' после преобразования (14), если в результате значения функции имеют различную амплитуду в вершинах с одинаковым номером, но различными индексами. Для реализации этих преобразований требуется рассмотрение более сложных конструкций. Например, можно рассмотреть суперпозицию волн на двух различных частотах f_1 и f_2 . Тогда вместо определения 5 рассматривается более сложная функция

$$\tilde{u}_{\alpha^1, f_1, f_2} = v(0)G(f_1) \exp(i\phi(\alpha^1, f_1)) + v(0)G(f_2) \exp(i\phi(\alpha^1, f_2)). \quad (17)$$

Преобразования (14) с условием (15) имеют вид преобразований двухкомпонентных спиноров. На этом основании Владимиров делает предположение, что в модели получены преобразы двухкомпонентных спиноров. Сами спиноры являются геометрическими объектами в континуальном пространстве-времени и могут быть получены только после соответствующего предельного перехода к континуальному пространству-времени. Преобразования (16) Владимиров не рассматривает. Наличие двух вариантов преобразований (14) и (16) может соответствовать спинорным преобразованиям в импульсном и координатном пространствах соответственно.

Построение преобразов геометрических объектов: спиноров, векторов, тензоров является нетривиальной задачей в любой дискретной модели. Все возможности заслуживают тщательного изучения. В частности вариант, предложенный Владимировым, что должно явиться предметом дальнейшего исследования.

Заключение

Рассмотренные построения выглядят весьма громоздкими с точки зрения анализа простейших фазовых соотношений в x -графе. Однако, целью этих построений не была разработка эффективного инструмента анализа x -графа. Целью является нахождение соответствия с моделью

Владимирова. Сделанные построения позволяют воспользоваться результатами Владимирова и его учеников, просто перевести их на язык x -графа, а не получать заново.

Например, в настоящей работе так рассматривается прообраз двухкомпонентного спинора. Рассмотренное получение прообразов спиноров весьма примечательно. Оно естественно для бинарных систем комплексных отношений, но не очевидно в модели x -графа. Вызывает сомнение возможность их получения иным путем в модели x -графа. Если в ходе дальнейшего исследования спин фундаментальных фермионов будет описан именно этими величинами, то это будет ярким примером эффективности бинарных систем комплексных отношений, как инструмента физической интерпретации топологических структур x -графа.

Автор надеется, что на этом пути в некотором пределе может быть получено соответствие модели x -графа и квантового описания. При этом, громоздкость построений может быть связана с особенностями квантового описания. По мнению автора, особенности квантового описания, порождающие дискуссии все время его существования, связаны с тем, что дискретный микромир описывается в терминах континуального пространства-времени. Дискретный микромир, описанный на естественном для него дискретном языке, очень прост.

Автор не претендует на нахождение единственного физического смысла бинарных структур комплексных отношений. Могут существовать и другие модели, в которых могут быть построены указанные структуры.

Автор выражает свою глубокую благодарность профессору Владимиру, чьи исследования на протяжении многих лет являлись для автора вдохновляющим примером.

Список литературы

1. Владимиров Ю.С. Природа пространства и времени. Антология идей. М.: ЛЕНАНД, 2015. 400 с.
2. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Relativistic algebra of space-time and algebroid dynamics. *Gravitation and Cosmology*. 2016; 22, no. 3: pp. 230–233. (arXiv: 1612.02455).
3. Ефремов А.П. Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. М.: изд. РУДН, 2005. 375 с.
4. Владимиров Ю.С. Метафизика и фундаментальная физика. Кн. 3. Реляционные основания искомой парадигмы. М.: ЛЕНАНД, 2018. 256 с.
5. Penrose R., MacCallum M.A.H. Twistor theory: An approach to the quantisation of fields and space-time. *Physics Reports*. 1973; 6 (4): pp. 241–315.
6. 't Hooft G. Quantum gravity: a fundamental problem and some radical ideas. *Recent Development in Gravitation. Proceedings of the 1978 Cargese Summer Institute*. Plenum, New York/London. 1979: pp. 323–345.
7. Myrheim J. Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538, 1978.
8. Surya S. The causal set approach to quantum gravity. arXiv: 1903.11544.
9. Круглый А.Л. Идеи, лежащие в основании гипотезы причинностного множества в квантовой гравитации // Метафизика. 2014. № 2. С. 126–145.
10. Круглый А. Л. Учет конечных объемов информации // Метафизика. 2018. № 1. С. 116–122.
11. Krugly A.L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph // Вестник Университета Дружбы Народов. Серия "Математика. Информатика. Физика". 2014. № 1. С. 124–138. (arXiv: 1112.1064 [gr-qc]).
12. Krugly A.L. A particular case of a sequential growth of an x -graph // Вестник РУДН, Серия "Математика. Информатика. Физика". 2015. № 3. С. 61–73.
13. Finkelstein D. "Superconducting" causal net. *International Journal of Theoretical Physics*. 1988; 27: pp. 473–519.
14. Круглый А.Л., Церковников И.А. Применение спектрального анализа для поиска квазипериодических структур при последовательном росте ориентированного ациклического диадического графа // II Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектроники. РУДН. Москва. 2013. С. 64–68.

References

1. Vladimirov Ju.S. *The nature of space and time. Anthology of ideas*. Moscow, LELAND Publ., 2015. 400 p.
2. Kassandrov V.V., Rizcallah J.A. Relativistic algebra of space-time and algebrodynamics. *Gravitation and Cosmology*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 230–233. (arXiv: 1612.02455).
3. Efremov A.P. *Quaternion spaces, frames of references and fields*. Moscow, RUDN University Publ., 2005. 375 p.
4. Vladimirov Ju.S. *Metaphysics and fundamental physics. 3. Relational foundations of desired paradigm*. Moscow, LELAND Publ., 2018. 256 p.
5. Penrose R., MacCallum M.A.H. Twistor theory: An approach to the quantisation of fields and space-time. *Physics Reports*, 1973, 6 (4), pp. 241–315.
6. 't Hooft G. Quantum gravity: a fundamental problem and some radical ideas. *Recent Development in Gravitation. Proceedings of the 1978 Cargese Summer Institute*. Plenum, New York/London, 1979, pp. 323–345.
7. Myrheim J. Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538, 1978.
8. Surya S. The causal set approach to quantum gravity. arXiv: 1903.11544.
9. Krugly A.L. Basic ideas of causal set hypothesis in quantum gravity. *Metaphysics*, 2014, no. 2, pp. 126–145.
10. Krugly A.L. Taking into account the finite amount of information. *Metaphysics*, 2018, no. 1, pp. 116–122.
11. Krugly A.L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics. Information sciences. Physics*, 2014, no. 1, pp. 124–138. (arXiv: 1112.1064 [gr-qc]).
12. Krugly A.L. A particular case of a sequential growth of an x-graph. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics. Information sciences. Physics*, 2015, no. 3, pp. 61–73.
13. Finkelstein D. "Superconducting" causal net. *International Journal of Theoretical Physics*, 1988, 27, pp. 473–519.
14. Krugly A.L., Tserkovnikov I.A. The application of spectrum analysis to the search of quasiperiodic structures in the sequential growth of a directed acyclic dyadic graph. *IL All-Russia conference on problems in Particle Physics, Plasma Physics and Condensed Matter, Optoelectronics*, 2013, pp. 64–68.

Авторы

Круглый Алексей Львович, к. ф.-м. н., инженер, отдел прикладной математики и информатики, ФГУ ФНИЦ Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Нахимовский пр-т, 36, к. 1., г. Москва, 117218, Россия.
E-mail: akrugly@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Круглый А. Л. Дискретная модель пространства-времени и бинарная предгеометрия Владимиров // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 2. С. 15–27.

Authors

Krugly Alexej L'vovich, dr., engineer, Federal State Institution "Scientific Research Institute for System Analyses of the Russian Academy of Science", Nahimovskiy pr., 36, k. 1, Moscow, 117218, Russia.
E-mail: akrugly@mail.ru

Please cite this article in English as:

Krugly A.L. The discrete model of spacetime and the binary pregeometry of Vladimirov. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 2, pp. 15–27.