УДК 530.12, 514.764.22, 514.765.2

О ПОЧТИ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ*

Клепиков П. Н.[a,1], Оскорбин Д. Н.[a,2], Родионов Е. Д.[a,3]

[a] Алтайский государственный университет, г. Барнаул, 656049, Россия.

Данная статья является небольшим обзором недавних исследований по различным обобщениям теории многообразий Эйнштейна, а также их классификации в случае локально однородных пространств малой размерности.

Ключевые слова: эйнштеново подобные (псевдо)римановы многообразия, солитоны Риччи, конформно плоские многообразия, изотропные тензора Вейля и Схоутена–Вейля, тензор Риччи.

ON ALMOST EINSTEIN LOCALLY HOMOGENEOUS (PSEUDO)RIEMANNIAN MANIFOLDS

Klepikov P. N.[a,1], Oskorbin D. N.[a,2], Rodionov E. D.[a,3]

[a] Altai State University, Barnaul, 656049, Russia.

This article is a small review of recent studies on various generalizations of the theory of Einstein manifolds, as well as their classification in the case of locally homogeneous spaces of small dimension.

Keywords: Einstein-like (pseudo)Riemannian manifolds, Ricci solitons, conformally flat manifolds, isotropic Weyl and Schouten–Weyl tensors, Ricci tensor.

PACS: 02.40.Ky
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.4.48-65

1. Эйнштеново подобные (псевдо)римановы многообразия

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности n; X, Y, Z, V — векторные поля на M. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через

$$R(X,Y)Z = [\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,Y]}Z$$

тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r, оператор Риччи ρ и скалярную кривизну s определим как

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(V \to R(X,V)Y), \quad g(\rho(X), Y) = r(X,Y), \quad s = \mathrm{tr}(\rho).$$

Группу Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой будем называть метрической группой Ли, а соответствующую алгебру Ли со скалярным произведением — метрической алгеброй Ли.

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие называется многообразием Эйнштейна, если выполнено уравнение

$$r = \Lambda \cdot g,$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

[1] E-mail: klepikov.math@gmail.com
[2] E-mail: oskorbin@yandex.ru
[3] E-mail: edr2002@mail.ru

где Λ — некоторая константа.

(Псевдо)римановы многообразия с метриками, обобщающими условия Эйнштейна, исследовались в работах многих математиков (см., обзоры [1–5]). Одними из таких обобщений являются эйнштейново подобные многообразия в смысле А. Грея [1].

Определение 2. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{A}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y,Z) + \nabla_Y r(Z,X) + \nabla_Z r(X,Y) = 0.$$

Определение 3. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{B}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y,Z) = \nabla_Y r(X,Z).$$

Определение 4. Будем говорить, что (псевдо)риманово многообразие (M, g) принадлежит к классу $\mathcal{C}^{\perp}$, если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено

$$\nabla_X r(Y,Z) = \frac{1}{(n+2)(n-1)}\left(n(Xs)g(Y,Z) + \frac{1}{2}(n-2)\big((Ys)g(X,Z) + (Zs)g(X,Y)\big)\right).$$

Условие, определяющее класс $\mathcal{A}$, также известно как условие Киллинга, класс $\mathcal{B}$ — условие Кодацци. Про класс $\mathcal{C}^{\perp}$ известно следующее: “Данному условию удовлетворяет любое двумерное риманово многообразие, однако мне не известно есть ли в данном классе другие интересные многообразия” (цитата из [1]). В дальнейшем три данных класса многообразий будут обозначаться словосочетанием “эйнштейново подобные”.

Многообразия Эйнштейна и их прямые произведения входят в классы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}^{\perp}$. Кроме них класс $\mathcal{B}$ содержит в себе локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и, в случае постоянной скалярной кривизны, конформно плоские многообразия ($W = 0$, W — тензор Вейля), а также другие классы (псевдо)римановых многообразий (см., например, [2]).

Известные следующие результаты, касающиеся глобальной геометрии римановых многообразий из классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (см. [1]).

Теорема 1. *Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу $\mathcal{A}$, и пусть секционная кривизна M отрицательна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.*

Теорема 2. *Пусть M — риманово многообразие, принадлежащее классу $\mathcal{B}$, и пусть секционная кривизна M положительна. Тогда кривизна Риччи не имеет минимумов и максимумов. В частности, если M компактно, тогда M обязано быть многообразием Эйнштейна.*

В случае однородных многообразий известны некоторые результаты для многообразий малой размерности. Так, например, получены следующие результаты относительно однородных эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразий.

В трехмерном случае классифицированы однородные лоренцевы многообразия с эйнштейново подобными метриками [6]. В частности, в данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Трехмерная связная, односвязная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой принадлежит классу $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда она является естественно редуктивной.*

Теорема 4. *Трехмерная связная, односвязная группа Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой g принадлежит классу $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда либо (G, g) симметрична, либо ее метрическая алгебра Ли содержится в следующем списке:*

1. $[e_1, e_2] = \alpha e_1$, $[e_1, e_3] = -\alpha e_1$, $[e_2, e_3] = \alpha e_2 + \alpha e_3$, $\alpha \neq 0$;

2. $[e_1, e_2] = \pm\sqrt{3}\beta e_2 - \beta e_3$, $[e_1, e_3] = -\beta e_2 \pm \sqrt{3}\beta e_3$, $[e_2, e_3] = -2\beta e_1$, $\beta \neq 0$;

3. $[e_1, e_2] = -\alpha e_1 - \beta e_2 - \beta e_3$, $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2 + \beta e_3$, $[e_2, e_3] = \delta e_2 + \delta e_3$, $\alpha\delta(\alpha \pm \delta) \neq 0$.

Трехмерные локально однородные лоренцевы пространства с нетривиальной подгруппой изотропии принадлежат сразу трем классам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}^{\perp}$, т.к. они являются локально симметричными [6].

В четырехмерном случае также известен ряд результатов. Например, Воронов Д.С., Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. получили классификацию четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой, принадлежащих классу $\mathcal{B}$ [7–11]. В случае псевдоримановой метрики эйнштейново подобные однородные пространства были классифицированы Дж. Кальварузо, А. Заемом и А. Хаджи-Бадали, П.Н. Клепиковым в работах [12–16].

В качестве примера приведем следующий результат из работы [16].

Теорема 5. *Пусть (G, g) — четырехмерная метрическая группа Ли, принадлежащая классу $\mathcal{B}$, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в таблице 1 (в данной таблице δ_i, $\varepsilon_i = \pm 1$).*

2. Солитоны Риччи на эйнштейново подобных (псевдо)римановых многообразиях

Другим обобщением многообразий Эйнштейна являются солитоны Риччи, впервые рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [17].

Определение 5. (Псевдо)риманово многообразие (M, g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g,$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
Если $M = G/H$ — однородное пространство с инвариантной (псевдо)римановой метрикой g, тогда $(G/H, g)$ — *однородный солитон Риччи*. Если кроме того векторное поле X является G-инвариантным, тогда $(G/H, g)$ — *однородный инвариантный солитон Риччи*.

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [17]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g\,(t) = \sigma\,(t)\,\psi_t^*\,(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r\,(g)\,, \quad g\,(0) = g_0,$$

где $r\,(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma\,(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma\,(0) = 1$ и $\psi_0 = \mathrm{Id}_M$.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [3]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [18]).

Определение 6. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или прямому произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

Если однородный риманов солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [19]) и, по теореме Алексеевского-Кимельфельда, многообразие является плоским (см. [20]). В случае

Таблица 1. Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли, принадлежащих классу $\mathcal{B}$, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

№	Таблица умножения	Метрический тензор
1	$[e_2,e_3]=3\alpha_1e_3$, $[e_2,e_4]=-\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3+\alpha_1e_4$, $\alpha_1>0$	
2	$[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_2$, $[e_1,e_3]=\frac{3\varepsilon_1+\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3-\frac{\delta_1\sqrt{5}+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4$, $\alpha_1>0$	
3	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+\alpha_3e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\geqslant 0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+2\alpha_2^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $\alpha_3^2+\left(2\alpha_1^2-2\alpha_2^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3$
4	$[e_1,e_2]=-e_1+e_2$, $[e_1,e_3]=e_3$, $[e_2,e_3]=e_3$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3e_2+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3\neq 0$	$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3$
5	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\alpha_1e_2+\alpha_2e_3$, $[e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_1}e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0$	
6	$[e_1,e_4]=\alpha_1e_1+(\alpha_2+\alpha_3)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2-\alpha_3)e_1+\alpha_1e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_3>0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3-2\alpha_3^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $\alpha_2^2+\left(2\alpha_1^2+2\alpha_3^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$	$\langle e_1,e_1\rangle=1$, $\langle e_2,e_2\rangle=-1$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3$
7	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+1)e_1+(\alpha_2-1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_2+1)e_1+(\alpha_1-1)e_2$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $\alpha_1\neq 0$, $2\alpha_1^2\varepsilon_3+1\neq 0$, $2\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3\neq 0$	
8	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\frac{2\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_2+e_3$, $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3$, $[e_2,e_4]=\frac{2\alpha_1\alpha_2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2+e_3$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq 0$, $2\alpha_1^2+\varepsilon_3\neq 0$	
9	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\alpha_1e_2$, $[e_2,e_4]=-\alpha_1e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2>0$	$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3$
10	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{6}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{6}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\neq 0$	$\langle e_1,e_1\rangle=1$, $\langle e_2,e_2\rangle=-1$, $\langle e_3,e_4\rangle=-1$
11	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2$, $[e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2$, $[e_3,e_4]=\alpha_2e_3$, $\alpha_2>0$	$\langle e_1,e_1\rangle=1$, $\langle e_2,e_2\rangle=-1$, $\langle e_3,e_4\rangle=1$
12	$[e_1,e_3]=-\sqrt{3}\alpha_1e_3+\alpha_1e_4$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3+\sqrt{3}\alpha_1e_4$, $[e_3,e_4]=2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1e_1$, $\alpha_1>0$	$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2$, $\langle e_3,e_3\rangle=1$, $\langle e_4,e_4\rangle=-1$
13	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_2,e_3]=-\alpha_1e_1+\left(\alpha_1-\sqrt{2}\right)e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_1$, $[e_1,e_4]=\left(\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $[e_3,e_4]=\alpha_1e_1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3$, $\alpha_2\neq 0$	$\langle e_1,e_2\rangle=-1$, $\langle e_3,e_4\rangle=1$
14	$[e_1,e_2]=\alpha_1e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3$, $[e_2,e_3]=\alpha_2e_1$, $[e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1$, $[e_2,e_4]=\alpha_3e_1$, $[e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3$, $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2>0$, $\alpha_3\neq 0$	$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2$
15	$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1$, $[e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3$, $[e_1,e_4]=\alpha_1e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_2e_3+\frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4$, $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_1\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_2\neq 0$, $6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$	
16	$[e_1,e_2]=-\frac{\sqrt{6}}{3}e_1$, $[e_2,e_3]=\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3$, $[e_1,e_4]=\frac{\sqrt{6}}{6}e_3$, $[e_2,e_4]=\alpha_1e_1+\alpha_2e_3+\frac{\sqrt{6}}{3}e_4$, $\alpha_1>0$, $\alpha_2\neq 0$	$\langle e_1,e_2\rangle=-1$, $\langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2$

стягивающегося однородного риманова солитона из работ [17, 21] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный риманов солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [22]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные римановы солитоны Риччи изометричны солвсолитонам.

В общем случае задача изучения, исследования и классификации солитонов Риччи на многообразиях является довольно сложной. Поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на размерность многообразия, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи.

Одним из естественных ограничений является предположение, что рассматриваемое многообразие является однородным пространством и, в частности, группой Ли. В этом направлении известен ряд результатов. Например (см. [4, 23, 24])

Теорема 6. *На локально однородных римановых многообразиях размерности не более четырех, не существует нетривиальных однородных инвариантных солитонов Риччи.*

Аналогичный факт известен для унимодулярных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой любой конечной размерности [4]. В связи с этим возникает следующий

Вопрос. *Существуют ли нетривиальные однородные инвариантные римановы солитоны Риччи в случае размерности более четырех?*

В случае локально однородных псевдоримановых многообразий однородные инвариантные солитоны Риччи существуют уже в малых размерностях. Например, в работе [24] получена

Теорема 7. *Пусть (M, g) — четырехмерное локально однородное псевдориманово многообразие с трехмерной подгруппой изотропии, которое является нетривиальным однородным инвариантным солитоном Риччи. Тогда соответствующая пара алгебра Ли группы изометрий/алгебра Ли подгруппы изотропии вместе с инвариантным скалярным произведением содержится в следующем списке:*

1. $[v_1, v_2] = -v_2$, $[v_1, v_3] = v_3$, $[v_1, u_2] = u_2$, $[v_1, u_4] = -u_4$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_4$, $[v_3, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_4] = u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_3 + u_2$, $[u_3, u_4] = -pv_2 - u_4$, $\langle u_1, u_3\rangle = a$, $\langle u_2, u_4\rangle = a$, $\langle u_3, u_3\rangle = b$, $p \neq 0$, $a \neq 0$;
2. $[v_1, v_2] = -v_3$, $[v_1, v_3] = v_2$, $[v_1, u_2] = u_4$, $[v_1, u_4] = -u_2$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_3] = u_4$, $[v_3, u_4] = -u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_2 + u_2$, $[u_3, u_4] = pv_3 - u_4$, $\langle u_1, u_3\rangle = a$, $\langle u_2, u_2\rangle = a$, $\langle u_3, u_3\rangle = b$, $\langle u_4, u_4\rangle = a$, $p \neq 0$, $a \neq 0$.

Здесь $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис подалгебры изотропии, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис дополнения.

Другим важным примером являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [25]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [26]).

Определение 7. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если в соответствующей алгебре Ли выполняется уравнение:

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D, \tag{1}$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — оператор дифференцирования алгебры Ли группы G.

Ранее конформно плоские солитоны Риччи на метрических группах Ли изучались в работе [27], где была получена классификация конформно плоских однородных инвариантных солитонов Риччи в четырехмерном случае; в работе [28], в которой получены некоторые результаты о конформно плоских солитонах Риччи в случае римановой метрики, а также в работах [29, 30] при дополнительном условии диагонализируемости оператора Риччи.

Представляется актуальным исследовать пересечение класса эйнштейново подобных многообразий и класса многообразий, которые являются солитонами Риччи, т.к. оба данных класса обобщают условие Эйнштейна. В этом направлении известен следующий результат (см. [31]).

Теорема 8. *Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи, принадлежащая к классу $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий. Тогда солитон Риччи обязательно устойчив и оператор Риччи недиагонализируем, имеет единственное собственное значение равное нулю и его жорданова форма имеет блоки размера только 1×1 и 2×2.*

Из данной теоремы в частности следует

Теорема 9. *Пусть (G, g) — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи. Если (G, g) принадлежит к классу $\mathcal{B}$ эйнштейново подобных многообразий, то алгебраический солитон Риччи является тривиальным.*

При более сильном ограничении, что метрическая группа Ли является конформно плоской, известен следующий результат (см. [31]).

Теорема 10. *Если зафиксировать сигнатуру псевдоримановой метрики, а также действительное число* $c_{n-1\,n}^{n} \geqslant 0$ *(определяющее ковариантную производную тензора Риччи), то существует не более двух конформно плоских метрических алгебр Ли (с точностью до изометрии), которые являются нетривиальными алгебраическими солитонами Риччи; причем одна из них имеет неотрицательную кривизну Риччи, а вторая — неположительную.*

Заметим, что авторами проводились исследования и не однородных солитонов Риччи с ограничениями на строение лоренцева многообразия. В частности, предполагалось, что лоренцево многообразие является многообразием Уокера или k-симметрическим пространством. В результате чего были доказаны следующие теоремы.

Теорема 11. [32, 33] *Уравнение солитона Риччи локально разрешимо в классе* 2*-симметрических лоренцевых многообразий размерности 4 и 5 для любой константы* Λ.

Теорема 12. [34] *Пусть* (M, g) *— четырехмерное конформно плоское лоренцево многообразие Уокера с метрикой плоской волны. Тогда уравнение солитона Риччи локально разрешимо для любой константы* Λ.

Теорема 13. [34] *Пусть* (M, g) *— трехмерное лоренцево многообразие Уокера. Тогда уравнение солитона Риччи локально разрешимо для любой константы* Λ.

Теорема 14. [35] *Уравнение солитона Риччи локально разрешимо в классе* 3*-симметрических лоренцевых многообразий размерности* $n \geqslant 2$ *для любой константы* Λ.

3. Конформно плоские (псевдо)римановы многообразия

Многомерным обобщением двумерных многообразий с локально изотермической координатной системой являются конформно плоские римановые многообразия — важный подкласс класса римановых многообразий с гармоническим тензором Вейля. Исследованию конформно плоских римановых многообразий посвящены работы многих математиков: Н. Кюйпера, Д.В. Алексеевского и Б.Н. Кимельфельда, Г. Такаги, Е.Д. Родионова и В.В. Славского. Хотя задача описания конформно плоских многообразий в полном объеме и не решена, имеются важные классы римановых пространств, для которых дан исчерпывающий ответ [5, 36–38]. Например, известна классификация конформно плоских однородных римановых многообразий [36, 37].

Теорема 15. *Всякое связное односвязное конформно плоское однородное риманово многообразие гомотетично одному из следующих римановых многообразий:*

- E^n *— n-мерное евклидово пространство;*
- S^n *— n-мерная сфера, у которой при* $n \geqslant 2$ *кривизна в любом двумерном направлении равна 1;*
- Λ^n *— n-мерное пространство Лобачевского, у которого при* $n \geqslant 2$ *кривизна в любом двумерном направлении равна -1;*
- $\Lambda^n \times E^1$;
- $\Lambda^n \times S^m$.

В случае постоянства скалярной кривизны конформно плоские (псевдо)римановы многообразия содержатся в классе $\mathfrak{B}$ эйнштейново подобных многообразий по А. Грею [1].

Отметим, однако, что задача классификации однородных конформно плоских псевдоримановых многообразий все еще не решена даже для лоренцевых многообразий. Хотя известна следующая [39]

Теорема 16. *Пусть M_q^n — $n(\geqslant 3)$-мерное конформно плоское однородное псевдориманово многообразие, оператор Риччи которого диагонализируем. Тогда M_q^n локально изометрично одному из следующих многообразий:*

- *псевдориманова пространственная форма постоянной кривизны;*
- *произведение m-мерной пространственной формы постоянной кривизны $k \neq 0$ и $(n-m)$-мерного псевдориманова многообразия постоянной кривизны $-k$, где $2 \leqslant m \leqslant n-2$;*
- *произведение $(n-1)$-мерного псевдориманова многообразия индекса $q-1$ (соответственно q) постоянной кривизны $k \neq 0$ и одномерного лоренцева (соответственно риманова) многообразия.*

В случае же недиагонализируемого оператора Риччи классификация известна лишь в малых размерностях. Например, в работе [12] получена классификация четырехмерных конформно плоских однородных псевдоримановых многообразий. В частности, в данной работе получен следующий результат.

Теорема 17. *Пусть (M, g) — четырехмерное конформно плоское локально однородное псевдориманово многообразие с трехмерной подгруппой изотропии, оператор Риччи которого недиагонализируем. Тогда если (M, g) не локально симметрично, то соответствующая ей пара алгебра Ли группы изометрий/алгебра Ли подгруппы изотропии вместе с инвариантным скалярным произведением содержится в следующем списке:*

1. $[v_1, v_2] = -v_2$, $[v_1, v_3] = v_3$, $[v_1, u_2] = u_2$, $[v_1, u_4] = -u_4$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_4$, $[v_3, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_4] = u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_3 + u_2$, $[u_3, u_4] = -pv_2 - u_4$, $\langle u_1, u_3\rangle = a$, $\langle u_2, u_4\rangle = a$, $\langle u_3, u_3\rangle = b$, $p \neq 0$, $a \neq 0$;
2. $[v_1, v_2] = -v_3$, $[v_1, v_3] = v_2$, $[v_1, u_2] = u_4$, $[v_1, u_4] = -u_2$, $[v_2, u_2] = u_1$, $[v_2, u_3] = -u_2$, $[v_3, u_3] = u_4$, $[v_3, u_4] = -u_1$, $[u_1, u_3] = u_1$, $[u_2, u_3] = pv_2 + u_2$, $[u_3, u_4] = pv_3 - u_4$, $\langle u_1, u_3\rangle = a$, $\langle u_2, u_2\rangle = a$, $\langle u_3, u_3\rangle = b$, $\langle u_4, u_4\rangle = a$, $p \neq 0$, $a \neq 0$.

Здесь $\{v_1, v_2, v_3\}$ — базис подалгебры изотропии, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ — базис дополнения.

В случае не локально однородных многообразий ситуация представляется более сложной, хотя известен ряд результатов о строении и свойствах конформно плоских римановых многообразий. Известны результаты, которые связывают конформно плоские метрики ограниченной кривизны с геометрией лоренцева пространства и пространства Лобачевского. Эта связь следует из того, что группа мебиусовых преобразований изоморфна группе Лоренца преобразований псевдоевклидова пространства Минковского, а также из того факта, что имеется непосредственное погружение конформно плоской метрики в изотропный конус пространства Минковского (см. подробнее, [5]). Используя данную конструкцию, а также конкретные геометрические построения, авторам удалось доказать серию теорем. Приведем сначала необходимые определения и факты.

Выражение вида $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$, где $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ — положительная функция, определяет конформно плоскую метрику в $\mathbb{R}^n$ с одномерной кривизной в направлении единичного вектора ξ равной

$$K(f, x, \xi) = f(x)\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f(x)|^2.$$

При $n \neq 2$ конформно плоская метрика имеет постоянную одномерную кривизну, если и только если функция $f(x)$ имеет вид квадратичного полинома $f(x) = a\|x\|^2 + \sqrt{2}(x, \mathbf{b}) + c$, при этом одномерная кривизна вычисляется по формуле $K = -\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$, где $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{b}\|^2 - 2ac$ есть скалярный квадрат вектора $\mathbf{w} = [\mathbf{b}, a, c] \in M^{n+2}$ в псевдоевклидовом пространстве M^{n+2}, снабженном скалярным произведением $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) - a_1c_2 - a_2c_1$.

Рассмотрим множество

$$H_k = \left\{ \mathbf{w} = [\mathbf{b}, a, c] \in M^{n+2} : \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = -\frac{1}{k}, a > 0, c > 0 \right\},$$

тогда H_k — положительная пола двуполостного гиперболоида (вместе с индуцированной метрикой из M^{n+2} это пространство Лобачевского кривизны $(-k)$).

Сопоставим произвольной конформно плоской метрике $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ отображение

$$P_f(x,k) = \frac{1}{2f}\left[\frac{2f\nabla f - x\|\nabla f\|^2}{k} - x, \frac{\|\nabla f\|^2+1}{k\sqrt{2}}, \frac{\left(2f\nabla f - x\|\nabla f\|^2\right)^2}{k\|\nabla f\|^2\sqrt{2}} + \frac{\|x\|^2}{\sqrt{2}}\right] \in H_k,$$

где $k > 0$ — фиксированная константа.

Пусть $f \in C^{1,1}(\overline{\mathbb{R}^n})$, $f(x) > 0$ и $|K(f,x,\xi)| \leqslant \frac{k}{2}$, тогда n-мерная поверхность $P(f) = \{P_f(x,k) : x \in \mathbb{R}^n\}$ — компактная, без точек на абсолюте, выпуклая замкнутая поверхность в пространстве Лобачевского. И обратно, по компактной выпуклой поверхности $P(f) \subset H_k$ можно восстановить соответствующую конформно плоскую метрику ограниченной кривизны. Обозначим через $P^c(f) \subset H_k$ выпуклое подмножество, ограниченное поверхностью $P(f)$. Распространяя указанное соответствие между выпуклыми множествами и функциями на произвольные замкнутые выпуклые подмножества H_k (не обязательно ограниченные), получим со ответствующий класс функций $BK(\overline{\mathbb{R}^n}, k)$.

Теорема 18. [40] *Пусть имеются две конформно плоские метрики ограниченной одномерной кривизны f_1, $f_2 \in BK(\overline{\mathbb{R}^n}, k)$. Тогда*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x), \forall x \in \overline{\mathbb{R}^n} \quad \Leftrightarrow \quad P^c(f_1) \supseteq P^c(f_2).$$

Теорема 18. [41] *Пусть дана последовательность $ds_n^2 = \frac{dx^2}{f_n^2(x)}$ конформно плоских метрик в $\mathbb{R}^n$ таких, что $f_n > 0$, $f_n \in C^2$ и одномерная кривизна метрик ds_n^2 равномерно ограничена сверху и снизу. Тогда если f_n поточечно сходится к функции f, то $f \in C^{1,1}$ в области где она положительна, т.е. f дифференцируема и её производные являются локально липшицевыми.*

Теорема 19. [42] *Пусть (M^n, g) — конформно плоское риманово многообразие, т.е. $W = 0$. Рассмотрим ортобазис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, в котором диагонализируемы операторы Риччи и одномерной кривизны. Тогда в базисе $\{e_i \wedge e_j\}_{i<j}$ диагонализируем оператор кривизны $\mathcal{R} : \Lambda^2 M^n \to \Lambda^2 M^n$, причем спектр оператора $\mathcal{R}$ есть $\{K_{ij}\}_{i<j}$, где $K_{ij} = K_\sigma(e_i \wedge e_j)$.*

Теорема 20. [40] *Конформно плоская метрика ds^2 в $\mathbb{R}^n$ имеет неотрицательную одномерную кривизну в только и только том случае, когда она имеет вид $ds^2 = \frac{dx^2}{g^4(x)}$, где положительная функция $g(x)$ удовлетворяет трехточечному свойству*

$$g(x) \leqslant g(x_1)\frac{|x_2 - x|}{|x_2 - x_1|} + g(x_2)\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x_1|}$$

для любых трех точек x, x_1, x_2 из $\mathbb{R}^n$ таких, что точка x принадлежит дуге $[x_1, x_2]$ окружности, проходящей через три точки x, x_1, x_2. Здесь $|b - a|$ — обычное расстояние между точками a, b в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 21. [43] *Если конформно плоская метрика $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ на сфере $\mathbb{S}^n$ имеет положительную одномерную кривизну, тогда $H_f : x \to x - 2f(x)\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ является диффеоморфизмом на $\mathbb{S}^n$ и полярная конформно плоская метрика $ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)}$ (где $f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f|^2}$) также имеет положительную одномерную кривизну.*

4. Псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля

Кроме конформно плоских многообразий можно рассматривать многообразия, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. В этом случае такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля. Данные пространства тесно связаны с локально конформно однородными пространствами [5]. В данной работе изучаются конформно киллинговы векторные поля, приводятся условия интегрируемости соответствующей системы дифференциальных уравнений и, в частности, доказывается

Теорема 22. *Пусть (M, g) — локально конформно однородное связное пространство, и пусть хотя бы в одной точке имеем $\|W\|^2 \neq 0$ ($\|SW\|^2 \neq 0$ при $\dim M = 3$). Тогда (M, g) конформно эквивалентно локально однородному пространству.*

В случае $\|W\|^2 = 0$ ($\|SW\|^2 = 0$ при $\dim M = 3$) подобную конформную деформацию построить не удалось, таким образом возникает задача об изучении (псевдо)римановых локально однородных и локально конформно однородных многообразий, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам не равен нулю.

Определение 8. Тензор Вейля W будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|W\|^2 = 0$), а сам тензор не равен нулю ($W \neq 0$).

Отметим, что в случае римановой метрики квадрат длины тензора в некотором ортонормированном базисе представляет собой сумму квадратов всех компонент, и равен нулю тогда и только тогда, когда сам тензор тривиален. Поэтому естественно рассматривать лишь случай псевдоримановой метрики. В трехмерном случае тензор Вейля тривиален, роль его аналога играет тензор Схоутена-Вейля (тензор Коттона). В [44, 45] исследовался тензор Схоутена-Вейля для левоинвариантной лоренцевой метрики на группах Ли размерности 3, что является продолжением исследований Дж. Милнора [46] по левоинвариантным римановым метрикам на трехмерных группах Ли.

При достаточно малой размерности локально однородного (псевдо)риманова пространства становится возможным применение систем компьютерной математики для изучения локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Вейля. Например, с помощью классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий (см. например [47]) можно доказать следующую теорему (см. [48], где содержится частичная классификация).

Теорема 23. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(M = G/H, g)$ имеет изотропный тензор Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G содержится в таблицах 2–4 (вид инвариантного метрического тензора приведен в таблице 5).*

Отметим, что подобную классификацию можно получить и для условия $\|SW\|^2 = 0$.

Приведенный список литературы тесным образом связан с конкретной проблематикой нашего рассмотрения и никоим образом не претендует на полноту. Многие близкие вопросы также не были затронуты, поскольку беглое упоминание серии смежных по тематике работ было бы, на наш взгляд, слишком поверхностным и не вполне оправданным.

Авторы благодарны своим коллегам Клепиковой С.В., Славскому В.В., Хромовой О.П. и Эрнсту И.В. — соавторам приведенных статей и результатов данной работы.

Таблица 2. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
$1.1^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$	1	$\alpha_{22}=\frac{\alpha_{13}^2(13\pm3\sqrt{17})+8\alpha_{24}^2}{8\alpha_{44}}$
$1.1^2.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=2u_2,$ $[u_3,u_4]=u_3$	3	$\alpha_{22}=\frac{2\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2(13\pm3\sqrt{17})}{2\alpha_{44}}\neq0$
$1.3^1.1$	$[e_1,u_1]=e_1,\ [e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_3]=u_3,$ $[u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4$	5	$\alpha_{44}=0,\ \alpha_{33}^2+\alpha_{34}^2\neq0$
$1.3^1.2$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,$ $\lambda\in[-1,1]$	5	$\alpha_{44}\neq0,\ \lambda\neq0$
$1.3^1.3$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$	5	—
$1.3^1.4$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-(1+\lambda^2)e_1+2\lambda u_1+(1+\lambda^2)u_2,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ \lambda\geqslant0$	5	$\alpha_{44}\neq0$
$1.3^1.5$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{\lambda^2+\mu}{\mu-1}e_1+\frac{1+\lambda^2}{\mu-1}u_2,$ $[u_1,u_4]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_3]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,$ $[u_2,u_4]=-\mu e_1+(\mu+1)u_2,\ \lambda\geqslant0,\ \mu\neq1$	5	$(\mu-1)(2\lambda\alpha_{34}-\mu\alpha_{33})\neq$ $\neq\alpha_{44}(\lambda^2+\mu)$
$1.3^1.6$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$	5	—
$1.3^1.7$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1-\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_1,u_4]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,\ [u_2,u_3]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1+\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}u_2,\ \lambda\neq-1$	5	$\alpha_{44}\neq\lambda\alpha_{33}-2\alpha_{34}$
$1.3^1.8$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=-u_3$	5	$\alpha_{33}\neq0$
$1.3^1.9$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=\lambda u_1,\ [u_2,u_4]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_2,$ $[u_3,u_4]=-\lambda u_3$	5	$\alpha_{33}\neq0,\ \lambda\neq-1,\ \lambda\neq0$
$1.3^1.10$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$	5	—
$1.3^1.11$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=-u_1,\ [u_2,u_4]=e_1,\ [u_3,u_4]=e_1+u_3$	5	—
$1.3^1.12$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\mu u_1,$ $[u_2,u_4]=-\lambda\mu e_1+(\lambda+\mu)u_2,\ [u_3,u_4]=(1-\mu)u_3$	5	$\alpha_{33}\neq0,\ \mu\neq\frac{1}{2},$ $\mu\neq-(\lambda+1)$
$1.3^1.13$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1,$ $[u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{2}e_1+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)u_2,\ [u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$	5	—
$1.3^1.14$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=(1-\lambda)u_1,$ $[u_2,u_4]=\lambda(\lambda-1)e_1+u_2,\ [u_3,u_4]=e_1+\lambda u_3,\ \lambda\neq\frac{1}{2}$	5	—
$1.3^1.15$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=-e_1+u_1$	5	$\alpha_{33}\neq-\alpha_{44}$
$1.3^1.16$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=e_1-u_1$	5	$\alpha_{33}\neq\alpha_{44}$
$1.3^1.17$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=e_1$	5	—
$1.3^1.19$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_4]=-e_1+u_1+2u_2$	5	$\alpha_{33}\neq0$
$1.3^1.20$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2-u_1,\ [u_3,u_4]=-u_3$	5	$\alpha_{33}\neq0$
$1.3^1.21$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\lambda u_1,$ $[u_2,u_4]=-\lambda e_1+(1-\lambda)u_1+(1+\lambda)u_2,\ [u_3,u_4]=(1-\lambda)u_3,\ \lambda\neq1$	5	$\alpha_{33}\neq0,\ \lambda\neq0,$ $\lambda\neq\frac{1}{2}$
$1.3^1.22$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1,$ $[u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2,\ [u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$	5	—
$1.3^1.23$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_1+u_2,\ [u_3,u_4]=e_1+u_3$	5	—
$1.3^1.24$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1,\ [u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2,$ $[u_2,u_3]=\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=\frac{2\lambda-1}{2\lambda-2}e_1-\frac{1}{2\lambda-2}u_1,\ [u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4,\ \lambda\neq1$	5	$\lambda\neq\frac{2}{3},$ $\alpha_{33}\neq2\lambda\alpha_{44}(\lambda-1)$
$1.3^1.25$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1,\ [u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2,$ $[u_2,u_3]=\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=\frac{1-2\lambda}{2\lambda-2}e_1+\frac{1}{2\lambda-2}u_1,\ [u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4,\ \lambda\neq1$	5	$\lambda\neq\frac{2}{3},$ $\alpha_{33}\neq2\lambda\alpha_{44}(1-\lambda)$
$1.3^1.26$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2,$ $[u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2,\ [u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{3}{2}u_1,\ [u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$	5	—
$1.3^1.27$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2,$ $[u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2,\ [u_2,u_4]=\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}2u_1,\ [u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$	5	—
$1.3^1.28$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=2u_1,\ [u_1,u_4]=2u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=e_1-\frac{1}{2}u_1,\ [u_3,u_4]=u_4$	5	$\alpha_{33}\neq2\alpha_{44}$
$1.3^1.29$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=2u_1,\ [u_1,u_4]=2u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=-e_1+\frac{1}{2}u_1,\ [u_3,u_4]=u_4$	5	$\alpha_{33}\neq-2\alpha_{44}$

Таблица 3. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Продолжение

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
$1.3^1.30$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=\frac{\lambda\mu(\lambda-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\lambda^2+\mu-\lambda^2\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_1,u_4]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_2,u_3]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_2,u_4]=\frac{\lambda\mu(\mu-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu(1-\mu)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda+\mu^2-\mu^2\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $\lambda+\mu-\lambda\mu\neq 0$, $1\leqslant\mu\leqslant\lambda$, $\lambda\mu>0$	5	$\alpha_{34}\neq\frac{\alpha_{33}(1-\mu)+\alpha_{44}(1-\lambda)}{2}$
$1.3^1.31$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=e_1$	5	—
$1.4^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_3$, $[u_3,u_4]=-u_3$	6	$\alpha_{33}\neq 0$
$1.4^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=pu_1$, $[u_2,u_4]=(p-1)u_2$, $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$	6	$\alpha_{33}\neq 0$, $p\neq 3$
$1.4^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$	6	$\alpha_{33}\neq\alpha_{44}$
$1.4^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=-e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$	6	$\alpha_{33}\neq-\alpha_{44}$
$1.4^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_3$	6	$\alpha_{33}\neq 0$
$1.4^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_1+u_3$	6	—
$1.4^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=-u_1+u_3$	6	—
$1.4^1.9$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4$, $[u_3,u_4]=pu_4$	6	$\alpha_{44}\neq 0$, $\alpha_{22}(p(p+1)-r)\neq 0$
$1.4^1.10$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2$, $[u_3,u_4]=pu_4$	6	$r\neq p(p+1)$
$1.4^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4$, $[u_3,u_4]=u_1-u_4$	6	—
$1.4^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2$, $[u_3,u_4]=u_1-u_4$	6	$r\neq 0$
$1.4^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=re_1+u_4$, $[u_3,u_4]=u_4$	6	—
$1.4^1.14$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=re_1$, $[u_3,u_4]=u_4$	6	$r\neq 1$
$1.4^1.15$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=e_1+u_4$, $[u_3,u_4]=u_1$	6	$\alpha_{22}\neq-\alpha_{44}$
$1.4^1.16$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=-e_1+u_4$, $[u_3,u_4]=u_1$	6	$\alpha_{22}\neq\alpha_{44}$
$1.4^1.17$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_4$, $[u_3,u_4]=u_1$	6	—
$1.4^1.18$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=e_1+u_4$	6	$\alpha_{22}\neq-\alpha_{44}$
$1.4^1.19$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=-e_1+u_4$	6	$\alpha_{22}\neq\alpha_{44}$
$1.4^1.20$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_4$	6	—
$1.4^1.21$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_3,u_4]=u_1$	6	—
$1.4^1.22$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=-e_1$, $[u_3,u_4]=u_1$	6	—
$1.4^1.24$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=e_1$	6	—
$1.4^1.25$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=-e_1$	6	—
$2.2^1.4$	$[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=-u_4$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $[u_1,u_3]=e_2$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_2,u_4]=e_2$	10	$\alpha_{23}\neq 0$
$2.2^1.5$	$[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=-u_4$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $[u_2,u_3]=e_2$	10	—
$2.2^2.1$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=e_2$, $[u_2,u_4]=e_2$, $[u_3,u_4]=-e_1$	11	$\alpha_{44}\neq 0$
$2.2^2.2$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=-e_2$, $[u_2,u_4]=-e_2$, $[u_3,u_4]=e_1$	11	$\alpha_{44}\neq 0$
$2.2^2.3$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=e_2$	11	—
$2.5^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_1,u_4]=-2e_1$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=2e_2-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2+u_4$, $[u_1,u_4]=2e_1-u_1$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=u_2-u_4$, $[u_3,u_4]=2u_3$	12	$\alpha_{33}\neq 0$
$2.5^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=-u_1$, $[u_1,u_3]=u_4$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=-u_4$	12	$\alpha_{33}\neq 0$
$2.5^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+pe_2+(1-q)u_2$, $[u_2,u_4]=qu_1$, $[u_3,u_4]=-(p+q)e_1+\lambda e_2-(1+q)u_4$, $q\geqslant 0$ $(if\,\lambda\neq 0)$, $q\in\mathbb{R}$ $(if\,\lambda=0)$	12	—
$2.5^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+qe_2-u_2$, $[u_2,u_4]=u_1$, $[u_3,u_4]=-qe_1-\lambda e_2-u_4$	12	—
$2.5^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+e_2$, $[u_3,u_4]=-e_1+\lambda e_2$	12	—
$2.5^1.8$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1-e_2$, $[u_3,u_4]=e_1+\lambda e_2$	12	—
$2.5^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_3,u_4]=e_2$	12	—

Таблица 4. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля. Продолжение

№	Скобки Ли	№ g	Ограничения
$2.5^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_3,u_4]=-e_2$	12	—
$2.5^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_1$	12	—
$2.5^2.1$	$[e_1,u_2]=-e_1+u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_1,u_4]=e_2,\ [e_2,u_2]=-e_2,\ [e_2,u_3]=u_4,$ $[e_2,u_4]=-e_1-u_1,\ [u_1,u_2]=e_1-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_2,\ [u_2,u_3]=-2u_3,$ $[u_2,u_4]=-u_4$	6	$\alpha_{33}\neq 0$
$2.5^2.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_3]=(p+s)e_1+re_2+u_2-2ru_4,\ [u_2,u_4]=2ru_1,\ [u_3,u_4]=-re_1+(p-s)e_2-2ru_2-u_4,$ $r\geqslant 0,\ s\geqslant 0$	13	$s\neq 0$
$2.5^2.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(r+s)e_1-u_4,$ $[u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=(s-r)e_2-u_2,\ s\geqslant 0$	13	$s\neq 0$
$2.5^2.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(1-s)e_2,\ s\geqslant 0$	13	$s\neq 0$
$2.5^2.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(s-1)e_2,\ s\geqslant 0$	13	$s\neq 0$
$2.5^2.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=e_1$	13	—
$3.2^1.3$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_2$	14	—
$4.3^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_1]=u_2,\ [e_3,u_4]=-u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=e_4$	14	—

Таблица 5. Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0,$ $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

Список литературы

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. V. 7. P. 259–280.

2. Бессе А. Многообразия Эйнштейна: В 2 т. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. 2010. Vol. 11. P. 1–38.

4. Cerbo F.L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. 2014. Vol. 14, № 2. P. 225–237.

5. Balaschenko V.V., Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Homogeneous manifolds: theory and applications: the monography. Khanty-Mansiisk: Poligraphist, 2008.

6. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. 2007. V. 127. P. 99–119.

7. Гладунова О.П., Славский В.В. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. 2010. Т. 431, № 6. С. 736–768.

8. Воронов Д.С., Родионов Е.Д. Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // ДАН. 2010. Т. 432, № 3. С. 301–303.

9. Гладунова О.П., Славский В.В. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 1. С. 50–69.

10. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных разложимых группах Ли // Известия АлтГУ. 2014. № 1/1(81). С. 122–126.

11. Родионов Е.Д., Славский В.В., Хромова О.П. О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных неунимодулярных неразложимых группах Ли // Известия АлтГУ. 2014. № 1/2(81). С. 62–73.

12. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tokohu Math. J. 2014. Vol. 66. P. 31–54.

13. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Loretzian Lie groups // Diff. Geom. and its Appl. 2013. Vol. 31. P. 496–509.

14. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory. 2015. Vol. 25. P. 1023–1044.

15. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterr. J. Math. 2016. Vol. 13(5). P.3455–3468.

16. Клепиков П.Н. Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена-Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 8. С. 92–97.

17. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. 1988. Vol. 71. P. 237–261.

18. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // Int Math Res Notices. 2015. Vol. 2015, № 13. P. 4901–4932.

19. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry // Contemp. Math. 2009. Vol. 491. P. 1–35.

20. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Funktional. Anal. i Pril. 1975. Vol. 9, № 2. P. 5–11.

21. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137, № 6. P. 2085–2092.

22. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds // Differential Geometry and Applications. 1993. Vol. 3, № 4. P. 301–307.

23. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Однородные инвариантные солитоны Риччи на четырехмерных группах Ли // Известия АлтГУ. 2015. Т. 85, № 1/2. С. 122–129.

24. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2015. Vol. 12, № 5.

25. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Math. Ann. 2001. Vol. 319, № 4. P. 715–733.

26. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. 2014. Vol. 144, № 1. P. 247–265.

27. Chaichi M., Keshavarzi Y. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces // Indian Journal of Science and Technology. 2015. Vol. 8, № 12. P. 1–11.

28. Catino G., Mantegazza C. The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow // Ann. Inst. Fourier. 2011. Vol. 61, № 4. P. 1407–1435.

29. Клепиков П.Н., Оскорбин Д.Н. Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ. 2016. Т. 89, № 1. С. 123–128.

30. Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Доклады академии наук. 2017. Т. 472, № 5. С. 506–508.

31. Клепиков П.Н. Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли // Матем. заметки. 2018. Т. 104, № 1. С. 62–73.

32. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2017. Т. 93, № 1. С. 106–109.

33. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 2-симметрических четырехмерных лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2017. Т. 96, № 4. С. 126–130.

34. Ernst I.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons on Lorentzian Walker Manifolds of Low Dimension // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, № 2. P. 191–194.

35. Оскорбин Д.Н., Родионов Е.Д., Эрнст И.В. О солитонах Риччи на 3-симметрических лоренцевых многообразиях // Известия АлтГУ. 2018. Т. 99, № 1. С. 119–122.

36. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. Классификация однородных конформно-плоских римановых многообразий // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 103–110.

37. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries // Tohoku Math. J. 1975. Vol. 27, № 1. P. 103–110.

38. Kuiper N.H. On conformally flat spaces in the large // Ann. of Math. 1949. Vol. 50. P. 916–924.

39. Honda K., Tsukada K. Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds // Recent Trends in Lorentzian Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2013. Vol. 26. P. 295–314.

40. Куркина М.В., Родионов Е.Д., Славский В.В. Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // ДАН. 2015. Т. 462, № 2. С. 141–143.

41. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 146, № 6. P. 6313–6390.

42. Гладунова О.П., Родионов Е.Д., Славский В.В. О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий // ДАН. 2013. Т. 450, № 2. С. 140–142.

43. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Polar Transform of Conformally Flat Metrics // Siberian Advances in Mathematics. 2018. Vol. 28, № 2. P. 101–114.

44. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Left-invariant Lorentz metrics on three-dimensional Lie groups with a Schouten-Weyl tensor of squared length zero // Doklady Mathematics. 2005. Vol. 71. P. 459–461.

45. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups // arXiv:1708.06614. 2017.
URL: `https://arxiv.org/pdf/1708.06614.pdf`

46. Milnor J. Curvatures of left invariant metric on Lie group // Advances in mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

47. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii J. Math. 2001. Vol. 8. P. 33–165.

48. Клепикова С.В., Хромова О.П. Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля // Известия АлтГУ. 2018. Т. 99, № 1. С. 99–102.

References

1. Gray A. Einstein-like manifolds which are not Einstein. *Geom. Dedicata*, 1978, vol. 7, pp. 259–280.

2. Besse A. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

3. Cao H.-D. Recent progress on Ricci solitons. *Advanced Lectures in Mathematics*, 2010, vol. 11, pp. 1–38.

4. Cerbo F.L. Generic properties of homogeneous Ricci solitons. *Adv. Geom*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 225–237.

5. Balaschenko V.V., Nikonorov Yu.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Homogeneous manifolds: theory and applications*. Khanty-Mansiisk: Poligraphist, 2008.

6. Calvaruso G. Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds. *Geom. Dedicata*, 2007, vol. 127, pp. 99–119.

7. Gladunova O.P., Slavskii V.V. Left-invariant riemannian metrics on four-dimensional unimodular lie groups with zero-divergence weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2010, vol. 431, no. 6, pp. 736–768.

8. Voronov D.S., Rodionov E.D. Left-invariant riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular lie groups with zero-divergence weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2010, vol. 432, no. 3, pp. 301–303.

9. Gladunova O.P., Slavskii V.V. About Harmonic Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Unimodular Lie Groups. *Matematicheskie Trudi*, 2011, vol. 14, no. 1, pp. 50–69.

10. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Khromova O.P. About Harmonic Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Decomposable Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2014, no. 1/1(81), pp. 122–126.

11. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Khromova O.P. Harmonicity of Weyl Tensor of Left-Invariant Riemannian Metrics on Four-Dimensional Nonunimodular Nondecomposable Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2014, no. 1/2(81), pp. 62–73.

12. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds. *Tokohu Math. J*, 2014, vol. 66, pp. 31–54.

13. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional Loretzian Lie groups. *Diff. Geom. and its Appl*, 2013, vol. 31, pp. 496–509.

14. Calvaruso G., Zaeim A. Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups. *Journal of Lie Theory*, 2015, vol. 25, pp. 1023–1044.

15. Zaeim A., Haji-Badali A. Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four. *Mediterr. J. Math*, 2016, vol. 13(5), pp. 3455–3468.

16. Klepikov P.N. Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on four-dimensional Lie groups with zero Schouten–Weyl tensor. *Izvestiya VUZov. Matematika*, 2017, no. 8, pp. 92–97.

17. Hamilton R.S. The Ricci flow on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 1988, vol. 71, pp. 237–261.

18. Arroyo R.M., Lafuente R. Homogeneous Ricci solitons in low dimensions. *Int Math Res Notices*, 2015, vol. 2015, no. 13, pp. 4901–4932.

19. Lauret J. Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry. *Contemp. Math*, 2009, vol. 491, pp. 1–35.

20. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature. *Funktional. Anal. i Pril*, 1975, vol. 9, no. 2, pp. 5–11.

21. Petersen P., Wylie W. On gradient Ricci solitons with symmetry. *Proc. Amer. Math. Soc*, 2009, vol. 137, no. 6, pp. 2085–2092.

22. Ivey T. Ricci solitons on compact three-manifolds. *Differential Geometry and Applications*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 301–307.

23. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Homogeneous Invariant Ricci Solitons on Four-dimensional Lie Groups. *Izvestiya of ASU*, 2015, vol. 85, no. 1/2, pp. 122–129.

24. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2015, no. 12.

25. Lauret J. Ricci soliton homogeneous nilmanifolds. *Math. Ann*, 2001, vol. 319, no. 4, pp. 715–733.

26. Onda K. Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case. *Acta Mathematica Hungarica*, 2014, vol. 144, no. 1, pp. 247–265.

27. Chaichi M., Keshavarzi Y. Conformally Flat Pseudo-riemannian Homogeneous Ricci Solitons 4-spaces. *Indian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 8, no. 12, pp. 1–11.

28. Catino G., Mantegazza C. The Evolution of the Weyl Tensor under the Ricci Flow. *Ann. Inst. Fourier*, 2011, vol. 61, no. 4, pp. 1407–1435.

29. Klepikov P.N., Oskorbin D.N. Conformally Flat Ricci Solitons on Lie Groups with Left-invariant (pseudo)Riemannian Metrics. *Izvestiya of ASU*, 2016, vol. 89, no. 1, pp. 123–128.

30. Klepikov P.N., Rodionov E.D. Algebraic Ricci solitons on metric Lie groups with zero Schouten–Weyl tensor. *Doklady Akademii Nauk*, 2017, vol. 472, no. 5, pp. 506–508.

31. Klepikov P.N. Conformally Flat Algebraic Ricci Solitons on Lie Groups. *Matematicheskie Zametki*, 2018, vol. 104, no. 1, pp. 62–73.

32. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 2-symmetric Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2017, vol. 93, no. 1, pp. 106–109.

33. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 2-Symmetric Four-Dimensional Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2017, vol. 96, no. 4, pp. 126–130.

34. Ernst I.V., Oskorbin D.N., Rodionov E.D. Ricci Solitons on Lorentzian Walker Manifolds of Low Dimension. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, vol. 39, no. 2, pp. 191–194.

35. Oskorbin D.N., Rodionov E.D., Ernst I.V. Ricci Solitons on 3-Symmetric Lorentzian Manifolds. *Izvestiya of ASU*, 2018, vol. 99, no. 1, pp. 119–122.

36. Alexeevskii D.V., Kimel'fel'd B.N. Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds. *Matematicheskie Zametki*, 1978, vol. 24, no. 1, pp. 103–110.

37. Takagi H. Conformally flat Riemannian manifolds admitting a transitive group of isometries. *Tohoku Math. J*, 1975, vol. 27, no. 1, pp. 103–110.

38. Kuiper N.H. On conformally flat spaces in the large. *Ann. of Math*, 1949, vol. 50, pp. 916–924.

39. Honda K., Tsukada K. Conformally Flat Homogeneous Lorentzian Manifolds. *Recent Trends in Lorentzian Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, 2013, vol. 26, pp. 295–314.

40. Kurkina M.V., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature. *Doklady Akademii Nauk*, 2015, vol. 462, no. 2, pp. 141–143.

41. Nikonorov Y.G., Rodionov E.D., Slavskii V.V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 146, no. 6, pp. 6313–6390.

42. Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. On the spectrum of the curvature operator of conformally flat Riemannian manifolds. *Doklady Akademii Nauk*, 2013, vol. 450, no. 2, pp. 140–142.

43. Rodionov E.D., Slavskii V.V. Polar Transform of Conformally Flat Metrics. *Siberian Advances in Mathematics*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 101–114.

44. Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. Left-invariant Lorentz metrics on three-dimensional Lie groups with a Schouten-Weyl tensor of squared length zero. *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 71, pp. 459–461.

45. Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. About Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups. *arXiv:1708.06614*, 2017.
`https://arxiv.org/pdf/1708.06614.pdf`

46. Milnor J. Curvatures of left invariant metric on Lie group. *Advances in mathematics*, 1976, vol. 21, pp. 293–329.

47. Komrakov B.B. Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces. *Lobachevskii J. Math*, 2001, vol. 8, pp. 33–165.

48. Klepikova S.V., Khromoca O.P. Locally Homogeneous Pseudo-Riemannian 4-Manifolds with Isotropic Weyl Tensor. *Izvestiya of ASU*, 2018, vol. 99, no. 1, pp. 99–102.

Авторы

Клепиков Павел Николаевич, аспирант, кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.
E-mail: klepikov.math@gmail.com

Оскорбин Дмитрий Николаевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.
E-mail: oskorbin@yandex.ru

Родионов Евгений Дмитриевич, д. ф.-м. н., профессор,кафедра математического анализа, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия.
E-mail: edr2002@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Клепиков П. Н., Оскорбин Д. Н., Родионов Е. Д. О почти эйнштейновых локально однородных (псевдо)римановых многообразиях // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 4. С. 48—65.

Authors

Klepikov Pavel Nikolaevich, postgraduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.
E-mail: klepikov.math@gmail.com

Oskorbin Dmitrii Nokolaevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State

University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.
E-mail: oskorbin@yandex.ru

Rodionov Evgenii Dmitrievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Altai State University, pr. Lenina, 61, Barnaul, 656049, Russia.
E-mail: edr2002@mail.ru

Please cite this article in English as:
Klepikov P. N., Oskorbin D. N., Rodionov E. D. On Almost Einstein Locally Homogeneous (pseudo)Riemannian Manifolds. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 4, pp. 48–65.