ГРАВИТАЦИЯ, КОСМОЛОГИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

***

УДК 531.37, 514.82

О ПРИНЦИПЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Бабурова О. В.[a,1], Портнов Ю. А.[a,2], Фролов Б. Н.[b,3], Шамрова В. Е.[b,4]

[a] ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», Москва, 125319, Россия.
[b] ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», Москва, 119992, Россия.

В предыдущей работе авторов обосновано свойство тела, вращающегося относительно неподвижного центра масс, реализовать в пространстве параметров группы вращений принцип геодезических относительно метрики Киллинга–Картана этой группы. В настоящей работе доказывается релятивистская инвариантность этого свойства вращающегося тела, а именно, доказана теорема о том, что инерциальному движению вращающегося твердого тела в пространстве параметров группы вращений как подгруппы группы Лоренца соответствует кривая, являющаяся геодезической во внутреннем пространстве параметров данной группы.

Ключевые слова: Группа Лоренца, пространство параметров группа вращений как подгруппы группы Лоренца, инерциальное движение вращающегося твердого тела, принцип геодезических в пространстве параметров.

ON PRINCIPLE OF GEODESICS IN THE SPACE OF THE LORENTZ GROUP PARAMETERS

Babourova O. V.[a,1], Portnov Yu. A.[a,2], Frolov B. N.[b,3], Shamrova V. E.[b,4]

[a] Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Moscow, 125319, Russia.
[b] Moscow Pedagogical State University, Moscow, 119992, Russia.

In a previous paper, the authors substantiated the property of a body rotating relative to a fixed center of mass to realize the principle of geodesics with respect to the Killing–Cartan metric of this group in the space of parameters of the rotation group. In the present paper, the relativistic invariance of this property of a rotating body is proved, namely, a theorem is proved that the inertial motion of a rotating rigid body in the space of parameters of the rotation group as a subgroup of the Lorentz group corresponds to a curve that is geodesic in the internal space of the parameters of this group.

Keywords: Lorentz group, space of parameters of the rotation group as the Lorentz subgroup, rotating rigid body inertial motion, geodesic principle in the space of parameters.

[1]E-mail: ovbaburova@madi.ru
[2]E-mail: portnovyura@yandex.ru
[3]E-mail: bn.frolov@mpgu.ru
[4]E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

PACS: 04.50.Kd, 02.20.Hj
DOI: 10.17238/issn2226-8812.2020.2.4-13

Введение

Существют ряд теоретических разработок [1–11], основанных на гипотезе о том, что пространство параметров групп симметрий физических систем содержит информацию, существенную для описания динамики физических процессов в этих системах. Впервые данная идея была реализована в [1] с целью уравнять динамические роли массы и спина.

В работе [11] был рассмотрен пример группы вращений и доказана теорема о том, что свободно вращающемуся абсолютно твердому телу с неподвижным центром масс в пространстве параметров групы вращений соответствует кривая, являющаяся геодезической во внутреннем пространстве параметров этой группы, которое представляет собой трехмерное риманово пространство постоянной кривизны. Тем самым в этом пространстве выполняется вариационный принцип геодезической, который справедлив для траекторий движения свободных невращающихся тел в римаңом пространстве общей теории относительности.

В настоящей работе произведено обобщение указанной теоремы на случай пространства параметров группы Лоренца. С этой целью произведен буст параметров свободно вращающегося тела, центр масс которого теперь рассматривается движущимся со скоростью, постоянной по величине и направлению. Для такого типа движения, теперь уже в пространстве Минковского, доказанная теорема утверждает, что указанному инерциальному движению абсолютно твердого тела соответствует кривая, являющаяся геодезической метрики внутреннего пространстве параметров группы вращений как подгруппы группы Лоренца, что представляет собой обоснование релятивистской инваиантности принципа геодезических для пространства параметров группы Лоренца.

1. Пространство параметров группы Лоренца

Согласно частному принципу относительности линейное преобразование координат и времени, соответствующее переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой, должно оставлять инвариантной квадратичную форму

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

В терминах теории относительности совокупность трех пространственных координат и времени называют событием. При этом числа x_j , где $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, называют координатами события. Группа Лоренца $SO(1,3)$ является группой линейных и однородных преобразований четырехмерного пространства-времени, при этом переход от одной системы отсчета к другой имеет вид $\alpha_i^j x_j$. Матрица α_i^j оператора этого преобразования зависит только от относительного движения систем отсчета K' и K . Это движение можно задать, указав три проекции вектора поворота K' относительно K , и тремя проекциями скорости начала системы K' в системе K , всего шесть параметров. Инфинитезимальные операторы, соответствующие этим шести параметрам образуют векторное представление группы Лоренца. Три оператора поворота:

$$I_1 = \epsilon_{23} - \epsilon_{32}, \qquad I_2 = \epsilon_{31} - \epsilon_{13}, \qquad I_3 = \epsilon_{12} - \epsilon_{21},$$

и три оператора скорости:

$$J_1 = -\epsilon_{01} - \epsilon_{10}, \qquad J_2 = -\epsilon_{02} - \epsilon_{20}, \qquad J_3 = -\epsilon_{03} - \epsilon_{30},$$

где ϵ_{ij} $(i, k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ )$ - матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца, равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Запишем все перестановочные соотношения:

$$[I_i, I_k] = -\epsilon_{ijk} I_k, \qquad [J_i, J_k] = \epsilon_{ijk} J_k, \qquad [I_i, J_k] = -\epsilon_{ijk} J_k,$$

где ϵ_{ijk}, $i, j, k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, $\epsilon_{123} = 1$ – полностью антисимметричный тензор Леви–Чивита.

Группа Лоренца $SO(1,3)$ представляет собой группу вращений пространства Минковского и является конфигурационным пространством свободного твердого тела, движение которого описывается кривой $g = g(t)$ на группе. Алгебра Ли группы $SO(1,3)$ — это шестимерное пространство векторов, первые три из которых описывают угловые скорости вращения тела, а остальные три пропорциональны скоростям линейного перемещения тела.

Скорость Ω четырехмерного вращения g тела есть касательный шестимерный вектор к группе в точке g . Перенесем этот вектор левым сдвигом в касательное пространство к группе в единице, то есть в алгебру. Элементу g группы $SO(1,3)$ отвечает такое положение тела, которое получается из начального состояния (то есть из единицы алгебры) движением g . Скорость Ω – это элемент алгебры группы $SO(1,3)$. Однопараметрическую группу вращений с "угловой скоростью четырехмерного вращения" Ω обозначим через e^{Ω} .

Как всякий вектор касательного пространства, вектор Ω однозначно раскладывается по базису генераторов $\vec{e}_\alpha$, который состоит из векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, касательных к однопараметрическим вращениям реального трехмерного пространства, и векторов $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, касательных к временным вращениям. Коэффициенты разложения по первым трем векторам определяют обычную трехмерную угловую скорость $\vec{\omega}$. Коэффициенты разложения по последним трем векторамв с $i = 4,\ 5,\ 6$ в реалии мы наблюдаем в виде перемещения вдоль соответствующих осей, тогда компоненты разложения Ω по этим векторам определяют скорость поступательного движения тела — производную линейного перемещения по собственному времени. В данной статье будет рассмотрен частный случай поступательного движения только вдоль оси пространства Минковского OX и, следовательно, гиперболический поворот осей в плоскости XOt , для чего необходим только один базисный вектор $\vec{e}_4$, который согласно традиции мы обозначим как $\vec{e}_0$.

Группа вращений $SO(3)$ как многообразие – это компактное топологическое пространство, образованное множеством точек, каждая из которых является вращением в евклидовом пространстве R_3 [12]. Параметризируем пространственные координаты относительно центра масс углами Эйлера. Для этого возьмем связанную с центром масс тела неподвижную относительно далеких звезд систему координат K и неподвижную относительно тела систему координат K', также связанную с центром масс, детали см. в предыдущей работе авторов [11].

На основании определение углов Эйлера, связь между неголономным ортогональным базисом четырехмерного пространства в системе K $\vec{e}^{\,i}$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ и голономным координатным базисом в системе K' $\vec{e}^{\,\alpha}$ $(\alpha = \tau, \varphi, \psi, \theta)$ имеет вид [11]:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^{\,0} &= \vec{e}^{\,\tau}, \\
\vec{e}^{\,1} &= \vec{e}^{\,\varphi} \sin\theta \sin\psi + \vec{e}^{\,\theta} \cos\psi, \\
\vec{e}^{\,2} &= -\vec{e}^{\,\varphi} \sin\theta \cos\psi + \vec{e}^{\,\theta} \sin\psi, \\
\vec{e}^{\,3} &= \vec{e}^{\,\varphi} \cos\theta + \vec{e}^{\,\psi}.
\end{aligned}$$

Данные соотношения можно представить следующим образом: $\vec{e}^{\,i} = h^i{}_\alpha \vec{e}^{\,\alpha}$, где матрица тетрадных коэффициентов $h^i{}_\alpha$ равна

$$h^i{}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta\sin\psi & 0 & \cos\psi \\ 0 & -\sin\theta\cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & \cos\theta & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица перехода имеет вид:

$$(h^{-1})^{\alpha}{}_{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin\psi}{\sin\theta} & -\dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0 \\ 0 & -\operatorname{ctg}\theta\sin\psi & \operatorname{ctg}\theta\cos\psi & 1 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда переход от неголономного ортогонального базиса четырехмерного пространства $\vec{e}^{\,i}$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ к голономному координатному базису $\vec{e}^{\,\alpha}$ $(\alpha = \tau, \varphi, \psi, \theta)$ имеет вид $\vec{e}^{\,\alpha} = (h^{-1})^{\alpha}{}_{i}\vec{e}^{\,i}$. В явном виде получаем для связи базисов:

$$\begin{aligned} \vec{e}^{\,\tau} &= \vec{e}^{\,0}, \\ \vec{e}^{\,\varphi} &= \frac{1}{\sin\theta}(\vec{e}^{\,1}\sin\psi + \vec{e}^{\,2}\cos\psi), \\ \vec{e}^{\,\psi} &= -(\vec{e}^{\,1}\sin\psi - \vec{e}^{\,2}\cos\psi)\mathrm{ctg}\theta + \vec{e}^{\,3}, \\ \vec{e}^{\,\theta} &= \vec{e}^{\,1}\cos\psi + \vec{e}^{\,2}\sin\psi. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание, что неголономный базис четырехмерного пространства считается условно неподвижным.

Для введения подвижного базиса воспользуемся бустом пространства-времени, который в общем случае определяется обратной матрицей ($\vec{V}$ – линейная скорость, определяющая буст):

$$(L^{-1})^{i}{}_{k} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_x & \gamma\beta_y & \gamma\beta_z \\ \gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)n_x^2 & 1+(\gamma-1)n_x n_y & 1+(\gamma-1)n_x n_z \\ \gamma\beta_y & (\gamma-1)n_y n_x & 1+(\gamma-1)n_y^2 & (\gamma-1)n_y n_z \\ \gamma\beta_z & (\gamma-1)n_z n_x & 0 & 1+(\gamma-1)n_z^2 \end{pmatrix}.$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\quad \beta = \operatorname{th}\alpha = \frac{V}{c}$, $\quad \beta_m = \beta n_m$, $\quad n_m = \frac{V_m}{V}$ $\quad (m = x,\ y,\ z)$.

Если рассматривать движение только вдоль оси x, то направляющие косинусы $n_x = 1,\ n_y = n_z = 0$. И тогда буст определяется обратной матрицей:

$$(L^{-1})^{i}{}_{k} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и прямой матрицей

$$L^{i}{}_{k} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие преобразования неподвижного базиса и базиса, двигающегося относительно неподвижного со скоростью $V = c\operatorname{th}\alpha$, можно записать в виде: $\tilde{e}^{\,i} = L^{i}_{k}\vec{e}^{\,k}$.

Определим матрицы перехода от неподвижного неголономного ортогонального базиса четырехмерного пространства e^{i} к голономному координатному базису e^{α} , который двигается относительно неподвижного со скоростью $V = c\operatorname{th}\alpha$. При этом надо отметить, что в этом случае базис $\tilde{e}^{\,i} = L^{i}_{k}\vec{e}^{\,k}$ будет считаться для вращающейся системы неподвижным. Следовательно, можно записать, что

$$e^{\,\alpha} = (h^{-1})^{\alpha}_{k}\tilde{e}^{\,k} = (h^{-1})^{\alpha}_{k}L^{k}_{i}e^{\,i} = D^{\alpha}_{i}e^{\,i},$$

где введено обозначение $D^{\alpha}{}_{i} = (h^{-1})^{\alpha}{}_{k} L^{k}{}_{i}$ для матрицы перехода между вращающимся и двигающимся поступательно базисом и неподвижным базисом. Вычисляя компоненты прямой матрицы, получаем:

$$D^{\alpha}{}_{i} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & -\operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ -\dfrac{\operatorname{sh}\alpha\sin\psi}{\sin\theta} & \dfrac{\operatorname{ch}\alpha\sin\psi}{\sin\theta} & -\dfrac{\cos\psi}{\sin\theta} & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha\sin\psi\operatorname{ctg}\theta & -\operatorname{ch}\alpha\sin\psi\operatorname{ctg}\theta & \cos\psi\operatorname{ctg}\theta & 1 \\ -\operatorname{sh}\alpha\cos\psi & \operatorname{ch}\alpha\cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица будет иметь вид:

$$(D^{-1})^{i}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha\sin\psi\sin\theta & 0 & \operatorname{sh}\alpha\cos\psi \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha\sin\psi\sin\theta & 0 & \operatorname{ch}\alpha\cos\psi \\ 0 & -\cos\psi\sin\theta & 0 & \sin\psi \\ 0 & \cos\theta & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Псевдоевклидова метрика в касательном пространстве имеют вид:

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вид метрики в координатном пространстве определяется следующим образом:

$$g^{\alpha\beta} = e^{\alpha} e^{\beta} = D^{\alpha}{}_{i} e^{\,i} D^{\beta}{}_{k} e^{\,k} = g^{ik} D^{\alpha}{}_{i} D^{\beta}{}_{k}, \qquad g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha}.$$

Тогда компоненты метрики в координатном пространстве будут иметь вид:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\sin^2\theta} & \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} & -\dfrac{1}{\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученной метрике координатного пространства соответствует риманова связность Леви-Чивита, для которой коэффициенты аффинной связности вычисляются по формуле

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\partial_{\alpha} g_{\beta\mu} + \partial_{\beta} g_{\alpha\mu} - \partial_{\mu} g_{\alpha\beta} \right),$$

где переменные текущие индексы λ, μ, α, β в процессе суммирования при вычислениях следует заменять на постоянные обозначения координат τ, φ, ψ, θ, по которым суммирование уже не производится.

В результате вычислений получаем следующие значения:

$$\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{\varphi}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2\sin\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta & -\dfrac{1}{2\sin\theta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{\psi}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2\sin\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta \\ 0 & -\dfrac{1}{2\sin\theta} & \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{\theta}{}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\sin\theta & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Координатами в координатном пространстве будем называть:

$$x^{\alpha} = \begin{pmatrix} c\tau \\ \varphi \\ \psi \\ \theta \end{pmatrix},$$

координатами касательного пространства будут:

$$x^{i} = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

2. Теорема о принципе геодезических в пространстве параметров группы Лоренца

Одним из постулатов фундаментальной физики является вариационный принцип экстремального действия, согласно которому траектория движения физической системы реализует экстремум некоторого функционала, составленного из динамических переменных данной системы. В современной теории гравитации данная траектория движения бесструктурной частицы в гравитационном поле представляет собой геодезическую в римановом пространстве, моделирующем гравитационное взаимодействие. Это последнее утверждение получило название «принцип геодезических».

Кривая на многообразии группы вращений – это непрерывная совокупность поворотов $R(\lambda)$. Указанному свободному вращению твердого тела соответствует на групповом многообразии кривая $l(\lambda) = \exp(\vec{\omega}\lambda)$, где $\vec{\omega}$ – касательный 4-вектор к данной кривой на многообразии.

Докажем следующую теорему, представляющую собой распространение принципа геодезических на многообразие параметров группы Лоренца. Данная теорема обобщает соответствующую теорему, доказанную в [11] для многообразия пространства параметров группы вращения, образованного парметрами вращающегося твердого тела, центр масс которого неподвижен в избранной системе отсчета.

Теорема. *Кривая $l(\lambda) = \exp(\vec{\omega}\lambda)$ в многообразии G параметров группы Лоренца, соответствующая свободному вращению абсолютного твердого тела, центр масс которого испытывает* *инерциальное движение, является геодезической метрики Киллинга–Картана группы Лоренца, то есть выполняется равенство* $\nabla_{\vec{\omega}}\vec{\omega} = 0$ *, где* ∇ *- связность Леви–Чивита метрики многообразия* G.

Для доказательства теоремы найдем разложения компонент скорости координатного пространства через компоненты базисного касательного пространства. По определению скорости можно записать:

$$\omega^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{dx^\alpha c}{dx^\tau} = \frac{dx^\alpha c}{cdt\dfrac{dx^\tau}{cdt}} = \frac{\omega^\alpha c}{\omega^\tau} = \frac{D^\alpha{}_i\omega^i}{D^\tau{}_k\dfrac{\omega^k}{c}}.$$

Поэтому, если в касательном пространстве компоненты скорости имеют вид:

$$\omega^i = \begin{pmatrix} c \\ \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix},$$

то в координатном пространстве они принимают значения:

$$\begin{aligned}
&\omega^\tau = c, \\
&\omega^\varphi = \frac{(\omega^1 - c\,\mathrm{th}\,\alpha)\sin\psi - \omega^2\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\psi(1-\mathrm{th}^2\,\alpha)}{\sin\theta\left(1 - \frac{\omega^1}{c}\,\mathrm{th}\,\alpha\right)}, \\
&\omega^\psi = \frac{-(\omega^1 - c\,\mathrm{th}\,\alpha)\sin\psi\cos\theta + (\omega^3\sin\theta + \omega^2\cos\psi\cos\theta)(1-\mathrm{th}^2\,\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha}{\sin\theta\left(1 - \frac{\omega^1}{c}\,\mathrm{th}\,\alpha\right)}, \\
&\omega^\theta = \frac{(\omega^1 - c\,\mathrm{th}\,\alpha)\cos\psi + (\omega^2\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\psi(1-\mathrm{th}^2\,\alpha)}{\left(1 - \frac{\omega^1}{c}\,\mathrm{th}\,\alpha\right)},
\end{aligned}$$

Уравнение геодезической $\nabla_{\vec{\omega}}\vec{\omega} = 0$ в координатном представлении пространства параметров подгруппы вращений группы Лоренца имеет вид:

$$F^\beta = \omega^\alpha\left(\frac{\partial\omega^\beta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta{}_{\gamma\alpha}\omega^\gamma\right) = 0.$$

Рассмотрим движение, соответствующее координате $\beta = \tau$:

$$F^\tau = \omega^\alpha\left(\frac{\partial\omega^\tau}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\tau{}_{\gamma\alpha}\omega^\gamma\right) = \omega^\alpha\left(\frac{\partial c}{\partial x^\alpha} + 0\cdot\omega^\gamma\right) = 0.$$

Рассмотрим движение, соответствующее координате $\beta = \varphi$:

$$\begin{aligned}
F^\varphi &= \omega^\alpha\left(\frac{\partial\omega^\varphi}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\varphi{}_{\gamma\alpha}\omega^\gamma\right) = \omega^\alpha\frac{\partial\omega^\varphi}{\partial x^\alpha} + 2\Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\omega^\varphi\omega^\theta + 2\Gamma^\varphi{}_{\psi\theta}\omega^\psi\omega^\theta \\
&= \omega^\psi\left(\frac{\partial\omega^\varphi}{\partial\psi} + 2\Gamma^\varphi{}_{\psi\theta}\omega^\theta\right) + \omega^\theta\left(\frac{\partial\omega^\varphi}{\partial\theta} + 2\Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\omega^\varphi\right) = 0.
\end{aligned}$$

В равенстве нулю легко убедится, так как каждое из выражений в скобках независимо обращается в нуль. Рассмотрим движение, соответствующее координате $\beta = \psi$:

$$\begin{aligned}
F^\psi &= \omega^\alpha\left(\frac{\partial\omega^\psi}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\psi{}_{\gamma\alpha}\omega^\gamma\right) = \omega^\alpha\frac{\partial\omega^\psi}{\partial x^\alpha} + 2\Gamma^\psi{}_{\varphi\theta}\omega^\varphi\omega^\theta + 2\Gamma^\psi{}_{\psi\theta}\omega^\psi\omega^\theta \\
&= \omega^\psi\left(\frac{\partial\omega^\psi}{\partial\psi} + 2\Gamma^\psi{}_{\psi\theta}\omega^\theta\right) + \omega^\theta\left(\frac{\partial\omega^\psi}{\partial\theta} + 2\Gamma^\psi{}_{\varphi\theta}\omega^\varphi\right) = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим движение, соответствующее координате $\beta = \theta$:

$$F^\theta = \omega^\alpha\left(\frac{\partial\omega^\theta}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\theta{}_{\gamma\alpha}\omega^\gamma\right) = \omega^\alpha\frac{\partial\omega^\theta}{\partial x^\alpha} + 2\Gamma^\theta{}_{\varphi\psi}\omega^\varphi\omega^\psi = \omega^\psi\left(\frac{\partial\omega^\theta}{\partial\psi} + 2\Gamma^\theta{}_{\varphi\psi}\omega^\varphi\right) = 0.$$

Следует обратить внимание, что суммирование по τ, φ, ψ, θ отсутствует, так как это обозначения координат, а не сумматационных индексов типа α, β, λ, μ. Доказательство теоремы завершено.

Заключение

Таким образом, показано, что в пространстве параметров группы Лоренца выполняется принцип геодезических. Именно, доказана теорема о том, что свободному движению абсолютно твердого тела в пространстве Минковского, то есть которое свободно вращается и центр масс которого двигается с постоянной по величине и направлению скоростью, в пространстве параметров группы вращений как подгруппы группы Лоренца соответствует кривая, являющаяся геодезической метрики данного внутреннего пространства.

Данная теорема обобщает аналогичную теорему, которая в [11] была доказана для свободно вращающегося абсолютно твердого тела, центр масс которого неподвижен в выбранной системе координат. Однако, далеко не любое свойство тела, справедливое в неподвижной системе отсчета, будет одинаковым образом описываться в любой другой инерциальной системе. Для установления релятивистской инвариантности указанного свойства и было необходимо доказательство данной теоремы, более общей, чем теорема, доказанная в [11]. Доказанная релятивистская инвариантность свидетельствует, что принцип геодезических фактически можно рассматривать как своеобразный закон механики, выполняющийся во всех инерциальных системах отсчета.

Важным является выяснение того, выполняется ли принцип геодезических, возможно, в какой-либо обобщенной форме, для других калибровочных групп. Если это подтвердится, то данный результат будет свидетельствует в пользу высказанной рядом авторов [1–11] идеи о том, что свойства внутренних пространств параметров групп симметрий физических систем во многом определяют физические особенности этих систем, что может соответствовать некоторому физическому принципу, смысл которого состоит в следующем:

Обоснование кинематики и динамики физических процессов состоит не только в координатном или импульсном пространствах, но также в пространстве параметров симметрии той группы Ли, которая описывает данный физический процесс.

Указанный принцип, дополнительный к уже существующим, может служить основой для развития специального направления в фундаментальной теоретической физике.

Список литературы

1. Lurcat F. Quantum field theory and the dynamical role of spin. *Physica*, 1964, 1, pp. 95–106.

2. Cho Y.M. Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. *J. Math. Phys.*, 1975, 16 (10), pp. 2029–2036.

3. Ne'eman Y., Regge T. Gauge Theory of Gravity and Supergravity on a Group Manifold. *Revista del Nuovo Cim.*, 1978, 1 (5), pp. 1–43.

4. Ne'eman Y., Regge T. Gravity and Supergravity as Gauge Theories on a Group Manifold. *Phys. Lett.*, 1978, 74B, pp. 54–56.

5. Toller M. Classical Field Theory in the Space of Reference Frames. *Nuovo Cim.*, 1978, 44B (1), pp. 67–98.

6. Toller M., Vanzo L. Free Fields on the Poincare Group. *Lettete al Nuovo Cim.*, 1978, 22 (9), pp. 345–348.

7. Cognola G., Soldati R., Vanzo L., Zerbini S. Classical non-Abelian gauge theories in the space of reference frames. *J. Math. Phys. V.*, 1979, 20 (12), pp. 2613–2618.

8. Carmeli M. Rotational relativity theory. *Int. J. Theor. Phys.*, 1986, 25 (1), pp. 89–94. https://doi.org/10.1007/BF00669716

9. Portnov Yu.A. Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time. *Gravit. Cosmol.*, 2011, 17 (2), pp. 152–160.

10. Портнов Ю.А. *Уравнения поля в семимерном пространстве-времени.* М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2013. 154 с.

11. Бабурова О.В., Портнов Ю.А., Фролов Б.Н., Шамрова В.Е. О геодезических в пространстве параметров группы вращений. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2018. № 2. С. 18–27.

12. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики. 3-е изд.* М.: Наука, 1989. 472 с.

References

1. Lurcat F. Quantum field theory and the dynamical role of spin. *Physica*, 1964, 1, pp. 95–106.

2. Cho Y.M. Higher-dimensional unifications of gravitation and gauge theories. *J. Math. Phys.*, 1975, 16, no. 10, pp. 2029–2036.

3. Ne'eman Y., Regge T. Gauge Theory of Gravity and Supergravity on a Group Manifold. *Revista del Nuovo Cim.*, 1978, 1, no. 5, pp. 1–43.

4. Ne'eman Y., Regge T. Gravity and Supergravity as Gauge Theories on a Group Manifold. *Phys. Lett.*, 1978, 74B, pp. 54–56.

5. Toller M. Classical Field Theory in the Space of Reference Frames. *Nuovo Cim.*, 1978, 44B (1), pp. 67–98.

6. Toller M., Vanzo L. Free Fields on the Poincare Group. *Lettete al Nuovo Cim.*, 1978, 22, no. 9, pp. 345–348.

7. Cognola G., Soldati R., Vanzo L., Zerbini S. Classical non-Abelian gauge theories in the space of reference frames. *J. Math. Phys.*, 1979, 20, no. 12, pp. 2613–2618.

8. Carmeli M. Rotational relativity theory. *Int. J. Theor. Phys.*, 1986, 25, no. 1, pp. 89–94. https://doi.org/10.1007/BF00669716

9. Portnov Yu.A. Gravitational Interaction in Seven-Dimensional Space-Time. *Gravit. Cosmol.*, 2011, 17, no. 2, pp. 152–160.

10. Portnov Yu.A. *Field Equations in Seven-Dimensional Space-Time.* Moscow, Nauka Publ., 2013. 154 p. (in Russ.)

11. Babouriva O.V., Portnov Yu.A., Frolov B.N., Shamrova V.E. On geodesics in the space of the rotation group parameters. *Spase, Time and Fundamental Interactions*, 2018, no. 2, pp. 18–27 (in Russ.).

12. Arnold V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics. Second Edition.* New York, Springer-Verlag, 1989. 519 p.

Авторы

Бабурова Ольга Валерьевна, д. ф.-м. н., профессор, кафедра «Физика», ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», Ленинградский пр., 64, Москва, 125319, Россия.
E-mail: ovbaburova@madi.ru

Портнов Юрий Алексеевич, к. ф.-м. н., доцент, кафедра «Физика», ФГБОУ ВО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», Ленинградский пр., 64, Москва, 125319, Россия.
E-mail: portnovyura@yandex.ru

Фролов Борис Николаевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского, Институт физики, технологии и информационных систем, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», Малая Пироговская улица, 29, Москва, 119992, Россия.
E-mail: bn.frolov@mpgu.ru

Шамрова Виктория Евгеньевна, аспирант, кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского, Институт физики, технологии и информационных систем, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет(МПГУ)», Малая Пироговская улица, 29, Москва, 119992, Россия.
E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Бабурова О. В., Портнов Ю. А., Фролов Б. Н., Шамрова В. Е. О принципе геодезических в пространстве параметров группы Лоренца. *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия.* 2020. № 2. С. 4—13.

Authors

Babourova Olga Valer'evna, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department 'Physics', Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Leningradsky pr., 64, Moscow, 125319, Russia.
E-mail: ovbaburova@madi.ru

Portnov Yuriy Alexeevich, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Department "Physics", Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI), Leningradskiy pr., 64, Moscow, 125319, Russia.
E-mail: portnovyura@yandex.ru

Frolov Boris Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, E.V. Shpol'skii's Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Technology and Informational Systems, Moscow Pedagogical State University, Malaya Pirogovskaya st., 29, Moscow, 119992, Russia.
E-mail: bn.frolov@mpgu.ru

Shamrova Viktoriya Evgenievna, Postgraduate at the E.V. Shpol'skii's Department of Theoretical Physics, Institute of Physics, Technology and Informational Systems, Moscow Pedagogical State University, Malaya Pirogovskaya st., 29, Moscow, 119992, Russia.
E-mail: shamrova_viktori@mail.ru

Please cite this article in English as:
Babourova O. V., Portnov Yu. A., Frolov B. N., Shamrova V. E. On principle of geodesics in the space of the Lorentz group parameters. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2020, no. 2, pp. 4–13.