ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

***

УДК 514.763, 514.8

ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА H-ПРОСТРАНСТВ H_5 ТИПА $\{5\}$

Аминова А. В.[a,1], Хакимов Д. Р.[a,2]

[a] Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Исследуются 5-мерные псевдоримановы h-пространства H_5 типа $\{5\}$ [3]. Находятся необходимые и достаточные условия, при которых H_5 является пространством постоянной кривизны. Определяется общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве H_5 непостоянной кривизны. Устанавливаются условия существования негомотетического проективного движения в H_5 и описывается структура негомотетической проективной алгебры Ли в h-пространстве H_5 типа $\{5\}$.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, жесткое h-пространство H_5 типа $\{5\}$, уравнение Эйзенхарта, проективное движение.

PROJECTIVE-GROUP PROPERTIES OF H-SPACES H_5 OF TYPE $\{5\}$

Aminova A. V.[a,1], Khakimov D. R.[a,2]

[a] Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

The five-dimensional h-spaces H_5 of type $\{5\}$ [3] are studied. Necessary and sufficient conditions for H_5 to be a space of constant curvature are found. The general solution of the Eisenhart equation in h-space H_5 of non-constant curvature is determined. The conditions for the existence of a non-homothetic projective motion in H_5 are established, and the structure of a non-homothetic projective Lie algebra in h-space H_5 of type $\{5\}$ is described.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, rigid h-space H_5 of type $\{5\}$, Eisenhart equation, projective motion.

PACS: 11.10.Kk, 04.50.+h, 04.50.-h, 02.40-k, 02.20.Sv
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.1.4-11

Введение

Векторное поле X на n-мерном псевдоримановом многообразии (M^n, g) с проективной структурой П называется *бесконечно малым проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M^n$ (локальная) 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении уравнения Эйзенхарта

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{1}$$

[1] E-mail: asya.aminova@kpfu.ru
[2] E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

и обобщенного уравнения Киллинга

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij}. \tag{2}$$

После замены $h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}$ уравнение (1) принимает вид

$$a_{ij,k} = g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \tag{3}$$

Задав тип тензора h_{ij}, можно найти решения уравнения (1) и затем уравнения (2). Метрики (пространства), допускающие нетривиальное решение $h_{ij} \neq c g_{ij}$ уравнения Эйзенхарта, называются *h-метриками типа* χ (*h-пространствами типа* χ).

Уравнение (3), записанное в косонормальном репере ([1], с. 97), имеет вид

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\bar{a}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q\varphi)\theta_p + (Y_p\varphi)\theta_q,$$

где θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ есть 1-форма связности, $p, q, r = 1, \ldots, n$.

В работе [3] были найдены h-пространства H_5 типа $\{5\}$ и получены необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{5\}$. Для вычисления максимальной проективной алгебры Ли в H_5 необходимо получить общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве H_5. Для решения этой задачи нужно исследовать условия интегрируемости уравнений Эйзенхарта (16), включающих форму кривизны Ω_{ij}. При этом следует исключить пространства постоянной кривизны, строение проективной группы которых хорошо известно ([1], с. 28).

Статья состоит из четырех разделов. В разделе 1 даются основные определения и формулы. В разделе 2 определяется структура кривизны h-пространства H_5. В пункте 3 получаются необходимые и достаточные условия постоянства кривизны рассматриваемого h-пространства. В разделе 4 находится общее решения уравнения Эйзенхарта в h-пространстве H_5 непостоянной кривизны, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения общего вида в H_5 и выясняется строение негомотетической проективной алгебры Ли в h-пространстве H_5 типа $\{5\}$.

2. В каноническом косонормальном репере $(Y_h) = \underset{h}{\xi^i}\partial/\partial x^i$, заданном в подходящих координатах x^i формулами

$$\underset{1}{\xi^1} = \underset{2}{\xi^2} = \underset{3}{\xi^3} = \underset{4}{\xi^4} = 1, \quad \underset{5}{\xi^2} = -\varepsilon x^1 A^{-1}, \tag{4}$$
$$\underset{5}{\xi^3} = -2\varepsilon x^2 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi^4} = -3\varepsilon x^3 A^{-1}, \quad \underset{5}{\xi^5} = A^{-1},$$

где

$$A = 4\varepsilon\left(x^4 + \tau(x^5)\right) + 1 - \varepsilon$$

(τ — произвольная функция от x^5, ε принимает значения 0 или 1), метрика g пространства H_5 и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами

$$(\bar{a}_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ef \\ 0 & 0 & 0 & ef & e \\ 0 & 0 & ef & e & 0 \\ 0 & ef & e & 0 & 0 \\ ef & e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{g}_{pq}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

и справедливы уравнения

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{6}$$

$$df = \frac{2}{5} e(Y_5\varphi)\ \theta_1, \tag{7}$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{5}(Y_5\varphi)\ \theta_1, \quad \omega_{14} = \frac{3}{5}(Y_5\varphi)\ \theta_1, \quad \omega_{51} = (Y_5\varphi)\ \theta_2,$$
$$\omega_{52} = (Y_5\varphi)\ \theta_3, \quad \omega_{53} = (Y_5\varphi)\ \theta_4, \quad \omega_{54} = (Y_5\varphi)\ \theta_5 \tag{8}$$

(остальные компоненты связности ω_{ij} равны нулю). Здесь

$$\varphi = \frac{5}{2} f \tag{9}$$

— определяющая функция проективного движения типа $\{5\}$; $\omega_{ij} = \gamma_{jik}\ \theta^k$ есть 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h); $f = \varepsilon x^5 + (1-\varepsilon)\alpha$; α – постоянная; $e = \pm 1$ [3].

Используя первое структурное уравнение Картана

$$d\ \theta_i = -\sum_{j=1}^{5} e_j \omega_{ij} \wedge \theta_{\tilde{j}}$$

и формулы (8), найдем

$$d\ \theta_1 = -\frac{8}{5} e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\ \theta_2 = -\frac{6}{5} e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_3,$$
$$d\ \theta_3 = -\frac{4}{5} e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_4, \quad d\ \theta_4 = -\frac{2}{5} e(Y_5\varphi)\ \theta_1 \wedge \theta_5, \quad d\ \theta_5 = 0. \tag{10}$$

Введем обозначения

$$A \equiv Y_5\varphi, \quad C \equiv eY_5(Y_5\varphi).$$

Учитывая, что квадрат внешнего дифференциала равен нулю, возьмем внешний дифференциал от обеих частей равенства (7):

$$df = \frac{2}{5}\ e\ (Y_5\varphi)\ \theta_1 \equiv \frac{2}{5}\ e\ A\ \theta_1,$$

и сравним это с

$$dA = \theta^l Y_l Y_5 \varphi = \theta^l [Y_l, Y_5]\varphi + \theta^l Y_5 Y_l \varphi,$$

где (см. [1], с. 101)

$$[Y_l, Y_5] \equiv \nabla_{Y_l} Y_5 - \nabla_{Y_5} Y_l = \sum_{l=1}^{n} e_k(\gamma_{kl5} - \gamma_{k5l}) Y_{\tilde{k}},$$

в нашем случае [3]

$$[Y_1, Y_5] = -\frac{2}{5}(Y_5\varphi)Y_2, \quad [Y_2, Y_5] = -\frac{4}{5}(Y_5\varphi)Y_3, \quad [Y_3, Y_5] = -\frac{6}{5}(Y_5\varphi)Y_4, \quad [Y_4, Y_5] = -\frac{8}{5}(Y_5\varphi)Y_5.$$

В итоге с учетом (6) получим

$$dA = C\ \theta_1 - \frac{8}{5} eA^2\ \theta_2.$$

Дифференцируя равенства (8) и пользуясь (10), найдем

$$d\omega_{14} = 0, \quad d\omega_{23} = 0, \quad d\omega_{51} = C\ \theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{6}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_3,$$

$$d\omega_{52} = C\ \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{4}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{8}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_3,$$

$$d\omega_{53} = C\ \theta_1\ \wedge \theta_4 - \frac{2}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{8}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_4,$$

$$d\omega_{54} = C\ \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{8}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_5.$$

Используя предыдущие результаты и второе структурное уравнение Картана

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{l=1}^{5} e_l\ \omega_{il} \wedge \omega_{\tilde{l}j},$$

вычислим 2-форму кривизны Ω_{ij} h-пространства типа $\{5\}$:

$$\begin{gathered}
\Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{14} = \frac{3}{5} eA^2 \theta_1 \wedge \theta_2, \quad \Omega_{24} = \frac{3}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_3, \\
\Omega_{34} = \frac{3}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_4, \quad \Omega_{51} = C\ \theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_3, \\
\Omega_{52} = C\ \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_3, \\
\Omega_{53} = C\ \theta_1\ \wedge \theta_4 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_4, \\
\Omega_{54} = C\ \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{3}{5} eA^2\ \theta_2 \wedge \theta_5.
\end{gathered} \tag{11}$$

3. Если записать 2-форму кривизны в виде

$$\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l \qquad (k, l = 1, ..., 5,\ k < l)$$

и положить $K_{ijij} \equiv \rho_{ij}$, то предыдущая формула примет вид

$$\Omega_{ij} = \rho_{ij} \theta_i \wedge \theta_j + \sum_{(kl) \neq (ij)} K_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l \quad (i, j, k, l = 1, ..., 5,\ i < j,\ k < l),$$

где, в силу (11), $\rho_{ij} = 0$ для всех i, j, а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl) \neq (ij)$ не равны нулю только

$$K_{1412} = \frac{3}{5} eA^2 = K_{2413} = K_{3414} = K_{1513} = K_{2514} = K_{2523} = K_{3515} = K_{3524} = K_{4525},$$

$$K_{1512} = -C = K_{2513} = K_{3514} = K_{4515}.$$

Theorem 1. *Для того чтобы h-пространство H_5 типа $\{5\}$ было пространством постоянной кривизны K: $\Omega_{ij} = K \theta_i \wedge \theta_j$, необходимо и достаточно выполнение условий $K_{1412} = 0$, что равносильно*

$$A = 0, \tag{12}$$

при этом $\Omega_{ij} \equiv 0$, т. е. любое h-пространство H_5 типа $\{5\}$ постоянной кривизны является плоским ($K = 0$).

Доказательство. Необходимость условий $K_{1412} = 0$ следует из формулы $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K. Если выполняется (12), то $C = 0$ и $K_{ijkl} = 0$ для всех $(kl) \neq (ij)$, $i, j, k, l = 1, ..., 5$; $i < j$, $k < l$, при этом кривизна $\Omega_{ij} \equiv 0$, и H_5 является пространством постоянной нулевой кривизны, т. е. плоским пространством.

4. Справедлива

Theorem 2. *Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z) W\psi + g(W, Z) Y\psi + g(Y, W) Z\psi,$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z) Y\psi + g(Y, W) Z\psi, \tag{13}$$

в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны удовлетворяет условию

$$\psi = c_1 \frac{5}{2} f + const = c_1 \varphi + const, \tag{14}$$

где функция φ определена равенством (9), c_1 – произвольная постоянная.

Доказательство. Ввиду тензорного характера равенства (14) и инвариантности величины f достаточно доказать равенство в каноническом косонормальном репере (4), где уравнение (13) примет вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = (Y_q\psi)\theta_p + (Y_p\psi)\theta_q, \tag{15}$$

здесь $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (8), а $\bar{b}_{pq}$ – компоненты тензора b в косорепере (4).

Дифференцируя уравнение (15) и учитывая равенство нулю квадрата внешнего дифференциала d, получим условия интегрируемости этого уравнения

$$\bar{b}_{ph}\Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq}\Omega^h{}_p = \psi_{ph}\theta^h \wedge \theta_q + \psi_{hq}\theta^h \wedge \theta_p, \tag{16}$$

где

$$\Omega^h{}_p = e_h \Omega_{\tilde{h}p}, \quad \psi_{ph} \equiv -Y_h Y_p \psi - \gamma^l{}_{ph} Y_l \psi = \psi_{hp}.$$

Из (16), $(pq) = (14)$, приравняв коэффициенты при базисной 2-форме $\theta_2 \wedge \theta_5$ в левой и правой частях равенства, найдем:

$$eA^2 \bar{b}_{11} = 0.$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то $A = 0$, и H_5 по теореме 1 имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = 0$.

Аналогично, полагая в уравнении (16) последовательно $(pq, mn) = (11, 15)$, $(22, 14)$, $(15, 24)$, $(15, 23)$, $(22, 13)$, $(33, 14)$, $(34, 12)$, $(44, 13)$, $(44, 12)$ и $(45, 12)$, найдем при $A \neq 0$:

$$\psi_{11} = \bar{b}_{12} = \psi_{12} = \bar{b}_{13} = \psi_{13} = \bar{b}_{14} = \psi_{14} = \bar{b}_{22} = \psi_{22} = 0,$$

$$\bar{b}_{23} = \psi_{23} = \bar{b}_{35} = \psi_{35} = \bar{b}_{44} = \psi_{44} = \bar{b}_{45} = \bar{b}_{55} = 0;$$

затем при $(pq, mn) = (14, 12), (34, 14), (35, 24)$ выводим

$$A(\bar{b}_{15} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad A(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{24}) = 0, \quad A(\bar{b}_{33} - \bar{b}_{15}) = 0,$$

и так как $A \neq 0$ для пространства непостоянной кривизны, то $\bar{b}_{15} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{33} \equiv \mu$.

Так же из (16) при $(pq, mn) = (15, 12), (34, 13)$ получим

$$\frac{3eA}{5}\bar{b}_{25} = \frac{3eA}{5}\bar{b}_{34} = \psi_{45},$$

отсюда ввиду $A \neq 0$ следует $\bar{b}_{25} = \bar{b}_{34} \equiv \nu$.

С учетом найденных равенств из уравнения Эйзенхарта (15) с ω_{hs}, определенными формулами (8), при $(pq) = (11), (12), (13), (44)$ найдем

$$Y_1\psi = Y_2\psi = Y_3\psi = Y_4\psi = 0; \tag{17}$$

при $(pq) = (15), (33), (34)$ получим

$$d\mu + \frac{3e}{5}\nu(Y_5\varphi)\theta_1 = (Y_5\psi)\theta_1, \qquad d\mu - \frac{2e}{5}\nu(Y_5\varphi)\theta_1 = 0, \qquad d\nu = 0. \tag{18}$$

Отсюда следует $\nu = const$, $Y_5(\psi - e\nu\varphi) = 0$, что вместе с (17) и равенствами $Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_3\varphi = Y_4\varphi = 0$, следующими из (4) и (6), дает

$$Y_i(\psi - e\nu\varphi) = \underset{i}{\xi^j}\partial_j(\psi - e\nu\varphi) = 0$$

для всех $i = 1...5$, и так как $\det(\underset{i}{\xi^j}) \neq 0$ вследствие независимости векторных полей Y_i, то

$$\psi = e\nu\varphi + const \equiv c_1\varphi + const,$$

ч. т. д.

Theorem 3. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору:*

$$b_{ij} = c_2 g_{ij} \qquad (c_2 = const).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В косонормальном репере (4) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = 0. \tag{19}$$

Условия интегрируемости этого уравнения получаются из (16) при $\psi = const$ и имеют вид

$$\bar{b}_{ph}\Omega^h{}_q + \bar{b}_{hq}\Omega^h{}_p = 0.$$

Отсюда так же, как в предыдущем случае, получим, что все компоненты $\bar{b}_{ij}$ равны нулю, кроме

$$\bar{b}_{15} = \bar{b}_{24} = \bar{b}_{33}.$$

Так как уравнение (19) при $(pq) = (33)$ имеет вид $d\bar{b}_{33} = 0$, то $\bar{b}_{33} = ec_2 = const$. В итоге имеем $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (5), а множитель c_2 постоянен, что доказывает теорему 3.

Учитывая, что векторное поле X является аффинным движением в H_5, если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, из теоремы 3 выводим:

Theorem 4. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией:*

$$L_X g = cg \qquad (c = const).$$

Поскольку любые два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (13) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b, то из теоремы 2 и линейности уравнения (13) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_5, g) типа $\{5\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или, в силу теоремы 3, в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, g и a определены в косонормальном репере (4) каноническими формами (5) [3], c_1, c_2 – const. Отсюда следует

Theorem 5. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_5, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g,$$

где φ – определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере (4) каноническими формами (5), c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Из теоремы (5) вытекает

Theorem 6. *Если h-пространство (H_5, g) типа $\{5\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(X_1, \dots, X_r)$ – базис проективной алгебры Ли P_r в (H_5, g). По теореме 5 имеем

$$L_{X_s} g = \underset{s}{c}_1 h + \underset{s}{c}_2 g \qquad (s = 1, \dots, r),$$

где одна из постоянных $\underset{s}{c}_1$, например, $\underset{1}{c}_1$ отлична от нуля (в противном случае P_r состоит из инфинитезимальных гомотетий). В новом базисе

$$Z_1 = X_1, \quad Z_\tau = \underset{1}{c}_1 X_\tau - \underset{\tau}{c}_1 X_1 \qquad (\tau = 2, \dots, r)$$

найдем

$$L_{Z_\tau} g = (\underset{1}{c}_1 \underset{\tau}{c}_2 - \underset{1}{c}_2 \underset{\tau}{c}_1) g \qquad (\tau = 2, \dots, r),$$

ч. т. д.

Список литературы

1. Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* М.: Янус-К, 2003. 619 с.

2. Аминова А.В. Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий. *УМН.* 1995. **50** (1). С. 69–142

3. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces III. h-spaces of the type {5}. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 1, pp. 56–66.

References

1. Aminova A.V. *Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds.* Moscow, Yanus-K Publ., 2003. 613 p. (in Russian)

2. Aminova. A.V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentz manifolds. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1995, V. 50:1, pp. 69–142. (in Russian)

3. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces III. h-spaces of the type {5}. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 1, pp.56–66.

Авторы

Аминова Ася Васильевна, д-р ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, аспирант, кафедра геометрии, отделение математики, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Аминова А. В., Хакимов Д. Р. Проективно-групповые свойства H-пространств H_5 типа {5}. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 1. С. 4—11.

Authors

Aminova Asya Vasilyevna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of General Relativity and Gravitation, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya St., Kazan, 420008, Russia.

E-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Khakimov Dzhamoliddin Rakhmonovich, Department of Geometry, N. I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, 18 Kremlyovskaya St., Kazan, 420008, Russia.
E-mail: dzhamoliddink@mail.ru

Please cite this article in English as:
Aminova A. V., Khakimov D. R. Projective-group properties of H-spaces H_5 of type $\{5\}$. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 1, pp. 4–11.